

ROZDZIAŁ XXII.

Powstawanie energii pola magnetycznego skutkiem pracy prądu i wytwarzanie pracy prądu z energii pola.

1. Powstawanie i znikanie prądu elektrycznego. Gdy prąd powstaje w obwodzie (rys. 236) w chwili zamknięcia wyłącznika *w*, jednocześnie w przestrzeni, otaczającej przewód, wytwarza się pole magnetyczne. Pole to zawiera pewien zasób energii, wytworzonej przez pracę prądu, płynącego przeciwko sile elektromotorycznej samoindukcji, która przy powstawaniu prądu skierowana jest wbrew prądowi.

Oznaczmy siłę elektromotoryczną baterji przez *E*, siłę elektromotoryczną samoindukcji w chwili *t* przez *E_{st}*, natężenie prądu przez *i_t*, indukcyjność obwodu przez *L*, oporność całkowitą obwodu wokoło przez *R*.

Na zasadzie prawa Ohma:

$$i_t = \frac{E - E_{st}}{R},$$

$$E = i_t \cdot R + E_{st}.$$

Mnożąc obie strony równania przez *i_t · dt*, otrzymamy równanie, wyrażające przetwarzanie się energii w obwodzie w ciągu czasu *dt*:

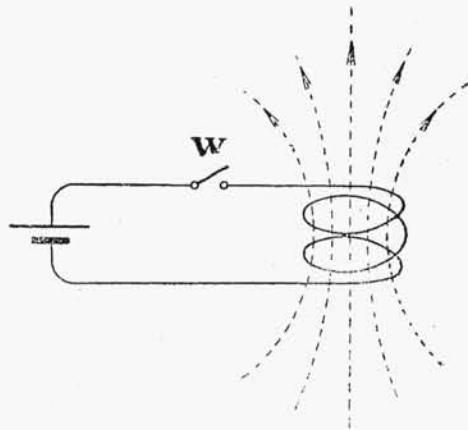
$$E \cdot i_t \cdot dt = i_t^2 \cdot R \cdot dt + E_{st} \cdot i_t \cdot dt.$$

Znaczenie poszczególnych części tego wzoru jest następujące:

$$E \cdot i_t \cdot dt$$

wyraża energję, dostarczoną przez baterję.

$$i_t^2 \cdot R \cdot dt$$



Rys. 236.

ciepło Joule'a

$$E_{st} \cdot i_t \cdot dt$$

oznacza pracę prądu, przetwarzającą się w energję pola magnetycznego. Z rozdziału VIII wiemy, że:

$$E_{st} = -L \cdot \frac{di_t}{dt},$$

Odpowiadająca tej sile elektromotorycznej praca prądu w ciągu czasu t będzie:

$$\int_0^t E_{st} \cdot i_t \cdot dt = \int_0^t L \cdot \frac{di_t}{dt} \cdot i_t \cdot dt = \int_0^i L \cdot i_t \cdot di_t = \left[L \cdot \frac{i_t^2}{2} \right]_0^i$$

Załóżmy, że w chwili 0 $i_t = 0$, a w chwili t $i_t = i$; praca omawiana będzie wtedy:

$$L \cdot \frac{i^2}{2}.$$

W ten sposób wyraża się energja pola magnetycznego, wywołanego przez prąd i w obwodzie, mającym indukcyjność L .

Rozważmy jeszcze przypadek znikania prądu; założymy mianowicie, że obwód (rys. 236) pozostaje zamknięty, lecz źródło prądu przestało działać, czyli jego siła elektromotoryczna stała się równa zero. Wtedy powstanie siła elektromotoryczna samoindukcji zgodna z kierunkiem prądu i , według prawa Ohma, otrzymamy dla tego obwodu:

$$i_t = \frac{E_{st}}{R},$$

$$E_{st} = i_t \cdot R,$$

$$E_{st} \cdot i_t \cdot dt = i_t^2 \cdot R \cdot dt.$$

Wzór ten wskazuje, że praca siły elektromotorycznej samoindukcji otrzymywana z pola magnetycznego, wytwarza ciepło Joule'a. Tym sposobem przy przerywaniu prądu o natężeniu i cała energja pola magnetycznego, wywołana przez prąd i wynosząca $L \cdot \frac{i^2}{2}$, powraca do obwodu elektrycznego.

Przy zmianach prądu, część energii pola przechodzi do obwodu przy zmniejszaniu się prądu i wraca z powrotem do pola, gdy prąd wzrasta.

¹⁾ Na znak uwagi nie zwracamy, ponieważ uwzględniliśmy go już poprzednio.

2. Wyraz energii, zawartej w polu magnetycznym przez natężenie pola, lub indukcję magnetyczną. Jest jednak inny jeszcze sposób wyrażania energii pola magnetycznego, mający w elektrotechnice duże znaczenie. Rozważmy pierścień, wykonany z materiału o przenikalności magnetycznej μ , na którym nawinięto z zwojów drutu izolowanego (rys. 31). Po drucie przebiega prąd, którego natężenie w chwili t jest i_t . Długość średniej linii magnetycznej w pierścieniu niech będzie l , a przekrój poprzeczny s . Dla otrzymania wzorów możliwie najogólniejszych założymy, że μ jest wielkością zmienną zależną od gęstości linii magnetycznych i że pierścień jest żelazny. Obwód nie ma wtedy stałego określonego współczynnika samoindukcji i wyznaczenie wzoru pracy, niezbędnej na wytworzenie pola magnetycznego, rozpoczniemy od początku, wychodząc z założenia, że praca ta, bądź co bądź, musi równać się pracy prądu elektrycznego, płynącego przeciw sile elektromotorycznej samoindukcji. Oznaczmy tę pracę przez A .

Wtedy:

$$A = \int_0^t E_{st} \cdot i_t \cdot dt.$$

Jeżeli zaś liczbę linii, objętych w chwili t przez cały obwód oznaczmy przez $\Phi_t \cdot z$, gdzie Φ_t jest to strumień linii objętych jednym zwojem to:

$$E_{st} = z \cdot \frac{d\Phi_t}{dt},$$

$$A = \int_0^t i_t \cdot z \cdot d\Phi_t.$$

Jeżeli żelazo posiadać będzie indukcję B_t , a natężenie pola zwojnicy równa się H , to:¹⁾

$$\Phi_t = B_t \cdot s \quad \text{ i } \quad d\Phi_t = s \cdot dB_t,$$

a z rozdziału VII § 6 wiemy, że dla obwodu magnetycznego, obejmującego zwojnicę, składającą się z z zwojów, po których płynie prąd i mamy zależność:

$$\int H \cdot dl = 4\pi \cdot z i,$$

o ile całka jest wzięta wokoło całej średniej linii magnetycznej.

W przypadku rozważanym, H na całej linii średniej jest wielkością stałą: przeto:

$$H \cdot l = 4\pi \cdot z i,$$

stąd:

$$i = \frac{H l}{4\pi z},$$

¹⁾ Rozważamy pierścień cienki w porównaniu do średnicy.

zatem:

$$A = \int_0^t \frac{H_t l}{4 \pi z} \cdot z \cdot s \cdot d B_t$$

albo:

$$A = \frac{l \cdot s}{4 \pi} \int_0^B H_t \cdot d B_t,$$

gdzie $l \cdot s = v$ oznacza objętość żelaza. Mamy więc:

$$A = v \cdot \frac{1}{4 \pi} \int_0^B H_t \cdot d B_t,$$

praca zaś, potrzebna do namagnesowania jednostki objętości będzie:

$$A_1 = \frac{1}{4 \pi} \int_0^B H_t \cdot d B_t.$$

W tym przypadku, gdy μ jest wielkością stałą, otrzymamy:

$$H_t = \frac{B_t}{\mu}$$

$$A_1 = \frac{1}{4 \pi} \int_0^B \frac{B_t}{\mu} \cdot d B_t = \frac{1}{8 \pi \mu} \cdot \left[B^2 \right]_0^B$$

czyli:

$$A_1 = \frac{B^2}{8 \pi \cdot \mu}.$$

Jest to wyraz energii, zawartej w jednostce objętości pola, które posiada indukcję magnetyczną B , a przenikalność magnetyczna ośrodka $= \mu$.

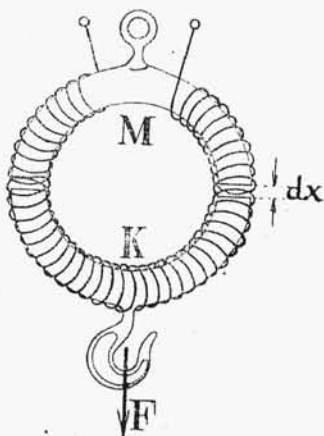
Wprowadzając, zamiast indukcji magnetycznej B , natężenie pola

$H = \frac{B}{\mu}$, otrzymamy:

$$A_1 = \frac{H^2 \cdot \mu}{8 \pi}.$$

Z tego wzoru wynika, że przy tym samym natężeniu pola magnetycznego energia pola w żelazie jest znacznie większa, niż w powietrzu.

3. Siła przyciągania elektromagnesów. Na podstawie wzorów powyższych można z łatwością określić siłę przyciągającą magnesów lub elektromagnesów. Przedstawmy sobie, że pierścień żelazny (rys. 237)



Rys. 237.

owinięty wokoło drutem, magnesuje się za pomocą prądu elektrycznego. W płaszczyźnie poziomej pierścień jest rozcięty na dwie połowy. Górna połowa M stanowi część nieruchomą elektromagnesu, dolną zaś K podtrzymują siły przyciągania magnetycznego. Załóżmy, że za pomocą siły zewnętrznej odciągnęliśmy dolną część o tyle, iż utworzyły się z dwóch stron pierścienia szczeliny o nieskończenie małej grubości dx , a jednocześnie, przez odpowiednie powiększenie natężenia prądu, indukcja magnetyczna w całym obwodzie pozostała niezmienna. Skutkiem takiego odciągnięcia kotwicy, siła F wykonała pracę:

$$F \cdot dx,$$

a w polu magnetycznym przybyła energia, zawarta w dwóch szczelinach pomiędzy żelaznymi półpierścieniami. Na podstawie wzorów poprzednich wiemy, że energia, zawarta w 1 cm^3 wynosi w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych:

$$\frac{B^2}{8\pi} \cdot 1)$$

Jeśli przekrój poprzeczny pierścienia oznaczmy przez s , to objętość obu szczelin będzie:

$$2s \cdot dx,$$

lub oznaczając $2s$ przez S :

$$S \cdot dx.$$

Jeśli indukcja magnetyczna w powietrzu jest wszędzie jednakowa, to energia, zawarta w obu szczelinach będzie:

$$\frac{B^2}{8\pi} \cdot S \cdot dx.$$

Na zasadzie prawa zachowania energii, praca mechaniczna siły F równa się przyrostowi energii w polu magnetycznym, a więc:

$$F dx = \frac{B^2}{8\pi} \cdot S \cdot dx,$$

skąd:

$$F = \frac{B^2}{8\pi} \cdot S.$$

¹⁾ $\mu = 1$, gdyż wzór dotyczy energii istniejącej w szczelinie, wypełnionej powietrzem.

Jest to wzór Maxwella, wyrażający naprężenie wzdłuż strumienia magnetycznego o indukcji (gęstości linii) B i przekroju porzecznym S .

B i S wyrażamy zazwyczaj w jednostkach bezwzględnych, wówczas F otrzymujemy w dynach.

Doświadczenie wskazuje, że dla obliczeń praktycznych możemy stosować ten wzór z dokładnością dostateczną do najrozmaitszych rodzajów elektromagnesów i magnesów stałych, z zastrzeżeniem jednak, by szczelina powietrzna była dość wązka w porównaniu z wymiarami szczeliny, prostopadłymi do kierunku linii sił. W przeciwnym razie, zdanie sobie sprawy z układu linii magnetycznych, a więc i wielkości indukcji B nastęrcza znaczne trudności i wartość praktyczna powyższego wzoru jest niewielka, a nieogłędne stosowanie doprowadza do wyników niezgodnych z doświadczeniem.

Przykład. Pomiędzy dwoma biegunami elektromagnesu a kotwicą mamy pole magnetyczne, w którym indukcja wynosi 10000 c. g. s. Wielkość powierzchni każdego bieguna wynosi 10 cm^2 . Obliczyć ilość energii, zawartej w centymetrze sześciennym tego pola i siłę przyciągania kotwicy.

Na zasadzie powyższych wzorów energia, zawarta w jednostce objętości pola, będzie:

$$\frac{B^2}{8\pi} = \frac{10000^2}{8\pi} = 3980000 \frac{\text{ergów}}{\text{cm}^3} = 0,0406 \frac{\text{kgm}}{\text{cm}^3},$$

a siła przyciągania wyniesie:

$$\frac{B^2 \cdot S}{8\pi} = \frac{10000^2 \cdot 20}{8\pi} = 79600000 \text{ dyn} = 81,2 \text{ kg}.$$

W praktyce indukcja magnetyczna w wyjątkowych tylko okolicznościach dosięga dwudziestu kilku tysięcy. Załóżmy, że $B = 20000$; wtedy każdy centymetr kwadratowy bieguna przyciągałby z siłą:

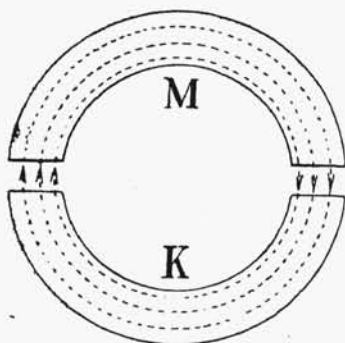
$$\frac{20000^2}{8\pi} = 15900000 \text{ dyn} = 16,25 \text{ kg}.$$

4. Siły działające w strumieniu magnetycznym. W poprzednich rozdziałach wielokrotnie posługiwaliśmy się wyobrażaniem Farady'ego o napięciach i ciśnieniach w strumieniu indukcji magnetycznej. Na podstawie wyników rozumowania otrzymanych w paragrafach poprzedzających, możemy je uzasadnić ściśle.

Siły, utrzymujące kotwicę K (rys. 237) w zetknięciu z podkową M elektromagnesu, można uważać jako skutek dążenia strumienia indukcji magnetycznej do skrócenia się. Widzimy to wyraźnie na rys. 238, gdzie wskazane są linie indukcji, przenikające kotwicę i podkową poprzedniego elektromagnesu. Stąd wypływa wniosek, że w każdym strumieniu indukcji

działają naprężenia dążące do skrócenia linii. Wielkość tych naprężeń, działających wzdłuż linii, wyrażamy według paragrafu poprzedniego wzorem:

$$f = \frac{B^2}{8\pi \cdot \mu}.$$

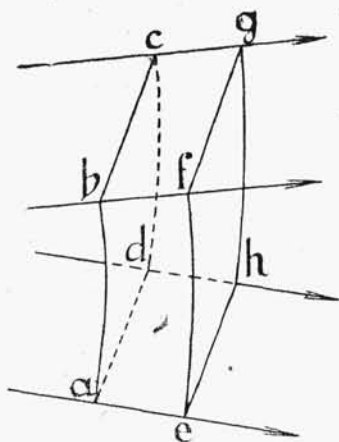


Rys. 238.

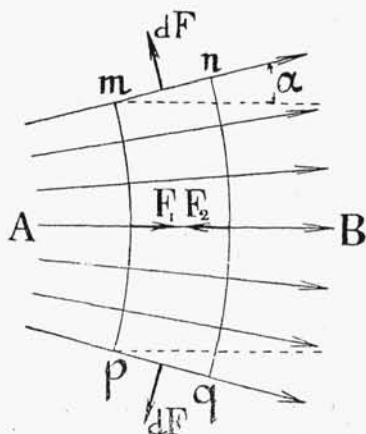
Mając B w jednostkach *c. g. s.*, znajdziemy f w dynach na cm^2 .

Oprócz tych naprężeń, działają jeszcze ciśnienia wpoprzek linii. Obecność tych ciśnień możemy udowodnić w sposób następujący:

Wyobraźmy sobie bryłę $abcdefgh$ (rys. 239) wyciętą ze strumienia indukcji magnetycznej w ten sposób, że krawędzie ae , dh , cg i bf są zgodne z kierunkiem linii, a powierzchnie $abcd$ i $efgh$ są prostopadłe do tego kierunku. Załóżmy, że bf jest równoległe do cg , a ae do dh . Na rys. 240 mamy przekrój tej bryły za pomocą płaszczyzny $mnpq$, równoległej do ściany $abfe$.



Rys. 239.



Rys. 240.

Siły, skracające linie indukcji magnetycznej, wyrażają się dwiema siłami F_1 i F_2 , które stanowią siły wypadkowe odpowiednich sił cząstkowych, działających na ściany $abcd$ i $efgh$ bryły. Zakładamy, że na każdej z tych powierzchni indukcja jest we wszystkich punktach jednakowa. Oznaczmy przez B_1 i B_2 indukcje magnetyczne na powyższych ścianach, a przez S_1 i S_2

rzuty tych ścian na płaszczyzny prostopadłe do linii średniej AB . Przy tych oznaczeniach, opierając się na wzorach paragrafu poprzedniego, mamy:

$$F_1 = \frac{B_1^2 \cdot S_1}{8\pi \cdot \mu}; \quad F_2 = \frac{B_2^2 \cdot S_2}{8\pi \cdot \mu}.$$

Uwzględniając ciągłość strumienia indukcji magnetycznej, otrzymamy: ¹⁾

$$B_1 \cdot S_1 = B_2 \cdot S_2,$$

więc:

$$B_2 = \frac{B_1 \cdot S_1}{S_2}.$$

Podstawiając tę wartość we wzór dla siły F_2 , otrzymamy:

$$F_2 = \frac{B_1^2 \cdot S_1^2}{8\pi \cdot \mu \cdot S_2}.$$

Z tych wyrazów dla F_1 i F_2 wynika, że:

$$F_1 - F_2 = \frac{B_1^2 \cdot S_1}{8\pi \cdot \mu} \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right).$$

Wzór ten wskazuje, że siła F_1 jest większa od siły F_2 , ponieważ $S_1 < S_2$, jak to widać z rysunku. Przy ustalonym jednak układzie linii pola magnetycznego przyjąć należy, że siły wewnętrzne w strumieniu magnetycznym są w równowadze. Uzmysłować to sobie można, porównywając rozważany przykład ze skrzynką szczelną, wypełnioną parą. Ciśnienia pary na ścianki takiej skrzynki są zawsze zrównoważone, tak, że skrzynka pod wpływem tych sił poruszać się nie może. Przez analogję twierdzimy, że i bryła, wycięta ze strumienia indukcji magnetycznej powinna wytwarzać zespół sił, znajdujących się w równowadze. Przyjmując, że tu mogą być tylko siły prostopadłe do ścian bryły, łatwo zauważymy, że siły, działające na ściany $abfe$ i $dcgh$, nie dadzą składowych, które mogłyby zrównoważyć się różnicą sił $F_1 - F_2$. Składową, równoważącą tę różnicę, otrzymamy od sił, działających na ściany $bcfg$ i $adhe$, jeżeli założymy, że na te ściany działają ciśnienia, skierowane na zewnątrz. Oznaczamy te ciśnienia przez f . Następnie, przez a oznaczamy wymiar bc bryły, przez dl — wymiar $bf = mn$, przyjmując, że jest on nieskończenie mały, a przez α kąt pomiędzy kierunkiem mn i AB . Wtedy siłę, działającą na każdą z dwóch ścian $bcfg$ i $adhe$ wyrazimy za pomocą wzoru:

$$dF = f \cdot a \cdot dl.$$

¹⁾ Na podstawie twierdzeń geometrycznych łatwo spostrzedz, że rzuty ścian $abcd$ i $fghe$ mają się do siebie, jak pola tych ścian.

Siły F_1 , F_2 i dwie siły dF są w równowadze, więc algebraiczna suma ich rzutów na kierunek AB równa się zeru:

$$F_1 - F_2 - 2 dF \cdot \sin \alpha = 0.$$

Podstawiając odpowiednie wartości, otrzymamy:

$$\frac{B_1^2 \cdot S_1}{8 \pi \cdot \mu} \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right) - 2 f_{adl} \cdot \sin \alpha = 0.$$

Z rysunku widzimy, że:

$$S_2 - S_1 = 2 adl \cdot \sin \alpha.$$

Po podstawieniu tego wyrazu w powyższe równanie, otrzymamy:

$$\frac{B_1^2 \cdot S_1}{8 \pi \cdot \mu} \cdot \frac{2 adl \cdot \sin \alpha}{S_2} - 2 f_{adl} \cdot \sin \alpha = 0.$$

stąd:

$$f = \frac{B_1^2 \cdot S_1}{8 \pi \cdot \mu \cdot S_2} = \frac{B_1^2 \cdot S_1}{8 \pi \cdot \mu \cdot (S_1 + 2 adl \cdot \sin \alpha)}.$$

Przyjmując pod uwagę, że $2 adl \cdot \sin \alpha$ jest wielkością nieskończenie małą, która znika wobec wielkości S_1 , będziemy mieli:

$$f = \frac{B^2}{8 \pi \cdot \mu}.$$

Wzór ten wyraża ciśnienia, w strumieniu magnetycznym, skierowane wpoprzek linii. Strumień magnetyczny rozpręża się w tym kierunku.

Uwzględniając własności strumienia magnetycznego, polegające na kurczeniu się wzdłuż linii i na rozprężaniu się wpoprzek linii, można z łatwością wyznaczyć kierunek ruchu przewodników z prądem i różnych magnesujących się ciał, umieszczonych w polu magnetycznym, o ile zdołamy dokładnie przewidzieć układ linii indukcji pola.

5. Wzory praktyczne dla obliczenia siły przyciągającej kotwicę elektromagnesu. W praktyce siłę przyciągającą elektromagnesu obliczamy zazwyczaj w kilogramach. Z tego więc względu wzór na siłę F przybiera postać:

$$F = \frac{B^2}{8\pi} \cdot S \text{ dyn} = \frac{1}{981000} \cdot \frac{B^2}{8\pi} \cdot S \quad \text{kilogramów.}$$

Po przekształceniu współczynnika liczbowego, wypada:

$$F = 4,05 \left(\frac{B}{10000} \right)^2 \cdot S \quad \text{kilogramów.}$$

B — gęstość linii magnetycznych w szczelinie powietrznej.

S — przekrój podwójny strumienia magnetycznego o ile przyciąganie mamy na dwóch biegunach w cm^2 .

Gdy prąd elektryczny zasilający elektromagnes jest zmienny a przez to i gęstość linii jest zmienna, to oczywiście i siła przyciągania będzie się zmieniać odpowiednio do zmienności czynnika B^2 . Jeżeli prąd dostarczają zwykle prądnice prądu zmiennego, to można przyjąć, że strumień magnetyczny w elektromagnesie zmienia się w czasie według sinusoidy:

$$B_t = B_m \sin \omega t.$$

Wtedy siłą elektromagnesu mającą znaczenie w praktyce jest siła średnia obliczona za okres zmienności prądu. Według poprzednich wzorów siła ta będzie:

$$F_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T F_t dt = \frac{4,06 \cdot S}{10^8} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T B_t^2 dt.$$

Według wywodów na str. 11.

$$\frac{1}{T} \int_0^T B_t^2 dt = \frac{B_m^2}{2},$$

więc:

$$F_{sr} = 2,03 \left(\frac{B_m}{10000} \right)^2 \cdot S \quad \text{kilogramów.}$$