

jako nieskończona suma funkcji harmoniczných o postaci $g(\tilde{x})\exp(2\pi i\tilde{x}x)d\tilde{x}$, gdzie $g(\tilde{x})$ jest gęstością amplitudy w przedziale $d\tilde{x}$.

Wyrażenie $g(\tilde{x})d\tilde{x}$ jest amplitudą funkcji. Zgodnie z zależnością (8.9) wielkości $g(\tilde{x})d\tilde{x}$ odpowiada współczynnik c_m . Gęstość amplitudy $g(\tilde{x})$ wyznaczana jest z wyrażenia (8.12a) za pomocą funkcji $G(x)$.

Przekształcenie *Fouriera* można uogólnić na dwie zmienne pisząc przez analogię do wyrażenia (8.12)

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) \exp[-2\pi i(x\tilde{x} + y\tilde{y})] dx dy \quad (8.13a)$$

$$G(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{x}, \tilde{y}) \exp[2\pi i(x\tilde{x} + y\tilde{y})] d\tilde{x} d\tilde{y} \quad (8.13b)$$

Zależności (8.12a) i (8.13a) nazywane są *prostym przekształceniem Fouriera* i oznaczane w skrócie przez $g = F[G]$, natomiast (8.12b) i (8.13b) *odwrotnym przekształceniem* i wtedy $G = F^*[g]$. Mówi się, że funkcja g jest *transformatą (widmem, obrazem) funkcji G* .

Pojęcie widma wiąże się bezpośrednio z analizą harmoniczną, na podstawie której zostało wprowadzone przekształcenie *Fouriera*. Natomiast jak wynika z rozważań p. 3.3, rozkład amplitud i faz w obrazie punktu wyraża się również za pomocą przekształcenia *Fouriera* funkcji źrenicy. Wtedy \tilde{x} pełni rolę współrzędnej płaszczyzny obrazu, natomiast x współrzędnej źrenicy układu. Stąd funkcja g nosi nazwę *obrazu*.

Z uwagi na symetrię zależności (8.12) można również uważać, że funkcja $g(\tilde{x})$ przedstawiona jest jako nieskończona suma harmoniczných o postaci $G(x)\exp(-2\pi i\tilde{x}x)dx$, przy czym gęstość amplitudy $G(x)$ dla częstotliwości x , nazywana wtedy *widmem funkcji $g(\tilde{x})$* wyznaczona byłaby z zależności (8.12b). Odwrócenie roli funkcji G i g można również zastosować i dla dwóch zmienných.

8.2. Przykłady przekształcenia Fouriera

1. Funkcja prostokątna $\Pi(x)$ (rys. 8.5a)

$$\text{Niech } G(x) = A \quad \text{dla } |x| < \frac{s}{2}$$

$$G(x) = 0 \quad |x| > \frac{s}{2}$$

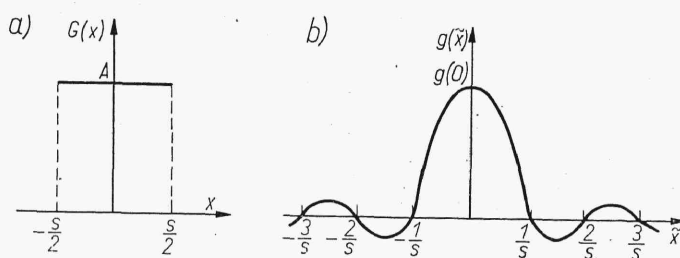
Transformatą takiej funkcji zgodnie z zależnością (8.12a) jest

$$g(x) = F[G(x)] = A \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \exp(-2\pi i\tilde{x}x) d\tilde{x} = A s \operatorname{sinc} \pi \tilde{x}s$$

Ponieważ $g(0) = As$, to

$$g(\tilde{x}) = g(0) \operatorname{sinc} \pi \tilde{x}s \quad (8.14)$$

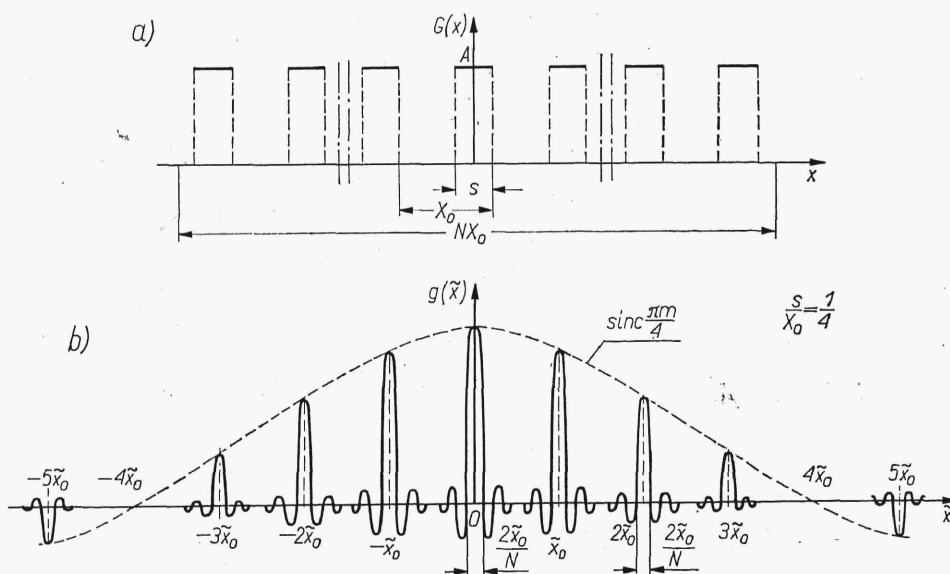
Transformata $g(\tilde{x})$ pokazana jest na rys. 8.5b. Wartości funkcji $\operatorname{sinc} x$, a także $\operatorname{sinc}^2 x$, dla różnych wartości x przytoczone są w tabl. 8.1. Obie funkcje odgrywają ważną rolę w optyce falowej.



Rys. 8.5

Tablica 8.1. Wartości funkcji $\text{sinc } x$ i $\text{sinc}^2 x$

x	$\text{sinc } x$	$\text{sinc}^2 x$	$\text{sinc}(x+\pi)$	$\text{sinc}^2(x+\pi)$	$\text{sinc}(x+2\pi)$	$\text{sinc}^2(x+2\pi)$
0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\frac{\pi}{4}$	0,9003	0,8105	-0,1801	0,0324	0,1001	0,0100
$\frac{\pi}{2}$	0,6366	0,4053	-0,2122	0,0450	0,1274	0,0162
$\frac{3\pi}{4}$	0,3001	0,0901	-0,1286	0,0165	0,0819	0,0067



Rys. 8.6

2. *Funkcja prostokątna periodyczna o ograniczonej długości* (rys. 8.6a).
Zgodnie z rozwinięciem (8.10) periodycznej funkcji prostokątnej w szeregu *Fouriera* można napisać

$$G(x) = G_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\pi m \frac{s}{X_0}\right) \exp(2\pi i m \tilde{x}_0 x) \quad \text{dla } |x| < \frac{NX_0}{2}$$

$$G(x) = 0 \quad |x| > \frac{NX_0}{2}$$

gdzie NX_0 jest przedziałem x , dla którego funkcja $G(x)$ ma wartości niezerowe.

Wtedy z zależności (8.12a)

$$g(x) = G_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\pi m \frac{s}{X_0}\right) \int_{-\frac{NX_0}{2}}^{\frac{NX_0}{2}} \exp[-2\pi i (\tilde{x} - m\tilde{x}_0)x] dx$$

i po rozwiązaniu

$$g(\tilde{x}) = g(0) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\pi m \frac{s}{X_0}\right) \operatorname{sinc}\left[\pi N\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}_0} - m\right)\right] \quad (8.15)$$

gdzie dla N całkowitego $g(0) = G_0 NX_0$ ponieważ $\operatorname{sinc}(\pm \pi Nm) = 0$ dla $m \neq 0$. Dla N dostatecznie dużego znaczące wartości funkcji $\operatorname{sinc}[\pi N(\tilde{x}/\tilde{x}_0 - m)]$ zachodzą wokół częstości $\tilde{x} = m\tilde{x}_0$. Rys. 8.6b przedstawia transformatę dla $s/X_0 = 1/4$.

Szerokość głównych maksimów wynosi $2\tilde{x}_0/N$. Wraz ze wzrostem N w granicy powstałby rozkład dyskretny otrzymany za pomocą szeregu *Fouriera* (rys. 8.4b).

3. *Funkcja harmoniczna w postaci zespolonej o ograniczonej długości*

$$G(x) = G_0 \exp(-2\pi i \tilde{x}_0 x) \quad \text{dla } |x| < x_0$$

$$G(x) = 0 \quad \text{dla } |x| > x_0$$

wtedy

$$g(\tilde{x}) = g(\tilde{x}_0) \operatorname{sinc}[2\pi(\tilde{x} - \tilde{x}_0)x_0] \quad (8.16)$$

gdzie $g(\tilde{x}_0) = 2G_0 x_0$.

4. *Funkcja harmoniczna parzysta o ograniczonej długości* (rys. 8.7a)

$$G(x) = a + b \cos 2\pi \tilde{x}_0 x \quad \text{dla } |x| < x_0$$

$$G(x) = 0 \quad |x| > x_0$$

Funkcję $G(x)$ można przedstawić jako sumę trzech funkcji

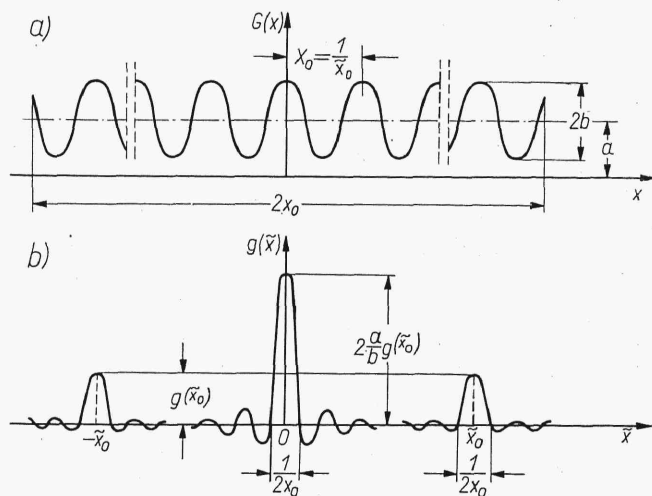
$$G(x) = a \exp[-2\pi i (\tilde{x}=0)x] + \frac{b}{2} \exp[-2\pi i \tilde{x}_0 x] + \frac{b}{2} \exp[2\pi i \tilde{x}_0 x]$$

Zgodnie z wyrażeniem (8.16)

$$g(\tilde{x}) = 2ax_0 \operatorname{sinc} 2\pi \tilde{x}_0 x_0 + bx_0 \operatorname{sinc}[2\pi(\tilde{x} - \tilde{x}_0)x_0] + bx_0 \operatorname{sinc}[2\pi(\tilde{x} + \tilde{x}_0)x_0]$$

Jeżeli $\tilde{x}_0 x_0 \gg 1$, to znaczy, jeżeli funkcja $\cos 2\pi \tilde{x}_0 x$ ma wartości niezerowe w przedziale nieporównalnie większym od jej okresu, wówczas

$$g(\tilde{x}_0) = g(-\tilde{x}_0) \approx bx_0$$

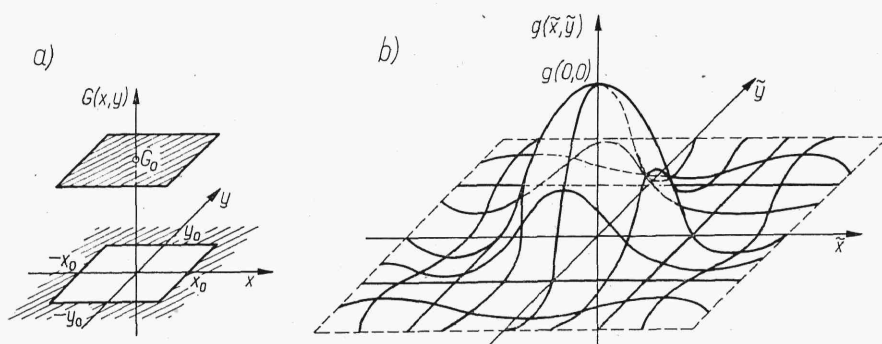


Rys. 8.7

i wtedy

$$g(\tilde{x}) = g(\tilde{x}_0) \left\{ 2 \frac{a}{b} \operatorname{sinc} 2\pi \tilde{x} x_0 + \operatorname{sinc} [2\pi (\tilde{x} - \tilde{x}_0) x_0] + \operatorname{sinc} [2\pi (\tilde{x} + \tilde{x}_0) x_0] \right\} \quad (8.17)$$

Wykres funkcji $g(\tilde{x})$ pokazany jest na rys. 8.7b.



Rys. 8.8

5. Niech $G(x, y) = G_0$ w obszarze prostokąta (rys. 8.8a) dla $|x| < x_0$ i $|y| < y_0$

$$G(x, y) = 0 \quad \text{dla } |x| > x_0 \text{ lub } |y| > y_0$$

Transformatą tej funkcji zgodnie z wyrażeniem (8.13a) będzie

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) = G_0 \int_{-x_0}^{x_0} \exp(-2\pi i \tilde{x} x) dx \int_{-y_0}^{y_0} \exp(-2\pi i \tilde{y} y) dy$$

i ostatecznie

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) = g(0, 0) \operatorname{sinc}(2\pi x_0 \tilde{x}) \operatorname{sinc}(2\pi y_0 \tilde{y}) \quad (8.18)$$

gdzie $g(0, 0) = 4x_0y_0G_0$.

Funkcja $g(\tilde{x}, \tilde{y})$ pokazana jest na rys. 8.8b. Kształt jej wynika z mnożenia wartości dwóch funkcji o postaci pokazanej na rys. 8.5b.

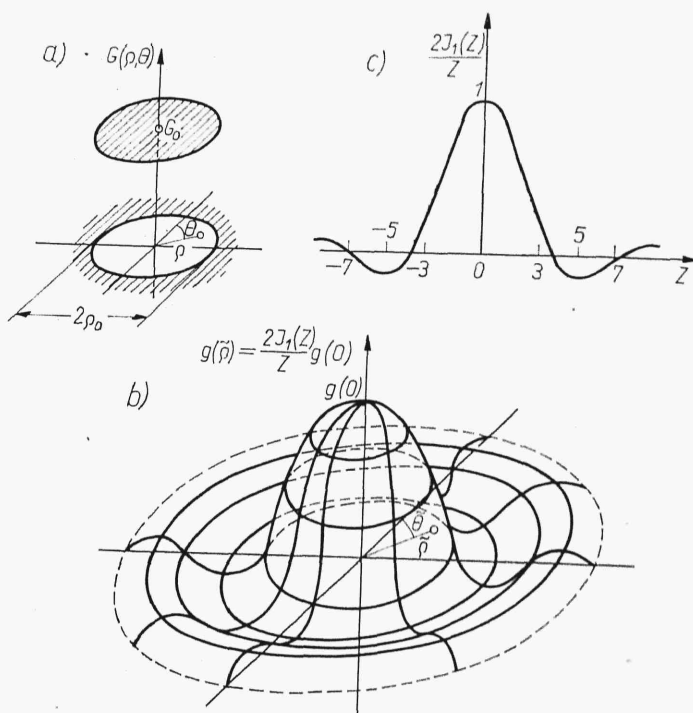
6. Jeżeli funkcja oryginalna ma obrotową oś symetrii, wówczas wygodnie jest wprowadzić współrzędne biegunowe przez

$$x = \varrho \sin \Theta \quad y = \varrho \cos \Theta$$

$$\tilde{x} = \tilde{\varrho} \sin \tilde{\Theta} \quad \tilde{y} = \tilde{\varrho} \cos \tilde{\Theta}$$

i wtedy, ponieważ $G(\varrho, \Theta) = G(\varrho)$ zależność (8.13a) można przepisać w postaci

$$g(\tilde{\varrho}, \tilde{\Theta}) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} G(\varrho) \exp[-2\pi i \tilde{\varrho} \varrho \cos(\Theta - \tilde{\Theta})] \varrho d\varrho d\Theta$$



Rys. 8.9

Oznaczając $\Theta - \tilde{\Theta} = \kappa$

$$g(\tilde{\varrho}) = \int_0^\infty G(\varrho) \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} \exp(-2\pi i \tilde{\varrho} \varrho \cos \kappa) d\kappa$$

Z własności funkcji Bessela

$$\int_0^{2\pi} \exp[-2\pi i \tilde{\varrho} \varrho \cos \kappa] d\kappa = 2\pi J_0(2\pi \tilde{\varrho} \varrho)$$

gdzie $J_0(x)$ funkcja Bessela rzędu zerowego
a więc

$$g(\tilde{\varrho}) = 2\pi \int_0^{\infty} G(\varrho) J_0(2\pi \tilde{\varrho} \varrho) \varrho d\varrho \quad (8.19)$$

Dla funkcji mającej wartości stałe i niezerowe w obszarze koła (rys. 8.9a), tzn.

$$G(\varrho) = G_0 \quad \text{dla } \varrho < \varrho_0$$

$$G(\varrho) = 0 \quad \text{dla } \varrho > \varrho_0$$

ponieważ z własności funkcji Bessela jest spełnione

$$\int_0^x x' J_0(x') dx' = x J_1(x)$$

gdzie $J_1(x)$ funkcja Bessela rzędu pierwszego, to z wyrażenia (8.19)

$$g(\tilde{\varrho}) = g(0) \frac{2J_1(Z)}{Z} \quad (8.20)$$

przy czym

$$Z = 2\pi \tilde{\varrho} \varrho_0 \quad (8.21)$$

$$g(0) = G_0 \pi \varrho_0^2 \quad \text{ponieważ} \quad \lim_{Z \rightarrow 0} \frac{J_1(Z)}{Z} = \frac{1}{2}$$

Wartości $J_1(Z)$ można odczytać z tablic funkcji Bessela [3], [4]. Niektóre wartości $2J_1(Z)/Z$, a także $[2J_1(Z)/Z]^2$ dla różnych Z przytoczone są w tabl. 8.2. Wykres funkcji $2J_1(Z)/Z$ pokazany jest na rysunku 8.9c.

Tablica 8.2. Wartości funkcji

$$\frac{2J_1(Z)}{Z} \quad \text{oraz} \quad \left[\frac{2J_1(Z)}{Z} \right]^2$$

Z	$\frac{2J_1(Z)}{Z}$	$\left[\frac{2J_1(Z)}{Z} \right]^2$
0	1,0	1,0
1,0	0,8801	0,7746
2,0	0,5767	0,3326
3,0	0,2260	0,0511
3,832	0,0	0,0
4,0	-0,0330	0,0011
5,0	-0,1310	0,0172
6,0	-0,0922	0,0085
7,0	-0,0013	0,0000
8,0	0,0587	0,0034
9,0	0,0545	0,0030
10,0	0,0087	0,0001

Transformata $g(\tilde{\varrho})$ funkcji stałej w obszarze koła uzyskuje się przez obrót funkcji $2J_1(Z)/Z$ wokół osi $Z = 0$ i jej kształt w pobliżu głównego maksimum przedstawiony jest na rys. 8.9b.

8.3. Niektóre własności przekształcenia Fouriera

Dla prostoty zostaną one wyprowadzone tylko dla jednej zmiennej. W analogiczny sposób można udowodnić te same własności dla dwóch zmiennych.

8.3.1. Własność przesunięcia funkcji

Jeżeli $F[G(x)] = g(\tilde{x})$, to

$$F[G(x-x')] = g(\tilde{x}) \exp(-2\pi i \tilde{x} x') \quad (8.22)$$

gdzie x' jest stałą.

Z definicji przekształcenia Fouriera

$$\begin{aligned} F[G(x-x')] &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x') \exp(-2\pi i \tilde{x} x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x'') \exp(-2\pi i \tilde{x} (x' + x'')) dx'' \end{aligned}$$

gdzie $x - x' = x''$.

Ponieważ x' jest stałe, to

$$\begin{aligned} F[G(x-x')] &= \exp(-2\pi i \tilde{x} x') \int_{-\infty}^{\infty} G(x'') \exp(-2\pi i \tilde{x} x'') dx'' = \\ &= \exp(-2\pi i \tilde{x} x') g(\tilde{x}) \end{aligned}$$

8.3.2. Przekształcenie Fouriera spłotu dwóch funkcji

Splotem dwóch funkcji $G(x)$ i $H(x)$ nazywane jest z definicji wyrażenie

$$I(x') = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) H(x' - x) dx \quad (8.23)$$

symbolicznie oznaczane przez $I = G \otimes H$, x' — parametr.

Zostanie udowodnione, że przekształcenie Fouriera spłotu dwóch funkcji równe jest iloczynowi przekształceń Fouriera tych funkcji. Oznacza to, że jeżeli

$$F[I(x')] = i(\tilde{x}), \quad F[G(x)] = g(\tilde{x}) \quad \text{ i } \quad F[H(x)] = h(\tilde{x})$$

oraz $I = G \otimes H$, to

$$i(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) h(\tilde{x}) \quad (8.24a)$$

W celu udowodnienia z definicji przekształcenia Fouriera oraz dla wyrażenia (8.23) będzie

$$\begin{aligned} i(\tilde{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} I(x') \exp(-2\pi i \tilde{x} x') dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} H(x' - x) \exp(-2\pi i \tilde{x} x') dx' \end{aligned}$$