

zem dowolnej figury geometrycznej będzie wówczas figura o tym samym kształcie tylko $|\beta|$ -krotnie powiększona. Przekształcenie takich płaszczyzn polega więc na zmianie skali rozpatrywanej figury.

Przy rozpatrywaniu przedmiotów trójwymiarowych warunkiem podobieństwa obrazu i przedmiotu jest jednakowa skala odwzorowania w kierunku prostopadłym i wzdłuż osi optycznej, to znaczy $|\beta| = |\alpha|$. Zgodnie z (2.14c) musi być wtedy spełnione $\gamma = \pm 1$. Dla układu ogniskującego powiększenia są funkcją położenia przedmiotu i układ taki jest tylko lokalnie idealny, a mianowicie nieskończenie blisko płaszczyzn, dla których $\gamma = 1$ i $\gamma = -1$. Przedmiot trójwymiarowy o skończonych wymiarach jest przekształcany przez układ ogniskujący z deformacją i obraz tego przedmiotu nie jest nigdy podobny do przedmiotu.

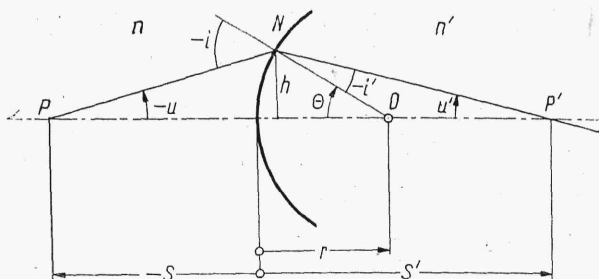
Natomiast układem idealnym może być układ bezogniskowy ponieważ dla niego powiększenia są niezależne od położenia przedmiotu. Wtedy zgodnie z (2.24) musi być spełnione $f_1 = \pm f_2$, a więc i $|\alpha| = |\beta| = f_2/f_1$. Warunki te nie są jednak interesujące dla praktyki, ponieważ jak to wynika z rozważań następnego podrozdziału, dla układów rzeczywistych, znajdujących się w tym samym ośrodku musi być $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$. Obraz będzie więc dokładnie taki sam jak przedmiot.

2.3. Układy rzeczywiste

2.3.1. Powierzchnia sferyczna jako układ optyczny

Przy omawianiu właściwości układów optycznych doskonałych pominięto całkowicie budowę układu optycznego, ponieważ do opisanego praw przekształcenia przestrzeni przedmiotowej w obrazową wystarczyło przyjęcie z definicji przekształcenia punktowego. Zostanie rozważone, czy wymienione założenie było usprawiedliwione i czy właściwości układów optycznych, składających się w omawianym przypadku z pewnej skończonej liczby powierzchni o skokowej zmianie współczynnika załamania, dają się ująć prawami wyprowadzonymi dla układów doskonałych.

W tym celu zostanie rozpatrzony najpierw elementarny układ optyczny, technologicznie najprostszy, jakim jest pojedyncza powierzchnia sferyczna o promieniu r dzieląca dwa ośrodki o współczynnikach załamania



Rys. 2.16

n i n' (rys. 2.16). Reguły odwzorowania takiej powierzchni można rozpatrywać tylko w jednej płaszczyźnie, ponieważ dla danego źródła światła P prostą łączącą P ze środkiem krzywizny O sfery można uważać za obrotową oś symetrii układu.

Niech PNP' będzie jednym z promieni świetlnych wychodzących ze źródła P . Kąt padania i oraz kąt załamania i' utworzone między normalną ON i promieniem na rysunku uważane są za ujemne, gdyż podobnie jak było na rys. 2.8 z kątami u , tu w celu pokrycia normalnej z promieniem, należy obrócić ją przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Dla odróżnienia dwóch możliwych położenia sfery o danym promieniu r przyjmuje się następującą regułę: promień sfery jest to odcinek skierowany mierzony od czoła sfery do środka krzywizny; jeżeli zwrot odcinka jest zgodny z kierunkiem rozchodzenia się światła, promień uważa się za dodatni, jeżeli przeciwny — za ujemny. Jako współrzędne charakteryzujące położenie promienia świetlnego w przestrzeni przedmiotowej przyjmuje się odległość S punktu przecięcia promienia z osią od powierzchni sferycznej mierzoną po osi optycznej i kąt u , jaki tworzy promień świetlny z osią układu. W przestrzeni obrazowej przez analogię współrzędnymi będą S' i u' . Dla danego promienia w przestrzeni przedmiotowej wyznaczenie położenia promienia w przestrzeni obrazowej sprowadza się do znalezienia S' i u' w funkcji S i u i parametrów układu. Z rysunku dla trójkątów PNO i $F'ON$ można napisać

$$\sin i = \frac{r-S}{r} \sin u \quad (2.25a)$$

$$\sin i' = \frac{r-S'}{r} \sin u' \quad (2.25b)$$

$$u' = u + i' - i \quad (2.25c)$$

z prawa załamania

$$n' \sin i' = n \sin i \quad (2.25d)$$

oraz dodatkowo dla wysokości h przecięcia się promienia z powierzchnią sferyczną

$$h = r \sin \theta = r \sin(u-i) = r \sin(u'-i') \quad (2.25e)$$

Zależności (2.25a-d) wystarczają do wyznaczenia przebiegu promienia przez jedną powierzchnię sferyczną, dzielącą ośrodki o różnych n . Dla danego układu (znane r , n , n') i ustalonego biegu promienia w przestrzeni przedmiotowej (zadane S i u) ze wzoru (2.25a) można obliczyć kąt i , z (2.25d) — kąt i' , z (2.25c) — kąt u' i ostatecznie z (2.25b) — odległość S' .

Należy teraz rozstrzygnąć, czy promienie wychodzące z punktu P będą się przecinały w jednym punkcie przestrzeni obrazowej (odwzorowanie stygmatyczne), tzn. czy położenie punktu P' będzie niezależne od kąta u .

Z równań (2.25abd)

$$r-S' = r \frac{\sin i'}{\sin u'} = \frac{rn}{n'} \frac{\sin i}{\sin u'} = (r-S) \frac{n}{n'} \frac{\sin u}{\sin u'}$$

Aby S' było niezależne od kąta u , musi być zachowany warunek

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \text{const} \quad (2.26)$$

Warunek ten może być spełniony tylko w następujących trzech przypadkach:

1) $u = u'$. Wtedy, ponieważ $n \neq n'$, z wzorów (2.25cd) wynika $i' = i = 0$, a więc $S = S' = r$ (rys. 2.17a).

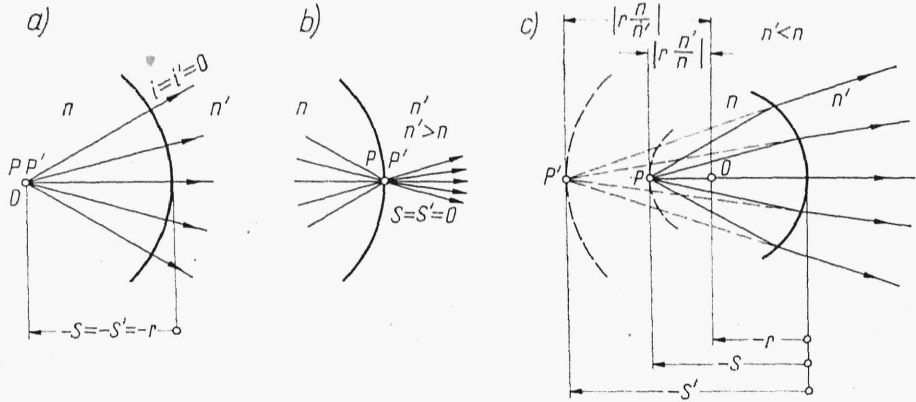
2) $\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n} = \frac{\sin i}{\sin i'}$ skąd $u = i$ i $u' = i'$

a więc zgodnie z (2.25ab) $S = 0$ i $S' = 0$ (rys. 2.17b). Nie może być $u = -i$ oraz $u' = -i'$ gdyż według (2.25c) mamy $i = i'$ a z (2.25d) (ponieważ $n' \neq n$) $i = i' = 0$, a więc $u = u' = 0$.

$$3) \frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n}{n'} = \frac{\sin i'}{\sin i} \quad \text{skąd} \quad u = -i', \quad u' = -i$$

i według (2.25ad)

$$S = r \left(1 - \frac{\sin i}{\sin u} \right) = r \left(1 + \frac{\sin i}{\sin i'} \right) = r \left(1 + \frac{n'}{n} \right).$$



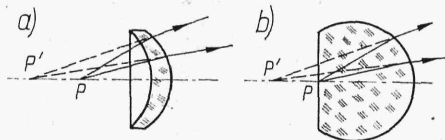
Rys. 2.17

Analogicznie można znaleźć S' i łącznie (rys. 2.17c)

$$S = r \frac{n+n'}{n} \quad S' = r \frac{n+n'}{n'} \quad (2.27a, b)$$

A więc dla powierzchni sferycznej załamującej zostaną stygmatycznie odwzorowane tylko: środek sfery (obrazem jest również środek sfery), punkty leżące na powierzchni sferycznej załamującej (obrazem są te same punkty) i wreszcie punkty, zgodnie z równaniami (2.27), leżące na sferze o promieniu $S - r = r n'/n$, przy czym ich obrazy leżą na sferze o promieniu $S - r = n/n'r$.

Przypadki te odgrywają ważną rolę w konstrukcji układów optycznych, gdyż można tworzyć z ich kombinacji soczewki, które dla określonej długości fali (danego współczynnika załamania) dają obrazy niektórych punktów bez zniekształcenia. Przykładowo na rysunku 2.18 pokazano so-



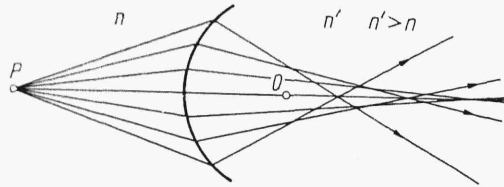
Rys. 2.18

czewki, dla których przedmiot P znajduje się w środku lub na powierzchni pierwszej sfery, a kształt drugiej dobrany jest zgodnie z równaniami (2.27). Soczewki takie są stosowane przede wszystkim w obiektywach i kondensorach mikroskopowych.

Nie można niestety z takich soczewek zbudować układów, które dawałyby rzeczywiste obrazy rzeczywistych przedmiotów. Pomijając najmniej interesujący przypadek drugi, dla środka sfery otrzymuje się $S'/S = 1 > 0$, natomiast dla równań (2.27) $S'/S = n/n' > 0$. Oznacza to, że przedmiot i obraz leżą po tej samej stronie sfery. Jeżeli więc przedmiot jest rzeczywisty, to obraz jest pozorny, jeżeli zaś obraz jest rzeczywisty, to przedmiot musi być pozorny.

Układy, dla których zachowane jest dla danego punktowego przedmiotu na osi przekształcenie punktowe i spełniony jest warunek (2.26) (tzw. *warunek sinusów*) nazywają się *układami apłanatycznymi*. Stąd wyżej wymienione punkty noszą nazwę *punktów apłanatycznych sfery*, a soczewki zbudowane z wykorzystaniem właściwości tych punktów — *soczewkami apłanatycznymi*.

Przedmioty leżące poza punktami apłanatycznymi nie będą odwzorowane stygmatycznie. Promienie wychodzące z punktowego źródła światła nie przetną się w przestrzeni obrazowej w jednym punkcie (rys. 2.19). Mówi się wtedy o *aberracjach powierzchni sferycznej*.



Rys. 2.19

Wyznaczyć je można na drodze obliczeń za pomocą wzorów (2.25) ustalających przejście promienia przez jedną sferę. Dla układu złożonego z pewnej liczby powierzchni można ocenić rodzaj odwzorowania i wielkość aberracji w przestrzeni obrazowej całego układu wyznaczając kolejno przebieg promieni przez każdą powierzchnię. Taka metoda jednak, pomijając to, że jest niezwykle żmudna, nie pozwala na scharakteryzowanie ogólnych własności układu oraz nie daje żadnych wskazówek co do jego konstrukcji. Z tego powodu zagadnienie odwzorowania przez układ optyczny rozważane jest etapami.

Ponieważ $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! + \dots$ oraz $\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + 2x^5/15 + \dots$ to można najpierw rozpatrywać właściwości sfery i układów sfer dla obszaru, dla którego można przyjąć $\operatorname{tg} x \approx \sin x \approx x$. To przybliżenie jest słuszne dla małych kątów i, i', u, u' , a więc dla przestrzeni znajdującej się bezpośrednio przy osi PO (rys. 2.16). Przestrzeń ta nazywa się dlatego *przestrzenią przyosiową* lub *przestrzenią Gaussa*, od nazwiska matematyka, który pierwszy podał jej teorię. Okazuje się, że w przestrzeni tej spełnione są warunki przekształceń układów doskonałych i będzie można przenieść do niej prawa i zależności wyprowadzone w p. 2.2. Różnice odwzorowań w stosunku do przekształcenia w przestrzeni przyosiowej, a więc uwzględniające człony rozwinięcia sinusa z trzecią, piątą itp. potęgą funkcji kątowych opisują aberracje układu optycznego. Jeżeli zestawionych będzie razem kilka sfer, to każda z nich, z uwagi na różne kąty padania na te powierzchnie, w różny sposób będzie wpływała na aberracje

układu. Zadaniem konstruktora jest takie zestawienie elementów, aby aberracje kompensowały się nawzajem do wartości, która nie będzie miała wpływu na informacje przekazane przez układ. Aberracje układów optycznych będą omówione w p. 2.6.

2.3.2. Przestrzeń przesiowa powierzchni sferycznej

Oznaczając dla małych kątów współrzędną S przez s można przepisać zależności (2.25) w postaci

$$i = \frac{r-s}{r} u \quad (2.28a)$$

$$i' = \frac{r-s'}{r} u' \quad (2.28b)$$

$$u' = u + i' - i \quad (2.28c)$$

$$n'i' = ni \quad (2.28d)$$

$$h = r\Theta = r(u-i) = r(u'-i') = su = s'u' \quad (2.28e)$$

Ostatnia zależność wynika z równań (2.28a, b).

Dla równań (2.28a, b, c) będzie

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'u'}{r(u'-i')} - \frac{nu}{r(u-i)} = \frac{n'u' - nu}{r(u-i)} = \frac{n'(u-i) + n'i' - nu}{r(u-i)}$$

I ostatecznie uwzględniając wzór (2.28d)

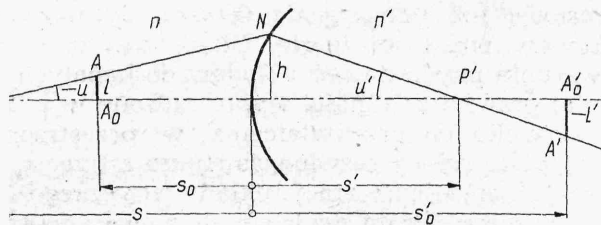
$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \quad (2.29)$$

Zależność tę można przepisać w postaci niezmiennika dla powierzchni załamujących

$$n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right) = n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = Q \quad (2.30)$$

Q nosi nazwę *niezmiennika Abbego*.

Zależność (2.29) lub (2.30) daje regułę przekształcenia osi przedmiotów na oś obrazów. Dla danej powierzchni sferycznej jako układu (znane r , n , n') promienie świetlne wychodzące pod małym kątem do osi z punktu przestrzeni przedmiotowej w dowolnej odległości s od powierzchni sferycznej zostaną przez tę powierzchnię skupione na osi w odległości s' wyznaczonej wspomnianymi wzorami.



Rys. 2.20