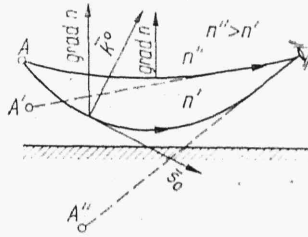


a więc i dostatecznie dużych wartościach $\text{grad } n$, mogą trafić również do oka, dając drugi obraz A'' punktu A' . Powstaje wtedy wrażenie pozornego odbicia obrazu od ziemi.



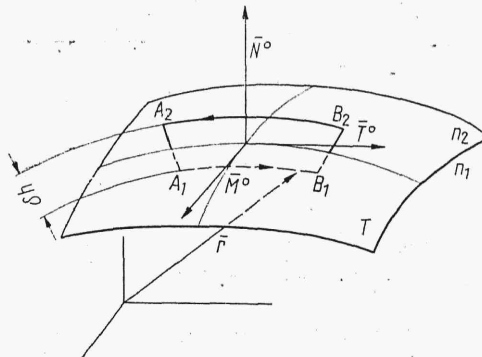
Rys. 1.10

Zjawisko miraży spowodowane jest odwrotnym rozkładem temperatur powietrza i polega na obserwowaniu przedmiotów znajdujących się poza horyzontem.

1.4.5. Prawo załamania i odbicia

Równanie (1.35) opisuje rozchodzenie się promieni w ośrodku niejednorodnym, przy założeniu ciągłej zmiany współczynnika załamania. W praktyce przy konstrukcji przyrządów optycznych wykorzystuje się przede wszystkim powierzchnie o skokowej zmianie współczynnika załamania, tworzące układy soczewek i pryzmatów znajdujących się w ośrodku o mniejszym współczynniku załamania (np. w powietrzu). W związku z tym wyprowadzone zostanie teraz prawo określające przejście promienia świetlnego z ośrodka jednorodnego o bezwzględnym współczynniku załamania n_1 do ośrodka również jednorodnego, ale o współczynniku załamania n_2 .

Niech będzie dowolna powierzchnia ciągła T (rys. 1.11) dzieląca obydwie ośrodki. Utwórzmy na tej powierzchni cienką warstwę o grubości



Rys. 1.11

δh , dla której w kierunku normalnym do powierzchni T występuje ciągła zmiana współczynnika załamania od n_1 do n_2 . Niech $A_1B_1B_2A_2$ będzie płaskim elementem powierzchni z bokami A_1B_1 i A_2B_2 równoodległymi od T oraz B_1B_2 i A_1A_2 normalnymi do T . Jeżeli przez \bar{M}^0 oznaczony będzie wektor jednostkowy normalny do elementu powierzchni $A_1B_1B_2A_2$ oraz

przez s^0 kierunek promienia, to z twierdzenia *Stokesa* będzie

$$\oint \int \text{rot}(ns^0) \cdot \bar{M}^0 dS = \oint ns^0 d\bar{r}$$

przy czym pierwsza całka wzięta jest po powierzchni wspomnianego elementu, a całka liniowa po jego obwodzie. Z tożsamości $\text{rot grad } \psi = 0$ i (1.34) wynika $\text{rot}(ns^0) = 0$, a więc

$$\oint ns^0 d\bar{r} = 0 \quad (1.40)$$

Wyrażenie (1.40) jest znane pod nazwą *całkowego niezmiennika Lagrange'a*. Całkowanie przeprowadzone jest po dowolnej krzywej zamkniętej. Można udowodnić, że wzór ten jest słuszny w przypadku całkowania po krzywej przechodzącej przez powierzchnię o skokowej zmianie współczynnika załamania.

Rozwijając całkę (1.40) dla obwodu $A_1 B_1 B_2 A_2$ (kierunki całkowania zaznaczone strzałką) można napisać

$$\delta S_1 n_1 s_1^0 \bar{T}^0 - \delta S_2 n_2 s_2^0 \bar{T}^0 + 2 \text{ całki wzięte na odcinku } \delta h = 0$$

gdzie: δS_1 i δS_2 długości łuków odpowiednio: $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$, s_1^0 i s_2^0 — kierunki promieni świetlnych w pierwszym i drugim ośrodku, \bar{T}^0 — wektor styczny do powierzchni T , przy czym $\bar{T}^0 = \bar{N}^0 \times \bar{M}^0$.

Przechodząc do granicznego przypadku $\delta h \rightarrow 0$, ponieważ wtedy $\delta S_1 \rightarrow \delta S_2$, oraz korzystając z własności iloczynu mieszanego pozostanie

$$\bar{M}^0 [n_1 s_1^0 \times \bar{N}^0 - n_2 s_2^0 \times \bar{N}^0] = 0$$

Zorientowanie elementu powierzchni $A_1 B_1 B_2 A_2$, a więc i wektora \bar{M}^0 było dowolne, to ostatecznie prawo załamania w postaci wektorowej przyjmie postać

$$\boxed{n_1 s_1^0 \times \bar{N}^0 = n_2 s_2^0 \times \bar{N}^0} \quad (1.41)$$

Z prawa tego wynika:

1. Wektor normalny do powierzchni \bar{N}^0 , promień padający s_1^0 i załamany s_2^0 leżą w tej samej płaszczyźnie.

Istotnie, mnożąc wyrażenie (1.41) skalarnie przez s_1^0 , ponieważ $s_1^0 (s_1^0 \times \bar{N}^0) = \bar{N}^0 (s_1^0 \times s_1^0) = 0$ to $s_1^0 (s_2^0 \times \bar{N}^0) = 0$. Z własności iloczynu mieszanego wynika, że te trzy wektory muszą leżeć w jednej płaszczyźnie.

Płaszczyzna obejmująca promień padający i normalną do powierzchni nazywa się *płaszczyzną padania*, natomiast obejmująca promień załamany i normalną — *płaszczyzną załamania*. Z prawa załamania wynika, że płaszczyzna załamania dla danego promienia pokrywa się z płaszczyzną padania.

2. Oznaczając przez i_1 kąt między normalną a promieniem padającym (*kąt padania*) i przez i_2 kąt między normalną a promieniem załamanym (*kąt załamania*) (rys. 1.12) na podstawie (1.41) będzie

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad (1.42)$$

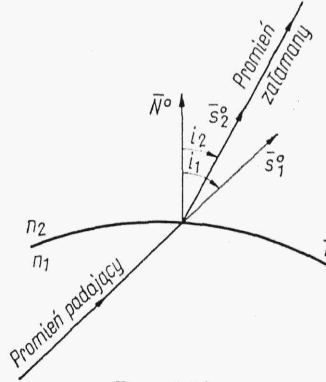
Obydwa warunki ujmują to samo *prawo załamania* zapisane krótko wzorem (1.41).

Zależność tę można przedstawić również w postaci wygodniejszej do wyznaczenia kierunku w drugim ośrodku. Mnożąc wektorowo obie strony

równania (1.41) przez \bar{N}^0 oraz uwzględniając, że $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b})$ otrzymuje się prawo załamania w następującej postaci

$$n_2 \bar{s}_2^0 = n_1 \bar{s}_1^0 + \bar{N}^0(n_2 \bar{s}_2^0 \bar{N}^0 - n_1 \bar{s}_1^0 \bar{N}^0) \quad (1.43)$$

Z rozważań p. 3.1.3 wynika, że przy przejściu przez granicę dwóch ośrodków oprócz promienia załamane go powstanie również promień od-



Rys. 1.12

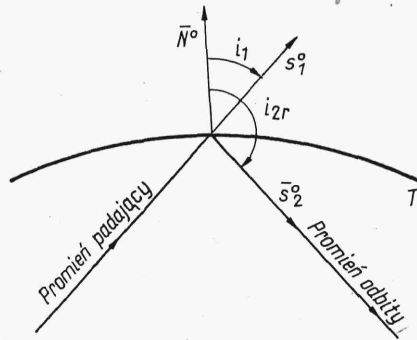
bity, dla którego spełniona jest równość $n_1 = n_2$. Zamiast wyrażeń (1.41), (1.42) i (1.43) otrzymuje się wtedy

$$\bar{s}_1^0 \times \bar{N}^0 = \bar{s}_2^0 \times \bar{N}^0 \quad (1.44)$$

$$\sin i_1 = \sin i_{2r} \quad (1.45)$$

$$\bar{s}_2^0 = \bar{s}_1^0 + \bar{N}^0(\bar{N}^0 \cdot \bar{s}_2^0 - \bar{N}^0 \cdot \bar{s}_1^0) \quad (1.46)$$

Z zależności (1.44) wynika, że promień padający \bar{s}_1^0 , normalna \bar{N}^0 i promień odbity \bar{s}_2^0 leżą w tej samej płaszczyźnie. Z (1.45), ponieważ $\pi \geq i_{2r} \geq \pi/2$, to $i_{2r} = \pi - i_1$ (rys. 1.13). Obydwa warunki wyrażają sobą prawo odbicia.



Rys. 1.13

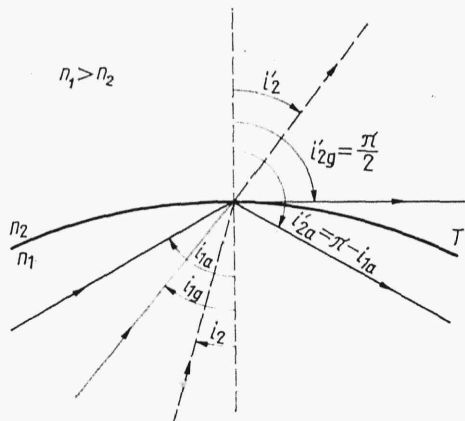
Prawa załamania i odbicia były wyprowadzone w dziedzinie optyki geometrycznej, to znaczy przy założeniu $\lambda_0 \approx 0$ i dla powierzchni ciągłych, bez precyzowania ich kształtu. Wynika stąd, że prawa te są w mocy tylko dla powierzchni, których promień krzywizny jest nieporównywalnie większy niż długość fali.

Powracając do równania (1.42), niech spełniony będzie warunek $n_1 > n_2$, to znaczy promień przechodzi z ośrodka optycznie gęstszego do optycznie rzadszego. Oznaczając $n_{12} = n_1/n_2 > 1$ będzie

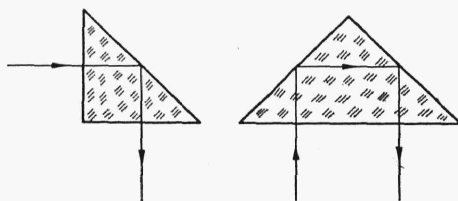
$$\sin i_2 = n_{12} \sin i_1$$

przy czym $i_2 > i_1$.

Powiększając stopniowo kąt padania i_1 dojdzie się dla $i_1 = i_{1g}$, do warunku $\sin i_2 = 1$, dla którego $\sin i_{1g} = 1/n_{12}$. Dla $i_1 > i_{1g}$ promienie świetlne pozostaną w pierwszym ośrodku, odbijając się zgodnie z prawem odbicia. Mówi się wtedy o zjawisku całkowitego odbicia. Kąt i_{1g} nazywa się *granicznym kątem padania* (rys. 1.14).



Rys. 1.14



Rys. 1.15

Zjawisko całkowitego odbicia ma duże znaczenie w budowie przyrządów optycznych. Korzysta się z niego m. in. przy konstrukcji przyrządów umożliwiających odchylenie promieni w układzie optycznym bez strat energetycznych na powierzchni odbijającej (rys. 1.15).

1.4.6. Zasada Fermata. Twierdzenie Malusa

Zasada Fermata znana jest pod nazwą *zasady najkrótszej drogi optycznej* i dlatego przed jej sformułowaniem wyprowadzona zostanie zależność pozwalająca wyznaczyć drogę optyczną L między dowolnymi punktami P_1 i P_2 .

Z definicji pochodnej kierunkowej mamy $dL/ds = s^0 \cdot \text{grad } L$, gdzie s^0 — kierunek promienia. Z uwagi na wzór (1.34)

$$\frac{dL}{ds} = n(s^0)^2 = n$$

a więc

$$L = \int_{P_1}^{P_2} n ds \quad (1.47)$$

gdzie s — długość łuku promienia.