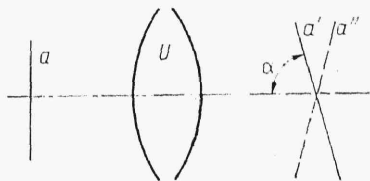
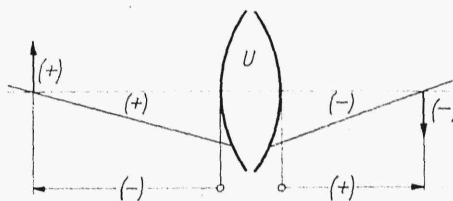


znak ujemny. Ponieważ układ ma obrotową oś symetrii, wystarczy rozważyć przekształcenia w płaszczyźnie przechodzącej przez oś optyczną (w tak zwanej *płaszczyźnie południkowej*) i rozróżnić kierunek nad osią jako dodatni i pod osią jako ujemny. Kąt ostry między prostą a osią op-



Rys. 2.7

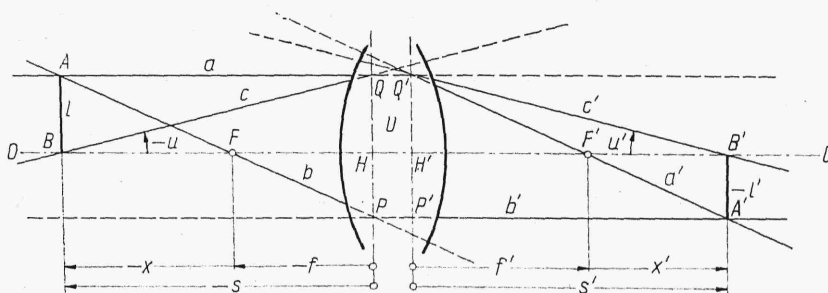


Rys. 2.8

tyczną uważa się za dodatni, jeżeli celem pokrycia osi z prostą należy obrócić oś zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Przykład znakowania odcinków i kątów podano na rys. 2.8.

2.2.1. Podstawowe definicje i zależności

Niech będzie dany układ optyczny U (rys. 2.9) i prosta a przestrzeni przedmiotowej równoległa do osi optycznej $O-O$. Półprosta leżąca w przestrzeni rzeczywistej narysowana jest linią ciągłą, natomiast pozostała



Rys. 2.9

część znajdująca się w przestrzeni pozornej linią przerywaną. Prosta w przestrzeni obrazowej sprzężona z prostą a może być równoległa do osi lub być nachylona do niej pod pewnym kątem. Pomińmy na razie pierwszy przypadek i niech a' będzie prostą sprzężoną z a . Punkt przecięcia się a' z osią jest punktem sprzężonym z punktem przestrzeni przedmiotowej wyznaczonym przez przecięcie się prostej a z osią. Oznacza to, że punkt F' jest obrazem punktu nieskończenie odległego leżącego na osi w przestrzeni przedmiotowej. Punkt F' nazywa się *ogniskiem obrazowym układu*. Analogicznie *ogniskiem przedmiotowym* F układu nazywany jest punkt przestrzeni przedmiotowej na osi sprzężony z punktem nieskończenie odległym przestrzeni obrazowej. Prosta b jest sprzężona z prostą b' równoległą do osi. Oznaczenia ognisk układu F i F' stanowią wyjątek; ogniska: przedmiotowe i obrazowe nie są punktami sprzężonymi.

Płaszczyzna prostopadła do osi i przechodząca przez ognisko przedmiotowe lub obrazowe, nazywa się odpowiednio *płaszczyzną ogniskową przed-*

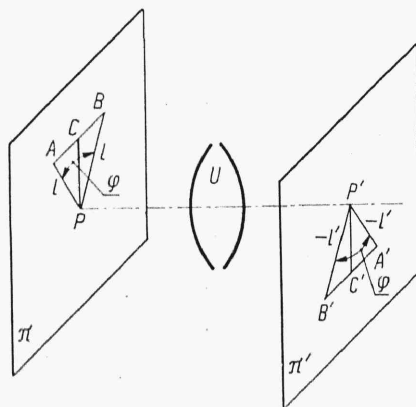
miotową lub obrazową. Wynika stąd, że płaszczyzna ogniskowa obrazowa jest sprzężona z płaszczyzną nieskończenie odległą przestrzeni przedmiotowej (prostopadłą do osi). Podobnie płaszczyzna ogniskowa przedmiotowa jest sprzężona z płaszczyzną nieskończenie odległą przestrzeni obrazowej.

Punkty A i A' utworzone przez przecięcie się prostych sprzężonych są również sprzężone. Oznacza to, że A' jest obrazem punktu A . Podobnie odcinek $B'A' = l'$ jest obrazem odcinka $BA = l$. Dla ułatwienia dodawania odcinków skierowanych (kątown) na rysunkach nanoszone są ich wartości dodatnie. Ponieważ zgodnie z przyjętą tu regułą znaków l' jest ujemne, odcinek $B'A'$ oznaczono przez $-l'$ i można wtedy tę wartość uważać za geometryczną długość boku.

Do scharakteryzowania przekształcenia długości odcinków prostopadłych do osi służy powiększenie poprzeczne β definiowane jako stosunek ich długości

$$\beta = \frac{l'}{l} \quad (2.1)$$

Powiększenie to jest niezależne od długości l . Dla dowodu niech π i π' (rys. 2.10) będą płaszczyznami sprzężonymi, prostopadłymi do osi optycznej. Kąt φ oznacza dowolny kąt (różny od π) między dwoma odcinkami



Rys. 2.10

$AP = BP = l$. Z uwagi na obrotową oś symetrii, kąt ten będzie również zachowany między odcinkami sprzężonymi w przestrzeni obrazowej $A'P' = B'P' = l'$. Z rysunku

$$\beta = \frac{l'}{l} = \frac{\frac{P'C'}{\cos \frac{\varphi}{2}}}{\frac{PC}{\cos \frac{\varphi}{2}}} = \frac{P'C'}{PC}$$

niezależnie od kąta φ . A więc powiększenie poprzeczne jest stałe w całej płaszczyźnie π .

Płaszczyzny sprzężone, dla których $\beta = 1$ to znaczy $l' = l$ nazywane są *płaszczyznami głównymi*. Przecięcia się płaszczyzn głównych z osią dają *punkty główne* (odpowiednio: *przedmiotowy* i *obrazowy*). Aby ustalić położenie płaszczyzny głównej obrazowej wystarczy zadanie prostej a równoległej do osi i sprzężonej z nią prostej a' (rys. 2.9). Prosta a z uwagi na

swą równoległość musi przecinać na wysokości l od osi płaszczyznę główną przedmiotową (położenie tej płaszczyzny nie musi być znane). Ponieważ dla płaszczyzn głównych $\beta = 1$, to prosta a' również musi przecinać płaszczyznę główną obrazową na odległości l od osi, stąd położenie jej wyznaczone jest przez formalne przecięcie prostych a i a' . Proste te w rzeczywistości nie mają wspólnego punktu przecięcia, ponieważ znajdują się w różnych przestrzeniach. Podobnie płaszczyzna główna przedmiotowa utworzona jest przez formalne przecięcie się prostych sprzężonych b i b' . Przez H i H' oznaczone są punkty główne.

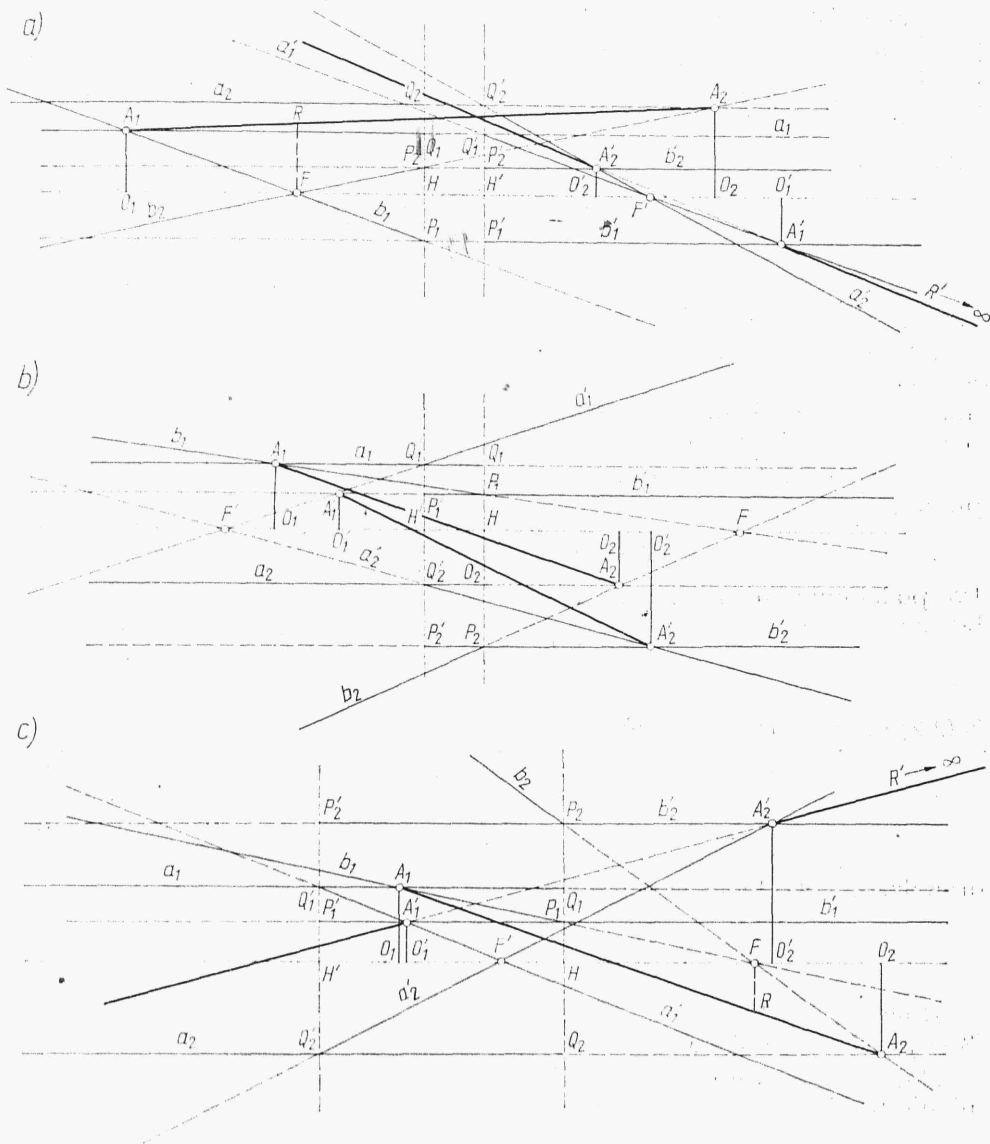
Odległość $H'F' = f'$ (odległość ogniska obrazowego od płaszczyzny głównej obrazowej) nazywa się *ogniskową obrazową*, zaś $HF = f$ (odległość ogniska przedmiotowego od płaszczyzny głównej przedmiotowej) — *ogniskową przedmiotową*.

Jeżeli znane jest położenie ognisk i płaszczyzn głównych układu można wtedy metodą wykreślną wyznaczyć dla danego przedmiotu lub obrazu elementy sprzężone w drugiej przestrzeni. Sposób postępowania pokazano dla różnych układów na rys. 2.11a, b, c, gdzie dla odpowiadających sobie elementów przyjęto te same oznaczenia. Na każdym rysunku pokazano jednocześnie przekształcenia dwóch punktów oznaczonych indeksami 1 i 2.

Niech w układzie znane są położenia ognisk F i F' oraz płaszczyzn głównych przechodzących przez punkty główne H i H' (rys. 2.11a, b, c). Jeżeli dane jest położenie punktu A przestrzeni przedmiotowej, to w celu wykreślnego wyznaczania obrazu A' trzeba narysować dwie proste pomocnicze a i b przecinające się w A . Następnie trzeba wyznaczyć proste a' i b' w przestrzeni obrazowej sprzężone z a i b . Punkt przecięcia się prostych a' i b' daje punkt A' sprzężony z A . Na rysunkach rozpatrywane są równocześnie dwa punkty A_1 i A_2 , dla których pozostałe elementy oznaczono odpowiednio indeksami 1 i 2. Niech prosta a będzie równoległa do osi; wtedy a' musi przejść przez ognisko obrazowe F' układu. Drugi punkt Q' prostej a' można wyznaczyć na drodze następującego rozumowania: prosta a leżąca w przestrzeni przedmiotowej przecina się z płaszczyzną główną przedmiotową w punkcie Q . Ponieważ płaszczyzny główne są płaszczyznami sprzężonymi, dla których $\beta = 1$, to punkt Q' sprzężony z punktem Q będzie leżał w płaszczyźnie głównej obrazowej i musi być dla nich spełnione $HQ = H'Q'$. Stąd formalnie punkt Q' otrzymuje się przez przecięcie prostej a z płaszczyzną główną obrazową. Niech druga prosta b przechodzi przez ognisko przedmiotowe. A więc b' musi być równoległa do osi optycznej. Poza tym prosta b przecina płaszczyznę główną przedmiotową w punkcie P , dla którego punktem sprzężonym w przestrzeni obrazowej jest P' przy czym $PH = P'H'$. Stąd formalnie prosta b' równoległa do osi przechodzi przez przecięcie się prostej b z płaszczyzną główną przedmiotową. Przecięcie się prostych a' i b' wyznacza punkt A' będący obrazem punktu A .

Podobne rozumowanie można byłoby przeprowadzić, jeżeli w miejsce przedmiotu A dany byłby obraz A' (leżący w przestrzeni obrazowej). Wtedy pomocniczymi prostymi byłyby b' i a' , pierwsza równoległa do osi, druga przechodząca przez ognisko obrazowe. Prosta b w przestrzeni przedmiotowej sprzężona z b' przechodziłaby przez ognisko przedmiotowe F i punkt przecięcia się b' z płaszczyzną główną przedmiotową. Prosta a równoległa do osi przechodziłaby przez przecięcie a' z płaszczyzną główną obrazową.

Ponieważ dowolną krzywą można uważać za nieskończony zbiór punktów, to wyznaczając skończoną liczbę punktów sprzężonych w drugiej



Rys. 2.11

przestrzeni, można wyznaczyć przybliżony obraz danej krzywej. Aby wyznaczyć obraz odcinka wystarczy wyznaczyć tylko dwa punkty, gdyż wiadomo z definicji układu doskonałego, że prosta jest przekształcona w prostą. I tak odcinek A_1A_2 (rys. 2.11b) w przestrzeni przedmiotowej jest sprzężony z odcinkiem $A'_1A'_2$ w przestrzeni obrazowej (odcinki sprzężone zaznaczone grubszą linią). Natomiast sprzężenie odcinków O_1A_1 z $O'_1A'_1$ wynika ze sprzężenia punktów A_1 i A'_1 oraz prostopadłości tych odcinków do osi. W przypadku przekształceń na rys. 2.11a i c, ponieważ odcinek A_1A_2 przecina płaszczyznę ogniskową przedmiotową w punkcie R , to sprzężony z nim punkt R' znajduje się w nieskończoności i stąd odcinek A_1A_2 przekształca się w prostą z wyłączeniem odcinka $A'_1A'_2$.

Elementy sprzężone można również wyznaczyć metodą analityczną. Na przykład położenie punktu A w przestrzeni przedmiotowej można określić za pomocą wielkości l (odległość od osi optycznej) i x (odległość od ogniska przedmiotowego) (rys. 2.9), zaś położenie punktu sprzężonego A' w przestrzeni obrazowej za pomocą l' i x' . Z trójkątów $Q'H'F'$ i $F'A'B'$ oraz FAB i FHP będzie

$$\frac{l'}{l} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x} = \beta \quad (2.2)$$

a więc

$$xx' = ff' \quad (2.3)$$

Jest to zależność znana pod nazwą *wzoru Newtona*. Dla danego układu (znane f i f' oraz położenia F i F') i danego położenia na przykład przedmiotu (znane x i l) można z równania (2.3) znaleźć x' , a z (2.2) l' , co określa już położenie obrazu.

Obok ognisk układu najczęściej stosowanymi punktami odniesienia są punkty główne (rys. 2.9), dla których

$$x' = s' - f' \quad x = s - f \quad (2.4)$$

Po podstawieniu do wzoru *Newtona* i elementarnym przekształceniu będzie

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1 \quad (2.5)$$

Z (2.2) i (2.4) można napisać

$$s' = f'(1 - \beta) \quad (2.6a)$$

$$s = f\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \quad (2.6b)$$

oraz dzieląc obydwie równania stronami

$$\beta = \frac{-f}{f'} \frac{s'}{s} \quad (2.7)$$

Równanie (2.5) opisuje przekształcenie wzdłuż osi, natomiast (2.6) lub (2.7) przekształcenie w kierunku prostopadłym do osi.

Pojęciem charakteryzującym przekształcenie kątów, jakie tworzą promienie z osią jest *powiększenie kątowe* γ definiowane przez stosunek

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \quad (2.8)$$

Ponieważ $QH = Q'H'$ (rys. 2.9), to natychmiast

$$\gamma = \frac{s}{s'} \quad (2.9)$$

Oznacza to, że powiększenie kątowe jest niezależne od kąta u , a jedynie jest funkcją odległości s punktu przecięcia B prostej c z osią (s' zgodnie ze wzorem (2.5) jest funkcją s). Z zależności (2.9), (2.7) i (2.2) można otrzymać

$$\gamma = \frac{x}{f'} = \frac{f}{x'} \quad (2.10)$$

Punktami węzłowymi N i N' nazywane są takie sprzężone punkty na osi, dla których $\gamma = 1$. Dla tych punktów z (2.6), (2.7), (2.9) i (2.10) mamy

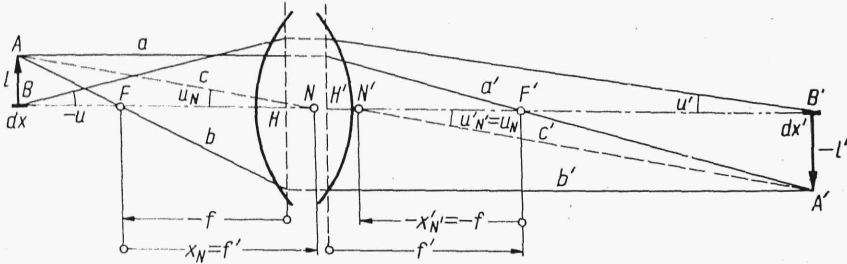
$$s'_{N'} = s_N = f' + f \quad (2.11a)$$

$$\beta_N = -\frac{f}{f'} \quad (2.11b)$$

$$x'_{N'} = f \quad (2.11c)$$

$$x_N = f' \quad (2.11d)$$

Jeżeli znane jest położenie punktów węzłowych N i N' można je wykorzystać do wyznaczania punktów sprzężonych. Zamiast prostych a lub b (rys. 2.12) można narysować prostą c przechodzącą przez dany punkt A i przedmiotowy punkt węzłowy N . Prosta sprzężona c' będzie przechodziła przez obrazowy punkt węzłowy N' i formalnie (gdyż znajduje się w innej przestrzeni) będzie równoległa do prostej c .



Rys. 2.12

Powiększenie podłużne α definiowane jest przez stosunek sprzężonych i nieskończenie małych odcinków (dx , dx') na osi (rys. 2.12)

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} \quad (2.12)$$

Różniczkując równanie Newtona otrzymuje się

$$x dx' + x' dx = 0$$

a po uwzględnieniu (2.4)

$$\alpha = -\frac{x'}{x} = -\frac{s' - f'}{s - f} \quad (2.13)$$

Powiększenie α zależy od położenia odcinka na osi i stąd konieczność operowania nieskończenie małymi odcinkami.

Z równań (2.7), (2.9), (2.13) i (2.2) można wykazać następujące zależności między powiększeniami

$$\beta\gamma = -\frac{f}{f'} \quad (2.14a)$$

$$\alpha = -\frac{f'}{f} \beta^2 \quad (2.14b)$$

$$\beta = \alpha\gamma \quad (2.14c)$$

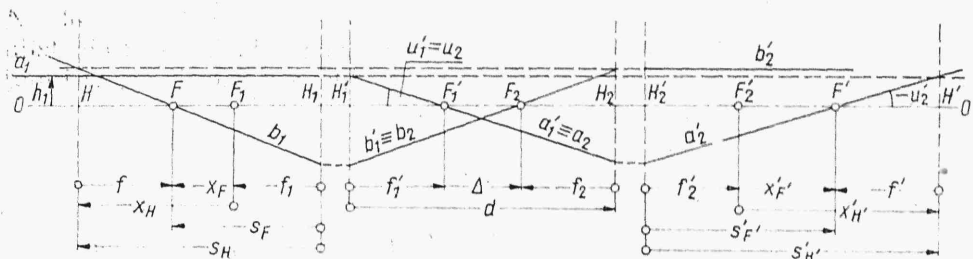
Ponieważ $\beta = \frac{l'}{l}$ oraz $\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}$ to zgodnie ze wzorem (2.14a)

$$lf \operatorname{tg} u = -l'f' \operatorname{tg} u' \quad (2.15)$$

niezależnie od kąta u i długości l (rys. 2.12).

2.2.2. Układ złożony o wspólnej osi symetrii

Niech będą dwa układy optyczne o znanych parametrach, ustawione współosiowo jeden za drugim. Zestaw taki tworzy nowy układ, również z obrotową osią symetrii. Celem niniejszego podrozdziału jest wyznaczenie parametrów układu złożonego.



Rys. 2.13

Wspólną osią układu jest prosta $O-O$ (rys. 2.13). Oznaczenia ze wskaźnikiem 1 i 2 odnoszą się do elementów pojedynczych układów, bez wskaźników zaś do układu złożonego jako całości.

Ognisko obrazowe F' całego układu jest sprzężone z ogniskiem obrazowym F_1' pierwszego układu, stąd ze wzoru Newtona dla drugiego układu, ponieważ $x_2 = -\Delta$, $x_2' = x_{F'}$ będzie

$$x_{F'} = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta} \quad (2.16a)$$

Analogicznie ognisko przedmiotowe F jest sprzężone z ogniskiem przedmiotowym układu drugiego, a więc

$$x_F = \frac{f_1 f_1'}{\Delta} \quad (2.16b)$$

W celu wyznaczenia ogniskowej obrazowej f' całego układu w przestrzeni przedmiotowej pierwszego układu narysowana jest prosta a_1 równoległa do osi i leżąca na wysokości h_1 od niej. Prosta a_1 (dla uproszczenia narysowano tylko część prostej) jest sprzężona z prostą a_1 i leży w przestrzeni obrazowej pierwszego układu, która jest również przestrzenią przedmiotową drugiego układu. Prosta a_2' jest prostą leżącą w przestrzeni obrazowej drugiego układu sprzężoną z prostą a_2 , a więc sprzężoną z prostą a_1 przez cały układ. Stąd położenie płaszczyzny głównej obrazowej jest wyznaczone przez formalne przecięcie się prostej a_1 z prostą a_2' . A więc z rysunku

$$f' = \frac{h_1}{\operatorname{tg} u_2'}$$

Ponieważ

$$h_1 = f_1' \operatorname{tg} u_1' = f_1' \operatorname{tg} u_2$$