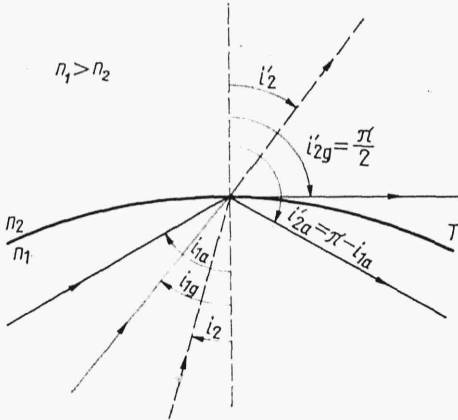


Powracając do równania (1.42), niech spełniony będzie warunek $n_1 > n_2$, to znaczy promień przechodzi z ośrodka optycznie gęstszego do optycznie rzadszego. Oznaczając $n_{12} = n_1/n_2 > 1$ będzie

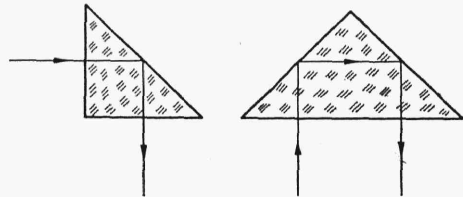
$$\sin i_2 = n_{12} \sin i_1$$

przy czym $i_2 > i_1$.

Powiększając stopniowo kąt padania i_1 dojdzie się dla $i_1 = i_{1g}$, do warunku $\sin i_2 = 1$, dla którego $\sin i_{1g} = 1/n_{12}$. Dla $i_1 > i_{1g}$ promienie świetlne pozostaną w pierwszym ośrodku, odbijając się zgodnie z prawem odbicia. Mówi się wtedy o zjawisku całkowitego odbicia. Kąt i_{1g} nazywa się *granicznym kątem padania* (rys. 1.14).



Rys. 1.14



Rys. 1.15

Zjawisko całkowitego odbicia ma duże znaczenie w budowie przyrządów optycznych. Korzysta się z niego m. in. przy konstrukcji przyrządów umożliwiających odchylenie promieni w układzie optycznym bez strat energetycznych na powierzchni odbijającej (rys. 1.15).

1.4.6. Zasada Fermata. Twierdzenie Malusa

Zasada Fermata znana jest pod nazwą *zasady najkrótszej drogi optycznej* i dlatego przed jej sformułowaniem wyprowadzona zostanie zależność pozwalająca wyznaczyć drogę optyczną L między dowolnymi punktami P_1 i P_2 .

Z definicji pochodnej kierunkowej mamy $dL/ds = s^0 \cdot \text{grad } L$, gdzie s^0 — kierunek promienia. Z uwagi na wzór (1.34)

$$\frac{dL}{ds} = n(s^0)^2 = n$$

a więc

$$L = \int_{P_1}^{P_2} n ds \quad (1.47)$$

gdzie s — długość łuku promienia.

Jest to ogólne wyrażenie na drogę optyczną dla dowolnego ośrodka. W ośrodku jednorodnym, w którym $n = \text{const}$

$$L = n(s_2 - s_1) \quad (1.48)$$

gdzie $s_2 - s_1$ jest drogą geometryczną promienia między punktami P_1 i P_2 .

Drogą optyczną $[P_1 P_2] = L$ między punktami P_1 i P_2 w ośrodku jednorodnym jest iloczyn współczynnika załamania przez drogę geometryczną promienia.

Drogę optyczną można jeszcze wyrazić za pomocą czasu przebiegu promienia między punktami P_1 i P_2 . Podstawiając do wzoru (1.47) znaną już zależność $n = c/v$ będzie

$$[P_1 P_2] = c \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = c \int_{P_1}^{P_2} dt = c(t_2 - t_1)$$

A więc drogę optyczną między punktami P_1 i P_2 promienia świetlnego można wyznaczyć z iloczynu prędkości światła w próżni przez czas potrzebny dla światła do przejścia między punktami P_1 i P_2 .

Sensem fizycznym drogi optycznej dla dowolnego ośrodka między punktami P_1 i P_2 jest droga geometryczna, jaką promień przebiegałby w próżni w czasie niezbędnym do jego przejścia w danym ośrodku między punktami P_1 i P_2 . Oznacza to, że w próżni droga optyczna pokrywa się z drogą geometryczną, co również natychmiast wynika z równania (1.47).

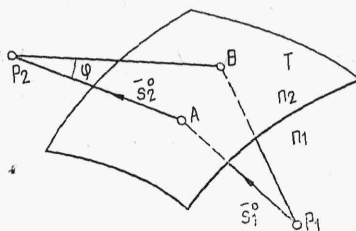
Jako uogólnienie drogi optycznej, która jest mierzona po promieniu świetlnym, można wprowadzić pojęcie *długości optycznej* L_l branej po dowolnej krzywej (niekoniecznie po promieniu)

$$L_l = \int_{P_1}^{P_2} n dl$$

gdzie l — długość łuku dowolnej krzywej łączącej punkty P_1 i P_2 . Jeżeli krzywa pokrywa się z promieniem, wtedy $l = s$ i $L_l = L$, a więc długość optyczna pokrywa się z drogą optyczną.

Zasada Fermata głosi:

Droga optyczna między dowolnymi punktami P_1 i P_2 jest krótsza, lub co najwyżej równa długości optycznej między tymi punktami. Równość za-



Rys. 1.16

chodzi wtedy, gdy krzywa, po której jest brana długość optyczna, jest promieniem.

Dowód zasady *Fermata*, podobnie jak i twierdzenie *Malusa*, zostaną przeprowadzone dla dwóch ośrodków jednorodnych podzielonych powierzchnią o skokowej zmianie współczynnika załamania. W ten sam sposób można udowodnić obydwie prawa dla ośrodka niejednorodnego.

Niech będzie powierzchnia T (rys. 1.16) dzieląca dwa ośrodki o współczynnikach załamania n_1 i n_2 . P_1AP_2 jest promieniem świetlnym łączącym punkty P_1 i P_2 . P_1B i BP_2 , zaś dowolnymi prostymi. Zgodnie z całkowym niezmiennikiem *Lagrange'a* (1.40) dla dowolnej krzywej zamkniętej $\oint ns^0 d\vec{r} = 0$.

Dla $P_1AP_2BP_1$ będzie

$$n_1 \int_{P_1}^A s_1^0 d\vec{r} + n_2 \int_A^{P_2} s_2^0 d\vec{r} - n_2 \int_B^{P_2} s_2^0 d\vec{r} - n_1 \int_{P_1}^B s_1^0 d\vec{r} = 0$$

ponieważ n_1 i n_2 nie zależą od współrzędnych.

Dla P_1A i AP_2

$$s_1^0 d\vec{r} = s_2^0 d\vec{r} = ds$$

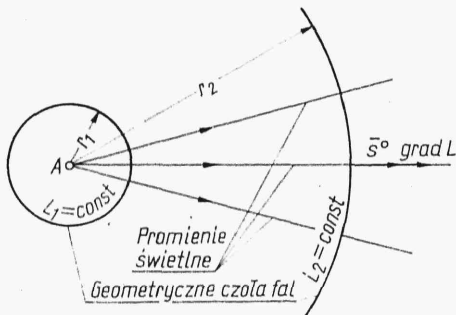
ponieważ kierunek całkowania $d\vec{r}$ pokrywa się z kierunkiem promienia s^0 .

Dla BP_2 $s_2^0 d\vec{r} = ds \cdot \cos \varphi \leq ds$, gdzie φ — kąt między kierunkiem całkowania i kierunkiem promienia.

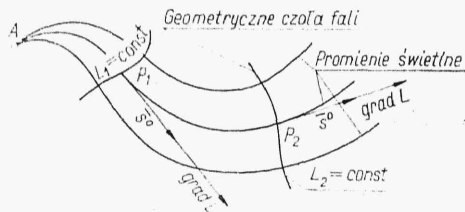
Analogicznie dla P_1B $s_1^0 d\vec{r} \leq ds$, stąd

$$n_1 \cdot P_1A + n_2 \cdot AP_2 \leq n_1 \cdot P_1B + n_2 \cdot BP_2$$

co jest dowodem zasady *Fermata*. Równość zachodzi tylko wtedy, gdy P_1BP_2 jest również promieniem.



Rys. 1.17

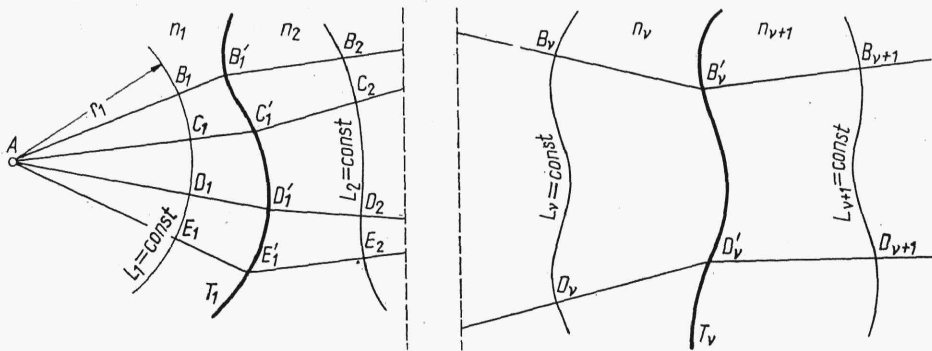


Rys. 1.18

Jeżeli w ośrodku jednorodnym znajduje się punkt świecący A (rys. 1.17), to zbiorem promieni w tym ośrodku będzie pęk prostych wychodzących z punktu A . Geometrycznymi czołami fal będą powierzchnie, dla których droga optyczna od źródła światła będzie stała ($L = \text{const}$), to znaczy zbiór powierzchni sferycznych o wspólnym środku krzywizny A . Promienie są z definicji normalne do wszystkich geometrycznych czoł fal. Dla uproszczenia na rysunku przedstawiono bieg promieni w płaszczyźnie. Zgodnie z oznaczeniami $L_1 = nr_1$ i $L_2 = nr_2$, gdzie n współczynnik załamania danego ośrodka.

Jeżeli ośrodek jest niejednorodny, to powierzchnie falowe $L = \text{const}$ nie będą powierzchniami sferycznymi, a ich kształt będzie zależał od funkcji opisującej rozkład współczynnika załamania $n = n(x, y, z)$. Promienie świetlne jako ortogonalne do geometrycznych czoł fali będą liniami krzywymi (rys. 1.18). Zgodnie z oznaczeniami na rysunku $L_1 = \int_A^{P_1} n ds$ i $L_2 = \int_A^{P_2} n ds$. Droga optyczna między dwoma powierzchniami falowymi jest wielkością stałą, to znaczy $[P_1 P_2] = L_2 - L_1 = \text{const}$, niezależnie od rozpatrywanego promienia świetlnego.

W przypadku dwóch ośrodków jednorodnych o różnych współczynnikach załamania przedzielonych powierzchnią T , z prawa załamania można znaleźć kierunki promieni w drugim ośrodku. Miejsce geometryczne punktów, dla których droga optyczna od początkowego źródła A jest stała, będzie nowym geometrycznym czołem fali. Powierzchnia falowa w drugim ośrodku ogólnie nie będzie sferyczna i kształt jej zależy od kształtu powierzchni T i stosunku współczynników załamania obydwu ośrodków (rys. 1.19).



Rys. 1.19

Z rysunku

$$L_2 = AB'_1 n_1 + B'_1 B_2 n_2 = AC'_1 n_1 + C'_1 C_2 n_2 = \dots = \text{const}$$

W ten sam sposób można wyznaczyć geometryczne czoło fali $L_{v+1} = \text{const}$ po v powierzchniach załamujących.

Twierdzenie Malusa brzmi:

Promienie świetlne pozostają normalne do geometrycznego czoła fali po przejściu dowolnej liczby powierzchni załamujących. Dowód wystarczy przeprowadzić tylko dla jednej powierzchni T_v (rys. 1.19), dla której wybrano dwa dowolne promienie B i D . Dla obwodu $B_v B_{v+1} D_{v+1} D_v$ z niezmiennika całkowitego *Lagrange'a* (1.40) będzie

$$[B_v B_{v+1}] + n_{v+1} \int_{B_{v+1}}^{D_{v+1}} \bar{s}^0 d\bar{r} - [D_v D_{v+1}] + n_v \int_{D_v}^{B_v} \bar{s}^0 d\bar{r} = 0$$

Ale $[B_v B_{v+1}] = [D_v D_{v+1}]$, ponieważ drogi optyczne między dwiema powierzchniami falowymi są jednakowe, niezależnie od rozpatrywanego pro-

mienia. Jeżeli ponadto w ośrodku ν promienie są normalne do czoła fali, to $\int_{B_\nu} s^0 d\vec{r} = 0$, gdyż kierunek s^0 jest normalny do kierunku całkowania $d\vec{r}$, a więc wtedy pozostanie

$$\int_{B_{\nu+1}} s^0 \cdot d\vec{r} = 0$$

co oznacza, że w ośrodku $\nu + 1$ promienie muszą być również normalne do kierunku całkowania, a więc, co na jedno wychodzi, i do czoła fali, co należało dowieść.

Twierdzenie *Malusa* można też udowodnić dla powierzchni odbijających i ośrodków niejednorodnych.

1.4.7. Zakres stosowalności optyki geometrycznej

Wszystkie prawa podane w podrozdziale 1.4 zostały wyprowadzone przy założeniu $\lambda_0 \approx 0$. Wniosek stąd, że są one słuszne tylko w tej części przestrzeni, w której rejestrowalne zmiany różnych wielkości zachodzą w przedziałach znacznie przekraczających długość fali, a więc np. wtedy, gdy zmiany współczynnika załamania na odległościach rzędu długości fali są pomijalne w porównaniu z samą wartością współczynnika załamania. Wyprowadzone prawo załamania dla skokowej zmiany współczynnika załamania tego warunku nie spełnia i dlatego nie oddaje w pełni sensu zjawiska, jakie zachodzi na granicy dwóch ośrodków. Na przykład postawiona hipoteza o zjawisku całkowitego odbicia będzie udowodniona dopiero przy rozpatrywaniu zjawisk falowych na granicy dwóch ośrodków. Interpretacja zjawiska znacznie się komplikuje, gdy promień krzywizny powierzchni dzielącej dwa ośrodki będzie porównywalny z długością fali.

Ponadto przy wyprowadzeniu równania eikonału założono w zależnościach (1.32), że dla $\lambda_0 \rightarrow 0$ prawe strony równań można pominąć. Ponieważ $\text{grad } L$ jest rzędu n a $\mu \approx 1$, oznacza to, że zmiana amplitudy wektorów natężenia pola elektrycznego \vec{E}_0 i magnetycznego \vec{H}_0 na odległości rzędu długości fali powinna być pomijalnie mała w porównaniu z samą wartością wektorów. Warunek ten nie jest spełniony na granicy cieni, w sąsiedztwie obrazów punktowych źródeł światła, gdzie występuje skokowa zmiana wartości tych wektorów i dlatego wtedy optyka geometryczna i jej prawa nie mogą dać poprawnego opisu zjawisk.

Mimo wspomnianych tu niedostatków, a czasami wręcz fałszywych wniosków, jakie można wyciągnąć opierając się tylko na geometrycznym opisie zjawisk optycznych, optyka geometryczna, ze względu na swą prostotę, stanowi niezwykle ważne narzędzie w pracy inżyniera, czy nawet fizyka. Daje ona pierwsze przybliżenie, często całkowicie wystarczające do oceny zachodzącego zjawiska. Operowanie pojęciami optyki falowej, mimo stosowanych zwykle uproszczeń, prowadzi do bardzo skomplikowanych rachunków. W związku z tym najważniejszym problemem przy rozwiązywaniu konkretnego zadania jest oszacowanie, kiedy można pozostać tylko przy wnioskach z optyki geometrycznej, a kiedy należy brać pod uwagę falową naturę światła. Zagadnienie to będzie omawiane jeszcze w rozdz. 3.