

PRZEKSZTAŁCENIE FOURIERA

8.1. Szereg Fouriera, a przekształcenie Fouriera

W ostatnim ćwierćwieczu, począwszy od pracy opublikowanej przez Duffieux w r. 1946, przekształcenie *Fouriera* zwane też często transformacją *Fouriera* stało się nieodzownym narzędziem optyki, pozwalając rozwiązać wiele do tej pory niejasnych zagadnień. Jest ono nie tylko ważnym instrumentem wzbogacającym teorię układu optycznego, ale również mającym głębokie reperkusje praktyczne. Ponieważ program wykładów matematyki na wydziałach mechanicznych Politechnik obejmuje tylko szereg *Fouriera*, stąd potrzeba niniejszego uzupełnienia. Nie będzie ono oczywiście pełne ani ścisłe. Opis opierać się będzie tylko na analogii do szeregu *Fouriera*. Motywem przewodnim jest uwypuklenie sensu fizycznego przekształcenia i formalne przeprowadzenie działań. Jako literatura źródłowa polecane są pozycje [1], [2].

Niech będzie funkcja rzeczywista i periodyczna $G(x)$ o okresie X_0 , a więc częstości $\tilde{x}_0 = 1/X_0$ ¹⁾. Oznacza to, że dla każdego x

$$G(x + mX_0) = G(x) \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.1)$$

Zgodnie z własnościami szeregu *Fouriera* można tę funkcję przedstawić w postaci sumy funkcji harmoniczných.

$$G(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos 2\pi m \tilde{x}_0 x + b_m \sin 2\pi m \tilde{x}_0 x) \quad (8.2)$$

gdzie współczynniki a_m i b_m , będące amplitudami funkcji harmoniczných o częstości $\tilde{x} = m\tilde{x}_0$ wyrażone są za pomocą wzorów *Eulera-Fouriera*

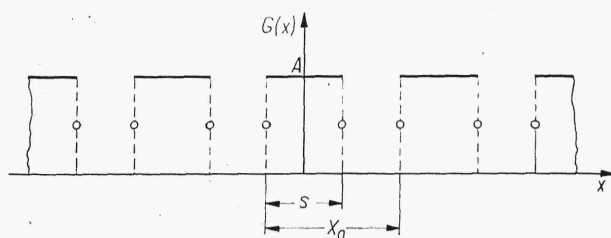
$$a_m = 2\tilde{x}_0 \int_{x_a}^{x_a + X_0} G(x) \cos 2\pi m \tilde{x}_0 x dx \quad (8.3a)$$

$$b_m = 2\tilde{x}_0 \int_{x_a}^{x_a + X_0} G(x) \sin 2\pi m \tilde{x}_0 x dx \quad (8.3b)$$

¹⁾ Przekształcenie *Fouriera* ma szczególne zastosowanie do analizy rozkładu amplitud lub intensywności na powierzchni i w celu odróżnienia od częstotliwości związanej z czasem wprowadzone jest pojęcie częstości. Dla wygody zapisu częstość na osi x będzie oznaczona przez \tilde{x} , natomiast okres przez X_0 .

Parametr x_a jest dowolną wartością x .

Częstości \tilde{x} funkcji harmonicznym są wielokrotnościami częstości funkcji periodycznej ($\tilde{x} = m\tilde{x}_0$). Rozkład częstości jest dyskretny i różnica częstości $\Delta\tilde{x}$ między dowolnymi harmonicznymi m i $m+1$ jest stała i wynosi \tilde{x}_0 .



Rys. 8.1

Niech dla przykładu $G(x)$ będzie funkcją prostokątną periodyczną (rys. 8.1) określoną dla każdego x w przedziale $(-\infty, \infty)$, tzn.

$$G(x) = A \quad \text{dla} \quad |x - mX_0| < \frac{s}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

$G(x) = 0$ poza tym przedziałem ¹⁾

Zgodnie z wyrażeniem (8.3) współczynniki

$$a_m = 2A\tilde{x}_0 \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \cos 2\pi m\tilde{x}_0 x \, dx = 2 \frac{s}{X_0} A \operatorname{sinc} \pi m \frac{s}{X_0}$$

$$b_m = 2A\tilde{x}_0 \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sin 2\pi m\tilde{x}_0 x \, dx = 0$$

gdzie dla prostoty przyjęto $x_a = -s/2$ oraz wprowadzono oznaczenie

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x} \quad (8.4)$$

a więc zgodnie z równaniem (8.2)

$$G(x) = A \frac{s}{X_0} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\pi m \frac{s}{X_0} \right) \cos 2\pi m\tilde{x}_0 x \right]$$

Oznaczając

$$G_0 = A \frac{s}{X_0} \quad (8.5)$$

¹⁾ Aby funkcja nieciągła była rozwijalna w szereg *Fouriera* jej wartości w punktach nieciągłości powinny równać się średniej arytmetycznej lewo i prawostronnej granicy, stąd dla $|x - mX_0| = s/2$ powinno być $G(x) = A/2$, co w niczym formalnie nie zmienia obliczeń.

otrzymuje się

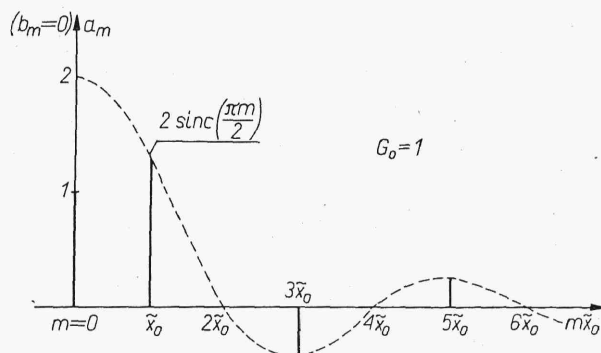
$$G(x) = G_0 \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\pi m \frac{s}{X_0} \right) \cos 2\pi m \tilde{x}_0 x \right] \quad (8.6)$$

Przykładowo niech $s/X_0 = 1/2$ i wtedy dla m parzystego $\operatorname{sinc} \pi m/2 = 0$,

dla m nieparzystego $\operatorname{sinc} \frac{\pi m}{2} = \frac{2(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi m}$ stąd

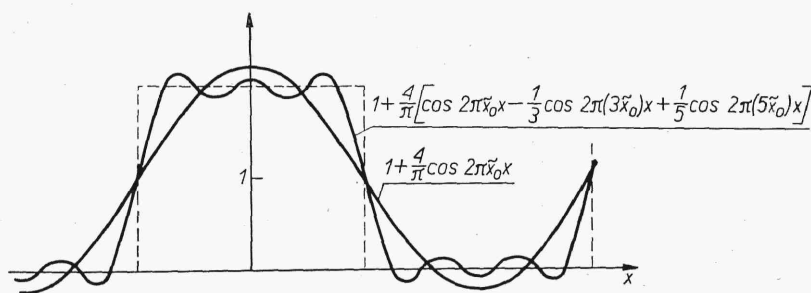
$$\frac{G(x)}{G_0} = 1 + \frac{4}{\pi} \left[\cos 2\pi \tilde{x}_0 x - \frac{1}{3} \cos 2\pi (3\tilde{x}_0) x + \frac{1}{5} \cos 2\pi (5\tilde{x}_0) x + \dots \right] \quad (8.7)$$

W ten sposób funkcja prostokątna parzysta [$G(-x) = G(x)$] o stosunku $s/X_0 = 1/2$ jest przedstawiona jako suma funkcji harmoniczných parzystych o częstościach równych nieparzystej wielokrotności częstości funkcji periodycznej. Pierwszy składnik (1) jest stały, a więc o okresie nieskończenie dużym i częstości $\tilde{x} = 0$. Jeżeli $G_0 = 1$, to jego amplituda dla funkcji $G(x)$ wynosi 1. Drugi składnik jest o częstości \tilde{x}_0 i amplitudzie $4/\pi$, trzeci o częstości $3\tilde{x}_0$ i amplitudzie $-4/3\pi$ itd. Rozkład amplitud znormowany przez $G_0 = 1$ w funkcji częstości przedstawiony jest na wykresie (rys. 8.2).



Rys. 8.2

Na rys. 8.3 pokazano wpływ poszczególnych harmoniczných na kształt funkcji $G(x)$. Im więcej wyrazów będzie wzięte pod uwagę, tym lepsza będzie aproksymacja funkcji prostokątnej.



Rys. 8.3

Zależność (8.2) można zapisać w krótszej postaci przez formalne rozszerzenie przedziału częstości również na wartości ujemne. Z równania (8.3) wynika, że $a_{-m} = a_m$, $b_{-m} = -b_m$ oraz $b_0 = 0$. Wprowadzając oznaczenie

$$c_m = \frac{a_m - ib_m}{2} = \tilde{x}_0 \int_{x_a}^{x_a + X_0} G(x) \exp(-2\pi i m \tilde{x}_0 x) dx \quad (8.8)$$

ponieważ dla $m > 0$

$$a_m \cos 2\pi m \tilde{x}_0 x + b_m \sin 2\pi m \tilde{x}_0 x = c_m \exp(2\pi i m \tilde{x}_0 x) + c_{-m} \exp(-2\pi i m \tilde{x}_0 x)$$

oraz dla $m = 0$ $c_0 = a_0/2$, to wtedy

$$G(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(2\pi i m \tilde{x}_0 x) \quad (8.9)$$

Jest to postać wykładnicza szeregu *Fouriera*. Jeżeli dana jest funkcja periodyczna $G(x)$ (w ogólnym przypadku zespolona) o częstości \tilde{x}_0 , to można ją przedstawić jako nieskończoną sumę funkcji harmoniczných w postaci zespolonej o dyskretnym rozkładzie częstości $\tilde{x} = m\tilde{x}_0$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), przy czym amplitudę c_m ogólnie zespoloną tych funkcji można wyznaczyć z wyrażenia (8.8).

Dla funkcji prostokątnej periodycznej (rys. 8.1) będzie

$$c_m = A\tilde{x}_0 \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \exp(-2\pi i m \tilde{x}_0 x) dx = \frac{As}{X_0} \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{ms}{X_0}\right)$$

i zgodnie z równaniami (8.9) i (8.5)

$$\frac{G(x)}{G_0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\pi m \frac{s}{X_0}\right) \exp(2\pi i m \tilde{x}_0 x) \quad (8.10)$$

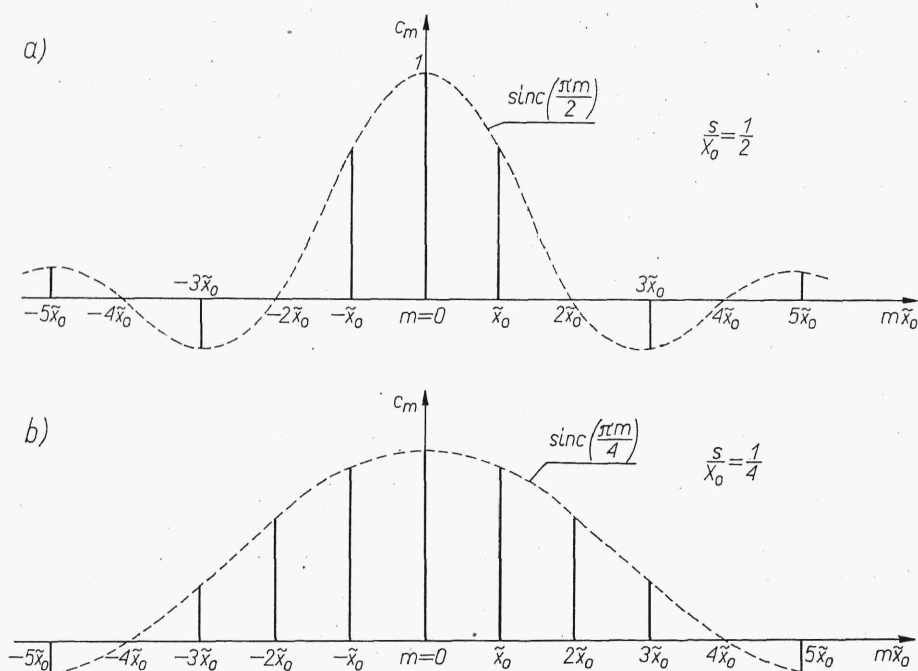
Jest to postać wykładnicza rozwinięcia *Fouriera* periodycznej funkcji prostokątnej na składowe harmoniczne w postaci zespolonej. Z wyrażenia (8.10), ponieważ $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ oraz $\operatorname{sinc}(-x) = \operatorname{sinc} x$, można otrzymać

$$\frac{G(x)}{G_0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\pi m \frac{s}{X_0}\right) \cos 2\pi m \tilde{x}_0 x$$

co odpowiada zależności (8.6) z wprowadzeniem ujemnych wartości m . Wykładnicza postać szeregu (wzór (8.10)) jest znacznie wygodniejsza w zapisie szczególnie wtedy, gdy $b_m \neq 0$.

Na rys. 8.4 naniesiono rozkład amplitud c_m funkcji harmoniczných rozwinięcia periodycznej funkcji prostokątnej dla $s/X_0 = 1/2$ (rys. 8.4a) i $s/X_0 = 1/4$ (rys. 8.4b).

Z uwagi na dowolność x_a i ponieważ $m\tilde{x}_0 = \tilde{x}$ jest częstością m -tej harmonicznę, natomiast \tilde{x}_0 przyrostem $\Delta\tilde{x}$ częstości między m -tą i $m+1$ harmoniczną, zależności (8.8) i (8.9) można przepisać w postaci, która będzie dogodniejsza przy przejściu do funkcji aperiodycznej.



Rys. 8.4

Oznaczając przez

$$g(\tilde{x}) = \int_{-\frac{1}{2}X_0}^{\frac{1}{2}X_0} G(x) \exp(-2\pi i \tilde{x}x) dx \quad (8.11a)$$

wtedy z wyrażeń (8.8) i (8.9) będzie

$$G(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(\tilde{x}) \exp(2\pi i \tilde{x}x) \Delta \tilde{x} \quad \text{gdzie } \tilde{x} = m\tilde{x}_0 \quad (8.11b)$$

Funkcję aperiodyczną można również uważać za periodyczną, z tym że jej okres jest nieskończenie długi. Oznacza to, że dla zależności (8.11) przyjmując $X_0 \rightarrow \infty$, a więc $\Delta \tilde{x} = \tilde{x}_0 = 1/X_0 \rightarrow 0$ i zamieniając sumę przez całkę otrzymuje się ostatecznie

$$g(\tilde{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) \exp(-2\pi i \tilde{x}x) dx \quad (8.12a)$$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{x}) \exp(2\pi i \tilde{x}x) d\tilde{x} \quad (8.12b)$$

Zależności (8.12) ujmują przekształcenia *Fouriera* aperiodycznej funkcji $G(x)$. Można wykazać analogie między przekształceniem i szeregiem *Fouriera*. Zgodnie z wyrażeniem (8.12b) funkcja $G(x)$ przedstawiona jest

jako nieskończona suma funkcji harmoniczných o postaci $g(\tilde{x})\exp(2\pi i\tilde{x}x)d\tilde{x}$, gdzie $g(\tilde{x})$ jest gęstością amplitudy w przedziale $d\tilde{x}$.

Wyrażenie $g(\tilde{x})d\tilde{x}$ jest amplitudą funkcji. Zgodnie z zależnością (8.9) wielkości $g(\tilde{x})d\tilde{x}$ odpowiada współczynnik c_m . Gęstość amplitudy $g(\tilde{x})$ wyznaczana jest z wyrażenia (8.12a) za pomocą funkcji $G(x)$.

Przekształcenie *Fouriera* można uogólnić na dwie zmienne pisząc przez analogię do wyrażenia (8.12)

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) \exp[-2\pi i(x\tilde{x} + y\tilde{y})] dx dy \quad (8.13a)$$

$$G(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{x}, \tilde{y}) \exp[2\pi i(x\tilde{x} + y\tilde{y})] d\tilde{x} d\tilde{y} \quad (8.13b)$$

Zależności (8.12a) i (8.13a) nazywane są *prostym przekształceniem Fouriera* i oznaczane w skrócie przez $g = F[G]$, natomiast (8.12b) i (8.13b) *odwrotnym przekształceniem* i wtedy $G = F^*[g]$. Mówi się, że funkcja g jest *transformatą (widmem, obrazem) funkcji G* .

Pojęcie widma wiąże się bezpośrednio z analizą harmoniczną, na podstawie której zostało wprowadzone przekształcenie *Fouriera*. Natomiast jak wynika z rozważań p. 3.3, rozkład amplitud i faz w obrazie punktu wyraża się również za pomocą przekształcenia *Fouriera* funkcji źrenicy. Wtedy \tilde{x} pełni rolę współrzędnej płaszczyzny obrazu, natomiast x współrzędnej źrenicy układu. Stąd funkcja g nosi nazwę *obrazu*.

Z uwagi na symetrię zależności (8.12) można również uważać, że funkcja $g(\tilde{x})$ przedstawiona jest jako nieskończona suma harmoniczných o postaci $G(x)\exp(-2\pi i\tilde{x}x)dx$, przy czym gęstość amplitudy $G(x)$ dla częstotliwości x , nazywana wtedy *widmem funkcji $g(\tilde{x})$* wyznaczona byłaby z zależności (8.12b). Odwrócenie roli funkcji G i g można również zastosować i dla dwóch zmienných.

8.2. Przykłady przekształcenia Fouriera

1. Funkcja prostokątna $\Pi(x)$ (rys. 8.5a)

$$\text{Niech } G(x) = A \quad \text{dla } |x| < \frac{s}{2}$$

$$G(x) = 0 \quad |x| > \frac{s}{2}$$

Transformatą takiej funkcji zgodnie z zależnością (8.12a) jest

$$g(x) = F[G(x)] = A \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \exp(-2\pi i\tilde{x}x) d\tilde{x} = A s \operatorname{sinc} \pi \tilde{x}s$$

Ponieważ $g(0) = As$, to

$$g(\tilde{x}) = g(0) \operatorname{sinc} \pi \tilde{x}s \quad (8.14)$$

Transformata $g(\tilde{x})$ pokazana jest na rys. 8.5b. Wartości funkcji $\operatorname{sinc} x$, a także $\operatorname{sinc}^2 x$, dla różnych wartości x przytoczone są w tabl. 8.1. Obie funkcje odgrywają ważną rolę w optyce falowej.