

ogólności rozwiązania można rozpatrywać dalej tylko jedno z zaburzeń np. pierwsze. Różnica między nimi polega tylko na kierunku rozchodzenia się.

Równanie (1.9) rozpisane dla trzech współrzędnych będące rozwiązaniem równań falowych (1.4) dla fali płaskiej, można przepisać teraz w postaci wektorowej

$$\bar{E} = \bar{E}(z-vt) = \bar{E}(p) \quad (1.10a)$$

$$\bar{H} = \bar{H}(z-vt) = \bar{H}(p) \quad (1.10b)$$

Funkcje \bar{E} i \bar{H} poza argumentem i zależnościami między nimi (równania (1.3a, b)) mogą być zupełnie dowolne. Argument $z - vt$ nazywa się *fazą funkcji*. Z równań (1.10) wynika, że dla fali elektromagnetycznej wektory natężenia pola magnetycznego i elektrycznego są zgodne w fazie. Prędkość zaburzenia v jest prędkością rozchodzenia się fazy.

1.2.1. Położenie wektorów \bar{E} i \bar{H} dla fali płaskiej

Korzystając z rozkładu wektora rotacji na składowe wektory (1.10) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{E} &= \bar{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \\ &= -\bar{i} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \bar{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\bar{i} \frac{\partial E_y}{\partial p} + \bar{j} \frac{\partial E_x}{\partial p} \end{aligned}$$

ponieważ $\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial p}$ itd.

Przez analogię $\text{rot } \bar{H} = -\bar{i} \frac{\partial H_y}{\partial p} + \bar{j} \frac{\partial H_x}{\partial p}$

Poza tym $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = -v \frac{\partial \bar{E}}{\partial p}$; $\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -v \frac{\partial \bar{H}}{\partial p}$

Po podstawieniu do (1.3a, b) korzystając z (1.6), otrzymuje się

$$\begin{aligned} -\bar{i} \frac{\partial H_y}{\partial p} + \bar{j} \frac{\partial H_x}{\partial p} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\partial \bar{E}}{\partial p} &= 0 \\ -\bar{i} \frac{\partial E_y}{\partial p} + \bar{j} \frac{\partial E_x}{\partial p} - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} &= 0 \end{aligned}$$

Po scałkowaniu równań względem p , przy założeniu że nie ma stałego pola elektrycznego i magnetycznego (stała całkowania równa się 0), będzie

$$-\bar{i} H_y + \bar{j} H_x + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \bar{E} = 0 \quad (1.11a)$$

$$-\bar{i} E_y + \bar{j} E_x - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \bar{H} = 0 \quad (1.11b)$$

Mnożąc skalarnie (1.11) przez \bar{k} ($\bar{k} \cdot \bar{i} = \bar{k} \cdot \bar{j} = 0$) pozostanie

$$\bar{k} \cdot \bar{E} = 0 \quad \bar{k} \cdot \bar{H} = 0$$

Wektory natężenia pola magnetycznego i elektrycznego leżą w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku \vec{k} rozchodzenia się fal, to znaczy $E_z = H_z = 0$. Fale elektromagnetyczne są falami poprzecznymi.

W celu wyznaczenia wzajemnego położenia wektorów \vec{E} i \vec{H} trzeba pomnożyć wektorowo równanie (1.11a) przez $\vec{E} = i\vec{E}_x + j\vec{E}_y$. Dla iloczynu wektorowego $\vec{A} \times \vec{A} = 0$; $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$, stąd po przekształceniach

$$(\vec{i} \times \vec{j})(H_x E_x + H_y E_y) = 0$$

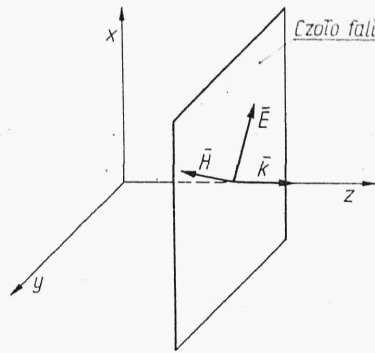
a więc

$$H_x E_x + H_y E_y = 0$$

Z własności iloczynu skalarnego wynika $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$. Ponieważ składowe $E_z = H_z = 0$, stąd

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = 0$$

Wektory \vec{H} i \vec{E} są prostopadłe względem siebie.



Rys. 1.2

Można jeszcze udowodnić, że \vec{E} , \vec{H} , \vec{k} tworzą prawoskrętny układ wektorów (rys. 1.2) i spełniona jest dla nich zależność

$$\sqrt{\mu} |\vec{H}| = \sqrt{\epsilon} |\vec{E}| \quad (1.12)$$

gdzie przez $|\vec{A}|$ oznaczono moduł \vec{A} .

1.2.2. Energia fali elektromagnetycznej. Wektor Poyntinga.

Gęstość energii fali elektromagnetycznej wyrażona jest wzorem

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2}{8\pi} = \frac{\epsilon \vec{E}^2}{4\pi} = \frac{\mu \vec{H}^2}{4\pi} \quad (1.13)$$

gdzie dW energia zawarta w objętości dV .

Wtedy strumień energii wychodzący ze stałej objętości V w jednostce czasu można przedstawić przez

$$-\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_V \int \int (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) dV = -\frac{1}{4\pi} \int_V \int \int \left(\epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dV$$