

źródła pola elektrycznego (ładunki), natomiast brak jest biegunów magnetycznych.

Jeżeli na przewodnik ($\sigma \neq 0$) pada fala elektromagnetyczna, to wzbudzony zostaje w nim prąd elektryczny, którego wartość można wyznaczyć z równania (1.2a), a więc jest wydzielane ciepło Joule'a, co zgodnie z bilansem energetycznym powoduje obniżenie energii fali (fala jest pochłaniana). Wynika stąd, że ciałami, które znalazły największe zastosowanie w optyce, są przede wszystkim dielektryki (nieprzewodniki), dla których $\sigma = 0$, a więc z (1.2a) $\vec{J} = 0$. Z tej przyczyny przyjęto dalej założenie, że ośrodki, w których rozchodzą się fale elektromagnetyczne, są dielektrykami. Założono również, jeżeli brak osobnej uwagi, że ciała są izotropowe. Zagadnieniom rozchodzenia się fal w ośrodkach przewodzących jest poświęcony p. 3.4 oraz anizotropowych p. 3.5.

Biorąc pod uwagę zależności (1.2) i fakt, że w dielektryku nie ma wolnych ładunków ($\rho = 0$), równania *Maxwella* dla ośrodka dielektrycznego i izotropowego przyjmą postać

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.3a)$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.3b)$$

$$\text{div } \varepsilon \vec{E} = 0 \quad (1.3c)$$

$$\text{div } \mu \vec{H} = 0 \quad (1.3d)$$

1.2. Równania falowe

Bezpośrednio z równań *Maxwella* nie wynika fakt rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w przestrzeni. Celem wyznaczenia równania falowego konieczna jest eliminacja zmiennych. Dla uproszczenia zagadnienia przyjmuje się, że fala rozchodzi się w ośrodku jednorodnym (własności w każdym punkcie ciała są jednakowe, to znaczy wartości ε i μ są niezależne od współrzędnych tego punktu).

Różniczkując (1.3a) względem czasu i biorąc operację rotacji z (1.3b) po przyrównaniu otrzymuje się

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Ponieważ z (1.3c) $\text{div } \vec{E} = \frac{\text{div } \varepsilon \vec{E}}{\varepsilon} = 0$ i ponadto z tożsamości $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad } (\text{div } \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, to

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4a)$$

gdzie laplasjan pola wektorowego $\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \vec{i} + \nabla^2 A_y \vec{j} + \nabla^2 A_z \vec{k}$ i $\nabla^2 A_m = \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_m}{\partial z^2}$ ($m = x, y, z$); $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — wersory osi współrzędnych układu prostokątnego x, y, z .

Zamieniając dla równań (1.3a) i (1.3b) operacje różniczkowania i rotacji można otrzymać analogiczną zależność dla wektora natężenia pola

magnetycznego

$$\nabla^2 \bar{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4b)$$

Równania (1.4) są równaniami falowymi dla pola elektrycznego i magnetycznego. Wynika z nich, że charakter zmian obydwu pól jest jednakowy.

Wyznaczone zostanie teraz rozwiązanie tych równań dla najprostszego przypadku fali płaskiej, dla której wartości wektorów natężenia pola elektrycznego i magnetycznego nie zależą od położenia w pewnej płaszczyźnie, zwanej *czołem fali*. Dla ułatwienia rozważań układ współrzędnych jest tak dobrany, aby osie x, y pokrywały się z czołem fali. Wtedy \bar{E} i \bar{H} zależą tylko od współrzędnej z i czasu t , to znaczy $\bar{E} = \bar{E}(z, t)$, $\bar{H} = \bar{H}(z, t)$ i pochodne cząstkowe tych wektorów względem x i y są równe zeru.

Teraz zgodnie z definicją laplasjanu będzie

$$\nabla^2 \bar{V} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \bar{i} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \bar{j} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \bar{k} \quad (\bar{V} = \bar{E}, \bar{H})$$

a równania (1.4) można przepisać w rozbiciu na składowe

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V_m}{\partial t^2} = 0 \quad m = x, y, z \quad (1.5)$$

gdzie

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (1.6)$$

Wprowadzając nowe zmienne

$$p = z - vt; \quad q = z + vt \quad (1.7)$$

zamiast (1.5) otrzymuje się

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial p \partial q} = 0 \quad (1.8)$$

Rozwiązaniem tego równania jest suma dwóch dowolnych funkcji argumentów p i q

$$V_m = V_{m1}(p) + V_{m2}(q) = V_{m1}(z - vt) + V_{m2}(z + vt) \quad (1.9)$$

$$m = x, y, z; \quad V = E, H$$

Łatwo o tym się przekonać wstawiając rozwiązanie (1.9) do (1.8). Pierwsza funkcja przedstawia sobą zaburzenie przemieszczające się w kierunku dodatniego zwrotu osi z z prędkością v , ponieważ funkcja V_{m1} ma tę samą wartość dla dwóch dowolnych chwil t_1 i t_2 w płaszczyznach z_1 i z_2 , jeżeli spełniona jest zależność

$$z_1 - vt_1 = z_2 - vt_2$$

skąd

$$v = \frac{z_1 - z_2}{t_1 - t_2} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Druga funkcja reprezentuje sobą zaburzenie przemieszczające się z prędkością v w kierunku przeciwnym do dodatniego zwrotu osi z . Będą utraty

ogólności rozwiązania można rozpatrywać dalej tylko jedno z zaburzeń np. pierwsze. Różnica między nimi polega tylko na kierunku rozchodzenia się.

Równanie (1.9) rozpisane dla trzech współrzędnych będące rozwiązaniem równań falowych (1.4) dla fali płaskiej, można przepisać teraz w postaci wektorowej

$$\bar{E} = \bar{E}(z-vt) = \bar{E}(p) \quad (1.10a)$$

$$\bar{H} = \bar{H}(z-vt) = \bar{H}(p) \quad (1.10b)$$

Funkcje \bar{E} i \bar{H} poza argumentem i zależnościami między nimi (równania (1.3a, b)) mogą być zupełnie dowolne. Argument $z - vt$ nazywa się *fazą funkcji*. Z równań (1.10) wynika, że dla fali elektromagnetycznej wektory natężenia pola magnetycznego i elektrycznego są zgodne w fazie. Prędkość zaburzenia v jest prędkością rozchodzenia się fazy.

1.2.1. Położenie wektorów \bar{E} i \bar{H} dla fali płaskiej

Korzystając z rozkładu wektora rotacji na składowe wektory (1.10) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{E} &= \bar{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \\ &= -\bar{i} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \bar{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\bar{i} \frac{\partial E_y}{\partial p} + \bar{j} \frac{\partial E_x}{\partial p} \end{aligned}$$

ponieważ $\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial p}$ itd.

Przez analogię $\text{rot } \bar{H} = -\bar{i} \frac{\partial H_y}{\partial p} + \bar{j} \frac{\partial H_x}{\partial p}$

Poza tym $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = -v \frac{\partial \bar{E}}{\partial p}$; $\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -v \frac{\partial \bar{H}}{\partial p}$

Po podstawieniu do (1.3a, b) korzystając z (1.6), otrzymuje się

$$\begin{aligned} -\bar{i} \frac{\partial H_y}{\partial p} + \bar{j} \frac{\partial H_x}{\partial p} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\partial \bar{E}}{\partial p} &= 0 \\ -\bar{i} \frac{\partial E_y}{\partial p} + \bar{j} \frac{\partial E_x}{\partial p} - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} &= 0 \end{aligned}$$

Po scałkowaniu równań względem p , przy założeniu że nie ma stałego pola elektrycznego i magnetycznego (stała całkowania równa się 0), będzie

$$-\bar{i} H_y + \bar{j} H_x + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \bar{E} = 0 \quad (1.11a)$$

$$-\bar{i} E_y + \bar{j} E_x - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \bar{H} = 0 \quad (1.11b)$$

Mnożąc skalarnie (1.11) przez \bar{k} ($\bar{k} \cdot \bar{i} = \bar{k} \cdot \bar{j} = 0$) pozostanie

$$\bar{k} \cdot \bar{E} = 0 \quad \bar{k} \cdot \bar{H} = 0$$