

układu. Zadaniem konstruktora jest takie zestawienie elementów, aby aberracje kompensowały się nawzajem do wartości, która nie będzie miała wpływu na informacje przekazane przez układ. Aberracje układów optycznych będą omówione w p. 2.6.

### 2.3.2. Przestrzeń przesiowa powierzchni sferycznej

Oznaczając dla małych kątów współrzędną  $S$  przez  $s$  można przepisać zależności (2.25) w postaci

$$i = \frac{r-s}{r} u \quad (2.28a)$$

$$i' = \frac{r-s'}{r} u' \quad (2.28b)$$

$$u' = u + i' - i \quad (2.28c)$$

$$n'i' = ni \quad (2.28d)$$

$$h = r\Theta = r(u-i) = r(u'-i') = su = s'u' \quad (2.28e)$$

Ostatnia zależność wynika z równań (2.28a, b).

Dla równań (2.28a, b, c) będzie

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'u'}{r(u'-i')} - \frac{nu}{r(u-i)} = \frac{n'u' - nu}{r(u-i)} = \frac{n'(u-i) + n'i' - nu}{r(u-i)}$$

I ostatecznie uwzględniając wzór (2.28d)

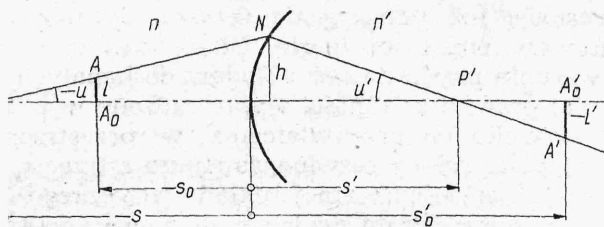
$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \quad (2.29)$$

Zależność tę można przepisać w postaci niezmiennika dla powierzchni załamujących

$$n' \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right) = n \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = Q \quad (2.30)$$

$Q$  nosi nazwę *niezmiennika Abbego*.

Zależność (2.29) lub (2.30) daje regułę przekształcenia osi przedmiotów na oś obrazów. Dla danej powierzchni sferycznej jako układu (znane  $r$ ,  $n$   $n'$ ) promienie świetlne wychodzące pod małym kątem do osi z punktu przestrzeni przedmiotowej w dowolnej odległości  $s$  od powierzchni sferycznej zostaną przez tę powierzchnię skupione na osi w odległości  $s'$  wyznaczonej wspomnianymi wzorami.



Rys. 2.20

Pozostaje jeszcze do rozstrzygnięcia w jaki sposób będą odwzorowane sąsiednie punkty (np.  $A$  na rys. 2.20) leżące poza osią (oś zdefiniowana dla danego przedmiotu  $P$  i środka sfery  $O$ ) w takiej odległości  $l$  od niej, aby kąty jakie tworzą promienie z osią i normalną do powierzchni można było uważać w dalszym ciągu za dostatecznie małe. Na rysunku punkt  $A_0$  leży na osi w płaszczyźnie i prostopadłej do wspomnianej osi przechodzącej przez punkt  $A$ . Punkty  $P'$  i  $A'_0$  są obrazami punktów  $P$  i  $A_0$ . Promień  $PNP'$  utworzy w płaszczyźnie przechodzącej przez  $A'_0$  i prostopadłej do osi ślad  $A'$  na odległości  $l'$  od niej. Jeżeli zostanie udowodnione, że  $l'$  jest niezależne od wybranego promienia przechodzącego przez  $A$ , to będzie to oznaczało, że promienie wychodzące z punktu  $A$  poza osią zostaną skupione w punkcie  $A'$ .

Istotnie z rysunku 2.20

$$\frac{l'}{l} = \frac{(s' - s'_0) u'}{(s - s_0) u} \quad (2.31)$$

Dla punktów  $P$  i  $A_0$  spełnione jest

$$n' \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right) = n \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) \quad n' \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s_0} \right) = n \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s_0} \right)$$

Po odjęciu stronami, wstawieniu do (2.31) i uwzględnieniu (2.28e) ostatecznie będzie

$$\frac{l'}{l} = \frac{ns'_0}{n's_0} \quad (2.32)$$

co kończy dowód.

W przestrzeni przyosiowej sfery punkt zostaje odwzorowany jako punkt. Łatwo również udowodnić, że prosta w przestrzeni przedmiotowej jest odwzorowana jako prosta, w przestrzeni obrazowej. Dowód przeprowadza się przez wprowadzenie trzech dowolnych punktów leżących na prostej w przestrzeni przedmiotowej lub obrazowej i wykazania, że punkty sprzężone leżą również na prostej. A więc przestrzeń przyosiowa sfery spełnia warunki definicji układu doskonałego.

Pozostają teraz do wyznaczenia parametry układu doskonałego dla pojedynczej powierzchni sferycznej. Dla płaszczyzn głównych musi być spełniony warunek  $\beta = 1$ , a więc z równania (2.32)

$$\beta = \frac{l'}{l} = \frac{n}{n'} \frac{s'}{s} = 1 \quad (2.33)$$

Mnożąc (2.29) przez  $s'/n'$  oraz podstawiając do wzoru (2.33) będzie

$$1 - \frac{n' - n}{rn'} s' = 1$$

skąd (ponieważ  $n' \neq n$ ), dla płaszczyzn głównych sfery musi być  $s' = 0$ , a więc i  $s = 0$ . Płaszczyzny główne powierzchni sferycznej pokrywają się z wierzchołkiem tej powierzchni (rys. 2.21).

Ognisko obrazowe jest sprzężone z przedmiotem leżącym w nieskończoności, a więc z równania (2.29) dla  $s \rightarrow \infty$   $s' \rightarrow f'$ , stąd

$$f' = \frac{n'r}{n' - n} \quad (2.34a)$$

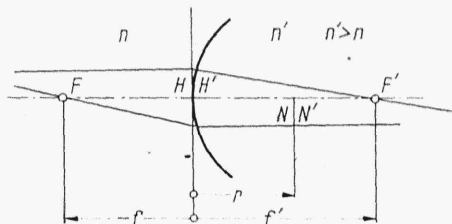
Analogicznie dla  $s' \rightarrow \infty \rightarrow f$ , to jest

$$f = \frac{-nr}{n' - n} \quad (2.34b)$$

Położenie punktów węzłowych zgodnie z wzorami (2.11a) i (2.34) spełnia zależność

$$s'_{N'} = s_N = f' + f = r \quad (2.35)$$

Punkty węzłowe pokrywają się ze środkiem sfery.



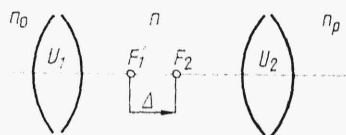
Rys. 2.21

Zgodnie z równaniem (2.34) dla sfery między ogniskową obrazową a przedmiotową istnieje zależność

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n} \quad (2.36)$$

Jest to istotna różnica w stosunku do teoretycznych układów doskonałych, dla których iloraz ten nie był określony.

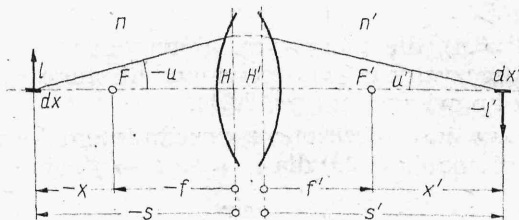
Jeżeli dwa układy doskonale spełniają oddzielnie warunek (2.36), to



Rys. 2.22

układ złożony z tych układów również go spełnia. Dla dowodu niech będą dwa układy  $U_1$  i  $U_2$  (rys. 2.22), dla których  $f'_1/f_1 = -n/n_0$  i  $f'_2/f_2 = -n_p/n$ , wtedy zgodnie z (2.17) będzie

$$\frac{f'}{f} = -\frac{f'_1}{f_1} \cdot \frac{f'_2}{f_2} = -\frac{n_p}{n_0}$$



Rys. 2.23

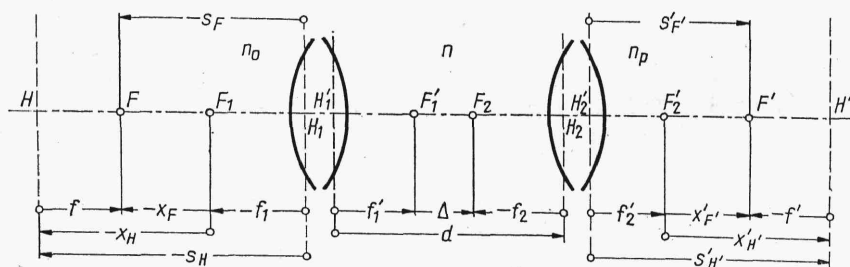
Tablica 2.1. Wzory do obliczania parametrów pojedynczego układu doskonałego (oznaczenia wg rys. 2.23)

Parametry	Wzory dla układu		
	teoretycznego	zachowującego warunek $f' = -\frac{n'}{n}f$	zachowującego warunek $f' = -1(n' = n)$
Wzajemne położenia przedmiotu i obrazu	$xx' = ff'$ $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$ $s' = f'(1 - \beta)$ $s = -f \frac{1 - \beta}{\beta}$	$xx' = -\frac{n}{n'} \frac{f'^2}{f}$ $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{f'}$ $s' = f'(1 - \beta)$ $s = \frac{n}{n'} f' \frac{1 - \beta}{\beta}$	$xx' = -f'^2$ $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$ $s' = f'(1 - \beta)$ $s = f' \frac{1 - \beta}{\beta}$
Powiększenia	$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} = -\frac{s' - f'}{s - f}$ $\beta = \frac{l'}{l} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x} = -\frac{f}{f'} \frac{s'}{s}$ $\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{x}{f'} = \frac{f}{x'} = \frac{s}{s'}$	$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} = \frac{f' - s'}{s + \frac{n}{n'} f'}$ $\beta = \frac{l'}{l} = -\frac{x'}{f'} = \frac{n}{n'} \frac{f'}{x} = \frac{n}{n'} \frac{s'}{s}$ $\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{x}{f'} = -\frac{n}{n'} \frac{f'}{x'} = \frac{s}{s'}$	$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x} = \frac{f' - s'}{f' + s}$ $\beta = \frac{l'}{l} = -\frac{x'}{f'} = \frac{f'}{x} = \frac{s'}{s}$ $\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{x}{f'} = -\frac{f'}{x'} = \frac{s}{s'}$
Zależności między powiększeniami	$\beta\gamma = -\frac{f}{f'}$ $\alpha = -\frac{f'}{f} \beta^2$ $\beta = \alpha\gamma$	$\beta\gamma = \frac{n}{n'}$ $\alpha = \frac{n'}{n} \beta^2$ $\beta = \alpha\gamma$	$\beta\gamma = 1$ $\alpha = \beta^2$ $\beta = \alpha\gamma$
Niezmiennik Lagrange'a-Helmholtza			
	$-lf \operatorname{tg} u = l'f' \operatorname{tg} u'$	$nul = n'u'l'$	$ul = u'l'$

W ten sam sposób można udowodnić tę własność dla dowolnej liczby łączonych układów. Oznacza to, że układ optyczny z obrotową osią symetrii złożony z dowolnej liczby powierzchni sferycznych załamujących w przestrzeni przyosiowej spełnia warunek (2.36).

Aby więc opisać właściwości przestrzeni przyosiowej układu złożonego z dowolnej liczby powierzchni załamujących można powtórzyć wszystkie wzory wyprowadzone dla układu doskonałego z uwzględnieniem warunku (2.36). Zależności dla różnych przypadków zostały zestawione w dwóch tablicach. W tablicy 2.1 dla pojedynczego układu umieszczono równolegle wzory dla układu teoretycznego, dla którego nie jest znany stosunek między ogniskowymi oraz wynikające z nich zależności dla przypadku  $f'/f = -n'/n$  (pojedynczy układ, dla którego przestrzeń, przedmiotowa i obrazowa mają różne współczynniki załamania) i  $f'/f = -1$  (dla układu umieszczonego w ośrodku jednorodnym). Dla układów spełniających warunek (2.36) bierze się pod uwagę kąty, a nie ich tangensy, ponieważ sferyczna powierzchnia załamująca lub ich układ, tylko w przestrzeni przyosiowej spełniają warunki układu doskonałego. Poza tym zależność (2.15) staje się wtedy niezmiennikiem układu, znanym w literaturze pod nazwą *niezmiennika Lagrange'a-Helmholtza*. Aby ułatwić korzystanie z tablicy oznaczenia są podane ponownie na rys. 2.23.

W tablicy 2.2 zestawiono wzory do obliczania parametrów układów złożonych. W pierwszej kolumnie podano wzory dla układów teoretycznych, w pozostałych dwóch dla układów złożonych z załamujących powierzchni sferycznych. Środkowa kolumna odnosi się do przypadku różnych współczynników załamania, przy czym przez  $n_0$  oznaczono współczynnik załamania przestrzeni przedmiotowej pierwszego układu, przez  $n$  — przestrzeni obrazowej pierwszego i przedmiotowej drugiego, a przez  $n_p$  — przestrzeni obrazowej drugiego układu. W ostatniej kolumnie zamieszczone są wzory dla układów znajdujących się w jednym ośrodku o współczynniku załamania 1 ( $n_0 = n = n_p = 1$ ). Na rys. 2.24 podano jeszcze raz oznaczenia.



Rys. 2.24

W celu pozbycia się odwrotności w wyrażeniu na ogniskową układu złożonego wprowadza się pojęcie *mocy optycznej układu*, szczególnie często stosowane w okulistyce. Mocą układu  $D$  nazywany jest iloraz współczynnika załamania przestrzeni obrazowej przez ogniskową obrazową układu

$$D = \frac{df}{f'} \frac{n'}{f'} \quad (2.37)$$

Tablica 2.2. Wzory do obliczania parametrów układu złożonego (oznaczenia wg rys. 2.24)

Teoretycznego	Zachowującego warunek $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$	
	$n_0, n, n_p$	$n_0 = n = n_p = 1$
$f' = -\frac{f_1 f_2'}{\Delta}; f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$ $x_{F'} = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}; x_F = \frac{f_1 f_1'}{\Delta}$ $x_{H'} = x_{F'} - f'; x_H = x_F - f$	$f' = -\frac{f_1 f_2'}{\Delta}; f = -\frac{n_0}{n_p} f'$ $x_{F'} = \frac{n}{n_p} \frac{f_2'}{\Delta}; x_F = -\frac{n_0}{n} \frac{f_1'}{\Delta}$ $x_{H'} = x_{F'} - f'; x_H = x_F + \frac{n_0}{n_p} f'$	$f' = -\frac{f_1 f_2'}{\Delta} = -f$ $x_{F'} = \frac{f_2'}{\Delta}; x_F = -\frac{f_1'}{\Delta}$ $x_{H'} = x_{F'} - f'; x_H = x_F + f'$
$s_{F'} = f' \left(1 - \frac{d}{f_1}\right)$ $s_F = f \left(1 + \frac{d}{f_2}\right)$	$s_{F'} = f' \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) = \frac{1 - \frac{d}{n_p} D_1}{D} n_p$ $s_F = -\frac{n_0}{n_p} f' \left(1 - \frac{n_p}{n} \frac{d}{f_2'}\right) = -\frac{1 - \frac{d}{n} D_2}{D} n_0$	$s_{F'} = f' \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) = \frac{1 - d D_1}{D}$ $s_F = -f' \left(1 - \frac{d}{f_2'}\right) = -\frac{1 - d D_2}{D}$
$s_{H'} = -\frac{df'}{f_1}; s_H = \frac{df}{f_2}$ $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} \left(-\frac{f_2'}{f_2}\right) + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2'}$ $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \left(-\frac{f_1'}{f_1}\right) + \frac{d}{f_1 f_2}$	$s_{H'} = -\frac{df'}{f_1} = -\frac{n_p}{n} \frac{d D_1}{D}; s_H = \frac{n_0}{n} \frac{d f'}{f_2} = \frac{n_0}{n} \frac{d D_2}{D}$ $\frac{1}{f'} = \frac{n}{n_p} \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2'}$ $D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} D_1 D_2$	$s_{H'} = -\frac{df'}{f_1} = -\frac{d D_1}{D}; s_H = \frac{d f'}{f_2} = \frac{d D_2}{D}$ $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} - \frac{d}{f_1 f_2'}$ $D = D_1 + D_2 - d D_1 D_2$

Jednostką mocy optycznej jest *dioptria* (1/m). Układ ma moc jednej dioptrii, jeżeli  $f'/n' = 1$  m (dla układu znajdującego się w powietrzu, jeżeli ogniskowa obrazowa wynosi 1 m).

Zgodnie z równaniem (2.18a) i ponieważ  $f_2/f'_2 = -n/n_p$  to

$$\frac{n_p}{f'} = \frac{n}{f_1} + \frac{n_p}{f_2} - \frac{d}{n} \frac{n}{f_1} \frac{n_p}{f_2}$$

skąd

$$D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} D_1 D_2 \quad (2.38)$$

Moc układu bezogniskowego równa jest zeru, dla  $f' > 0$  jest dodatnia, a dla  $f' < 0$  — ujemna. Moc pojedynczej powierzchni sferycznej zgodnie z (2.34a)

$$D_{sf} = \frac{n' - n}{r} \quad (2.39)$$

Wychodząc z definicji mocy wzory (2.19c, d, e, f) można przepisać w postaci

$$s'_{F'} = \frac{1 - \frac{d}{n} D_1}{D} n_p \quad (2.40a)$$

$$s'_{H'} = - \frac{d D_1}{D} \frac{n_p}{n} \quad (2.40b)$$

$$s_F = - \frac{1 - \frac{d}{n} D_2}{D} n_0 \quad (2.40c)$$

$$s_H = \frac{d D_2}{D} \frac{n_0}{n} \quad (2.40d)$$

## 2.4. Podstawowe elementy układów optycznych

### 2.4.1. Soczewki

Za soczewkę uważana jest część przestrzeni jednorodnego ośrodka przezroczystego ograniczona dwoma powierzchniami ze wspólną obrotową osią symetrii, z których przynajmniej jedna nie jest płaska. Ośrodkiem tworzącym soczewkę może być ciało stałe (szkło, kwarc, tworzywo sztuczne itp.), ciekłe (np. woda) lub gazowe. W zależności od kształtu powierzchni rozróżnia się soczewki sferyczne i asferyczne. Z uwagi na sporadyczność występowania w układach tych ostatnich (trudności technologiczne) w dalszej części pod pojęciem soczewki rozumieć się będzie wyłącznie soczewki sferyczne.

Ograniczymy się tu tylko do wyznaczenia właściwości soczewki jako układu doskonałego, to znaczy do wyznaczenia zależności w jej przestrzeni przysiołowej, przy czym przez oś optyczną rozumie się prostą łączącą środki krzywizn  $O_1$  i  $O_2$  obu powierzchni sferycznych (rys. 2.25). Dla prostoty zakłada się, że soczewka znajduje się w jednym i jednorodnym ośrodku o bezwzględnym współczynniku załamania  $n_0$ .