

8.3. Niektóre własności przekształcenia Fouriera

Dla prostoty zostaną one wyprowadzone tylko dla jednej zmiennej. W analogiczny sposób można udowodnić te same własności dla dwóch zmiennych.

8.3.1. Własność przesunięcia funkcji

Jeżeli $F[G(x)] = g(\tilde{x})$, to

$$F[G(x-x')] = g(\tilde{x}) \exp(-2\pi i \tilde{x} x') \quad (8.22)$$

gdzie x' jest stałą.

Z definicji przekształcenia Fouriera

$$\begin{aligned} F[G(x-x')] &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x') \exp(-2\pi i \tilde{x} x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x'') \exp(-2\pi i \tilde{x} (x' + x'')) dx'' \end{aligned}$$

gdzie $x - x' = x''$.

Ponieważ x' jest stałe, to

$$\begin{aligned} F[G(x-x')] &= \exp(-2\pi i \tilde{x} x') \int_{-\infty}^{\infty} G(x'') \exp(-2\pi i \tilde{x} x'') dx'' = \\ &= \exp(-2\pi i \tilde{x} x') g(\tilde{x}) \end{aligned}$$

8.3.2. Przekształcenie Fouriera spłotu dwóch funkcji

Splotem dwóch funkcji $G(x)$ i $H(x)$ nazywane jest z definicji wyrażenie

$$I(x') = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) H(x' - x) dx \quad (8.23)$$

symbolicznie oznaczane przez $I = G \otimes H$, x' — parametr.

Zostanie udowodnione, że przekształcenie Fouriera spłotu dwóch funkcji równe jest iloczynowi przekształceń Fouriera tych funkcji. Oznacza to, że jeżeli

$$F[I(x')] = i(\tilde{x}), \quad F[G(x)] = g(\tilde{x}) \quad \text{ i } \quad F[H(x)] = h(\tilde{x})$$

oraz $I = G \otimes H$, to

$$i(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) h(\tilde{x}) \quad (8.24a)$$

W celu udowodnienia z definicji przekształcenia Fouriera oraz dla wyrażenia (8.23) będzie

$$\begin{aligned} i(\tilde{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} I(x') \exp(-2\pi i \tilde{x} x') dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} H(x' - x) \exp(-2\pi i \tilde{x} x') dx' \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę zależność (8.22)

$$\begin{aligned} i(\tilde{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x) h(\tilde{x}) \exp(-2\pi i \tilde{x}x) dx = \\ &= h(\tilde{x}) \int_{-\infty}^{\infty} G(x) \exp(-2\pi i \tilde{x}x) dx = h(\tilde{x}) g(\tilde{x}) \end{aligned}$$

Tę samą zależność dla dwóch zmiennych można napisać w postaci:

$$i(\tilde{x}, \tilde{y}) = g(\tilde{x}, \tilde{y}) h(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (8.24b)$$

jeżeli

$$F[I(x', y')] = i(\tilde{x}, \tilde{y}); \quad F[G(x, y)] = g(\tilde{x}, \tilde{y}); \quad F[H(x, y)] = h(\tilde{x}, \tilde{y})$$

oraz

$$I(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x, y) H(x' - x, y' - y) dx dy$$

Literatura

1. Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. Warszawa 1965. WNT.
2. Bracewell R.: Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania. Warszawa 1968. WNT. (tłum. z ang.).
3. Люстерник Л. А. и др.: Таблицы Бесселевых функций. Москва 1949. Гос. Изд. Тех.-Теор. Лит.
4. McLachlan N. W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. Warszawa 1964. PWN (tłum. z ang.).
5. Trajdos-Wróbel T.: Matematyka dla inżynierów. Warszawa 1965. WNT.

