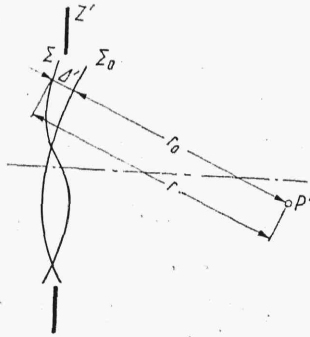


### 3.3.3. Obraz dyfrakcyjny punktu dla układu o małych aberracjach. Przy- padek przeogniskowania

Niech  $\Sigma$  będzie powierzchnią aberracyjną układu o kołowej źrenicy (rys. 3.45), przy czym dla uproszczenia rysunku zjawisko przedstawiono na płaszczyźnie. Amplituda i faza w ustalonym punkcie  $P'$  przestrzeni



Rys. 3.45

obrazowej leżącym w pobliżu obrazu wyznaczonego z praw układu doskonałego opisana jest całkową zależnością (3.79). Jeżeli aberracja falowa jest dostatecznie mała, można wówczas względem niej rozwinąć w szereg wyrażenie podcałkowe zatrzymując się na kilku pierwszych wyrazach i w ten sposób otrzymać przybliżoną zależność pozwalającą oszacować w mniej złożony sposób zmianę intensywności pod wpływem aberracji. W tym celu tworzona jest sfera odniesienia  $\Sigma_0$  o promieniu  $r_0$  ze środkiem krzywizny w punkcie  $P'$ , i wtedy

$$\Delta' = r - r_0 \quad (3.91)$$

jest uogólnioną aberracją falową dla punktu  $P'$ . Zwraca się uwagę na różnice między aberracją falową  $\Delta$  i jej uogólnieniem  $\Delta'$ . Pierwsza zdefiniowana jest dla punktu  $P'^*$  pokrywającym się z obrazem przyosiowym i przechodzącą przez środek źrenicy, druga dla dowolnego punktu  $P'$  i ogólnie nie przechodząca przez środek źrenicy.

Przyjmując, że zmiana amplitudy na odległości  $\Delta'$  jest pomijalnie mała to znaczy, że jest spełnione  $V_{0\Sigma}/r = V_{0\Sigma_0}/r_0$  można dla źrenicy kołowej (rys. 3.41) napisać

$$T_{P'} = \frac{\exp\left[i\left(\Phi - \frac{\pi}{2} + kr_0\right)\right]}{\lambda r_0} V(0, 0) \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_0} \exp(ik\Delta') \rho' d\rho' d\theta \quad (3.92)$$

Intensywność  $D_{P'} = T_{P'} T_{P'}^*$ , ponieważ  $\exp(ik\Delta') = \cos(k\Delta') + i \sin(k\Delta')$

$$D_{P'} = \frac{V^2}{\lambda^2 r_0^2} \left\{ \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_0} \cos(k\Delta') \rho' d\rho' d\theta \right]^2 + \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_0} \sin(k\Delta') \rho' d\rho' d\theta \right]^2 \right\} \quad (3.93)$$

Normując intensywność w punkcie  $P'$  przez

$$D_n(P') = \frac{D_{P'}}{D_0}$$

gdzie zgodnie ze wzorem (3.88)  $D_0 = \frac{(\pi \varrho'_0)^2}{(\lambda r_0)^2} V^2$  jest intensywnością w punkcie obrazu Gaussa dla bezaberracyjnego układu i oznaczając

$$\varrho_N = \frac{\varrho'}{\varrho'_0} \quad 0 \leq \varrho_N \leq 1 \quad (3.95)$$

ponieważ dla małych wartości  $k\Delta'$  można napisać  $\cos(k\Delta') = 1 - \frac{k^2 \Delta'^2}{2}$  i  $\sin(k\Delta') = k\Delta'$  wtedy z (3.93) pozostanie

$$D_n(P') = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( 1 - \frac{k^2 \Delta'^2}{2} \right) \varrho_N d\varrho_N d\Theta \right]^2 + \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^1 k\Delta' \varrho_N d\varrho_N d\Theta \right]^2 \right\}$$

Zgodnie z wyrażeniem (3.95) powierzchnia znormowanej źrenicy wejściowej wynosi

$$S_z = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varrho_N d\varrho_N d\Theta = \pi$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\langle\langle a \rangle\rangle = \frac{1}{\pi} \int_S a dS = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 a \varrho_N d\varrho_N d\Theta \quad (3.96)$$

gdzie przez  $\langle\langle a \rangle\rangle$  rozumie się średnią wartość  $a$  dla całej powierzchni źrenicy, wtedy

$$D_n(P') = \left[ 1 - \frac{k^2 \langle\langle \Delta'^2 \rangle\rangle}{2} \right]^2 + k^2 \langle\langle \Delta' \rangle\rangle^2$$

Rozwijając wyrażenie w nawiasie i opuszczając wyraz z  $(\langle\langle \Delta'^2 \rangle\rangle)^2$  z uwagi na małe wartości  $\Delta'$  pozostanie

$$\boxed{D_n(P') = 1 - k^2 [\langle\langle \Delta'^2 \rangle\rangle - \langle\langle \Delta' \rangle\rangle^2]} \quad (3.97a)$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\Delta' - \langle\langle \Delta' \rangle\rangle)^2 \varrho_N d\varrho_N d\Theta = \langle\langle \Delta'^2 \rangle\rangle - \langle\langle \Delta' \rangle\rangle^2 \quad (3.98)$$

zależność (3.97a) można napisać w postaci bardziej ogólnej

$$D_n(P') = 1 - k^2 \langle\langle [\Delta' - \langle\langle \Delta' \rangle\rangle]^2 \rangle\rangle \quad (3.97b)$$

Najwyższa znormowana intensywność w plamce dyfrakcyjnej równa 1 zachodzi dla układu bezaberracyjnego ( $\Delta' = 0$ ). Ponieważ  $b = \Delta' - \langle\langle \Delta' \rangle\rangle$  jest miarą odchylenia wartości aberracji  $\Delta'$  w danym punkcie źrenicy od jej wartości średniej  $\langle\langle \Delta' \rangle\rangle$  w całej źrenicy, to  $\langle\langle b^2 \rangle\rangle$  jest średnią wartością kwadratu tych odchyleń dla całej źrenicy. A więc spadek intensywności w plamce dyfrakcyjnej dla małych wartości aberracji falowej nie zależy od kształtu powierzchni falowej, a tylko od wartości średniej kwadratowej zniekształcenia fali w źrenicy. Warunek (3.97b) był wyprowadzony dla dowolnej sfery odniesienia oznacza to, że wartość  $\langle\langle [\Delta' - \langle\langle \Delta' \rangle\rangle]^2 \rangle\rangle$  nie zależy od wyboru jej promienia, jeżeli  $\Delta'$  pozostaje małe. Wygodnie jest np. tak dobierać  $r_0$ , aby było spełnione  $\langle\langle \Delta' \rangle\rangle = 0$ . Oblicze-

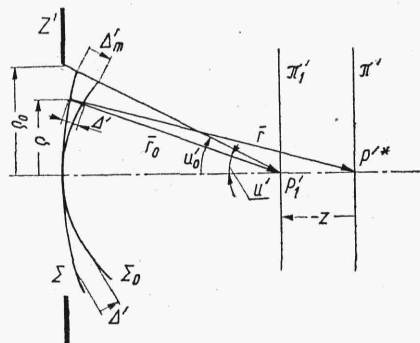
nia wykazują, że przybliżone zależności (3.97) są wystarczająco dokładne jeżeli  $D_n(P')$  nie jest mniejsze niż 0,75.

Stwierdzono, że dla maksymalnej intensywności plamki dyfrakcyjnej w przedziale  $D_n(P') \geq 0,8$  dla oka zmiany obrazu punktu są prawie nieodróżnialne i zwykle ten warunek przyjmowany jest za kryterium korekcji układów wizualnych. Wówczas, ponieważ  $k = 2\pi/\lambda$  dla punktu  $P'_M$  o maksymalnej intensywności w przestrzeni obrazowej z (3.97a) będzie

$$\boxed{\langle \langle \Delta'^2 \rangle \rangle - \langle \langle \Delta' \rangle \rangle^2 \leq \frac{\lambda^2}{200}} \quad (3.98)$$

Warunek ten znany jest pod nazwą *kryterium Maréchała*. Jeżeli jest on spełniony, wówczas spadek intensywności w rozpatrywanym punkcie, w porównaniu z maksymalną intensywnością w plamce dyfrakcyjnej dla układu stygmatycznego nie jest większy niż 20%.

Warunek ten tytułem przykładu zostanie obecnie wykorzystany do wyznaczenia dopuszczalnego przesunięcia płaszczyzny obrazu dla układu bezaberracyjnego poza płaszczyznę Gaussa oraz wielkości aberracji sferycznej III-go rzędu.



Rys. 3.46

Niech  $\Sigma$  (rys. 3.46) będzie sferyczną powierzchnią falową o promieniu  $r$  ze środkiem krzywizny w punkcie  $P'^*$  układu doskonale skorygowanego. Jeżeli źrenica układu ma kształt kołowy, wówczas rozkładem intensywności w płaszczyźnie  $\pi'$  będzie plamka *Airy*. Powstaje pytanie, jaka będzie intensywność na osi układu (p.  $P'_1$ ) w sąsiedniej płaszczyźnie  $\pi'_1$  przesuniętej o  $z$  względem  $\pi'$ . Jest to przypadek tzw. *przeogniskowania*. Zgodnie z rozważaniami poprzedniego punktu  $\Sigma_0$  jest sferą o promieniu  $r_0$  ze środkiem krzywizny w punkcie  $P'_1$  i z uwagi na dowolność  $r_0$  dla uproszczenia styczną do powierzchni  $\Sigma$ , wtedy z rysunku

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \Delta' + \bar{z}$$

Zakładając, że  $z$  i  $\Delta'$  jest małe w porównaniu z  $r_0$ , to podnosząc stronami do kwadratu pozostanie

$$r^2 = r_0^2 + 2r_0\Delta' + 2\bar{r}_0\bar{z}$$

Ponieważ  $r - r_0 = -z$  oraz  $\bar{r}_0\bar{z} = -r_0z \cos u'$ , nadto z dokładnością przybliżenia  $r + r_0 \approx 2r_0$  i dla małych kątów  $u' \cos u' = 1 - u'^2/2$  z uwzględnieniem (3.95) pozostanie

$$\Delta' = \frac{-u_0'^2 z}{2} = -\frac{\varrho_0'^2 z}{2r_0^2} = -\frac{\varrho_0'^2 \varrho_N^2 z}{2r_0^2} = -\frac{u_0'^2 z \varrho_N^2}{2} \quad (3.99)$$

gdzie  $u_0'$  — maksymalny kąt aperturowy przestrzeni obrazowej.

Ujemny znak wynika z umownego przyjęcia dodatnich wartości  $z$  i  $\Delta$  (rys. 3.46).

Oznaczając przez

$$\Delta'_M = -\frac{u_0'^2 z}{2} \quad (3.100)$$

maksymalną wartość aberracji falowej dla  $\varrho_N = 1$  wówczas

$$\Delta' = \Delta'_M \varrho_N^2 \quad (3.101)$$

W celu wyznaczenia  $D_n(P'_1)$  z równania (3.97a) zgodnie z wyrażeniem (3.96) będzie

$$\langle \langle \Delta' \rangle \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \Delta'_M \varrho_N^3 d\varrho_N d\Theta = 2\Delta'_M \int_0^1 \varrho_N^3 d\varrho_N = \frac{\Delta'_M}{2}$$

i

$$\langle \langle \Delta'^2 \rangle \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \Delta_M'^2 \varrho_N^5 d\varrho_N d\Theta = \frac{\Delta_M'^2}{3}$$

a więc

$$D_n(P'_1) = 1 - \frac{k^2 \Delta_M'^2}{12} \quad (3.102)$$

Jest to wzór, który pozwala łącznie z (3.100) wyznaczyć zmianę maksymalnej intensywności w plamce dyfrakcyjnej w zależności od przeogniskowania  $z$ . Z uwagi na stosowane przybliżenia słuszny jest on tylko dla małych wartości  $z$ , dla których spadek intensywności nie jest większy od 0,25.

Zgodnie z kryterium *Maréchała* w przedziale  $k^2 \Delta_M'^2 / 12 \leq 0,2$ , to znaczy dla  $\Delta'_M \leq \lambda/4$  (ponieważ  $k = 2\pi/\lambda$ ) różnice w budowie plamki dyfrakcyjnej wizualnie będą niezauważalne. Uwzględniając (3.100)

$$|z_g| = \frac{\lambda}{2u_0'^2} \quad (3.103)$$

jest więc graniczną wartością przeogniskowania układu.

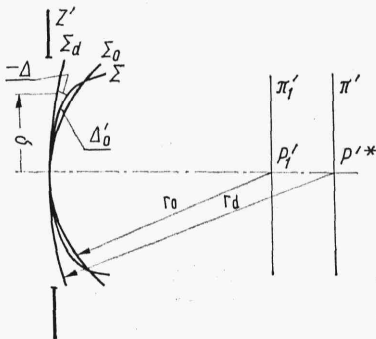
Dla przedmiotów dostatecznie odległych można przyjąć  $2u_0' = 1/N$  gdzie  $N$  liczba otworu układu i wtedy

$$|z_g| = 2\lambda N^2 \quad (3.103b)$$

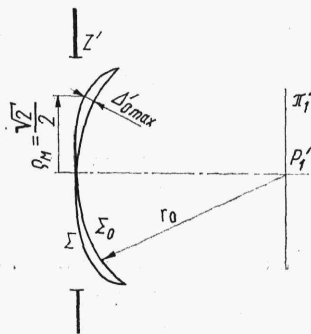
Im mniejszy otwór względny, to znaczy im większa liczba otworu  $N$ , tym niższa dokładność ogniskowania układu. Niech  $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-3}$  mm, to dla  $N = 4$   $z_g = 0,019$  mm, natomiast dla  $N = 10$   $z_g = 0,12$  mm.

Rozpatrując wpływ aberracji sferycznej na spadek maksymalnej intensywności w plamce wystarczy, z uwagi na jej symetrię, zbadać rozkład tylko na osi układu. Niech  $\Sigma$  (rys. 3.47) będzie aberracyjną powierzchnią falową układu określona dla punktowego źródła światła. Jeżeli  $P'^*$  jest jego obrazem *Gaussa*, to gdyby układ był bezaberracyjny, powierzchnia

falowa byłaby powierzchnią sferyczną  $\Sigma_d$  o promieniu  $r_d$  ze środkiem krzywizny w  $P'^*$ . Odległość między powierzchniami  $\Sigma$  i  $\Sigma_d$  jest aberracją falową układu i dla wyznaczenia intensywności w  $P'^*$  wystarczy znaleźć funkcję  $\Delta(\varrho_N)$  i podstawić do wzoru (3.97a), przy czym w tym przypadku  $\Delta \equiv \Delta'$ . Intensywność w sąsiednim punkcie  $P'_1$  byłaby określona za pomocą uogólnionej aberracji  $\Delta'_0$  mierzonej między czołem fali  $\Sigma$  i sferą odniesienia  $\Sigma_0$  ze środkiem krzywizny w  $P'_1$ . Intensywność  $D_n(P'_1)$  jest funkcją położenia punktu  $P'_1$  i maksimum jej zachodziłoby w miejscu, gdzie zgodnie z równaniem (3.97a) spełnione jest  $\ll \Delta'_0 \gg - \ll \Delta'_0 \gg^2 = \text{minimum}$ . Można wykazać (p. 6.4.1), że dla aberracji sferycznej III-ciego rzędu wtedy sfera  $\Sigma_0$  przecina się z powierzchnią falową  $\Sigma$  na brzegu źrenicy  $\varrho_N = 1$  (rys. 3.48). I jeżeli ponadto musi być spełnione  $D_{n \max}(P'_1) \geq 0,8$ ,



Rys. 3.47



Rys. 3.48

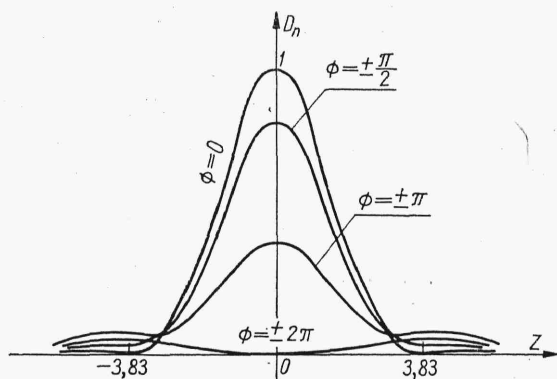
wówczas będzie  $\Delta'_{0 \max} \leq \lambda/4$ . Maksymalna odchyłka powierzchni falowej od sfery odniesienia nie może przekroczyć 1/4 długości fali. Jest to *warunek Lorda Rayleigha*, wyznaczony dla aberracji sferycznej III-ciego rzędu, a którego uogólnieniem znacznie później wyprowadzonym jest kryterium *Maréchala*.

Dla układów, w których z uwagi np. na bardziej ziarnistą strukturę odbiornika (do takich zaliczany jest obiektyw fotograficzny) można dopuścić większe aberracje, które nie spełniają warunków przybliżenia przyjętego przy wyprowadzeniu kryterium *Maréchala*, wyznaczenie rozkładu intensywności w plamce dyfrakcyjnej wymaga obliczeń numerycznych przez rozwinięcie w szereg funkcji podcałkowej (3.92) [1], [7]. Tytułem przykładu w tablicy 3.4 przytoczono wartości intensywności w plamce

**Tablica 3.4. Wartości intensywności w plamce dyfrakcyjnej w przypadku znacznego przeogniskowania dla układu ze źrenicą kołową**

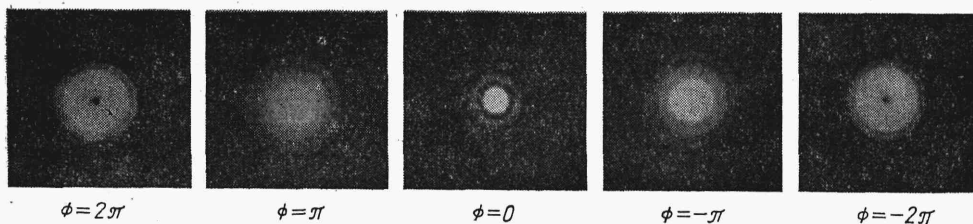
Z	$\phi$				
	0	$\pi/2$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$
0,0	1,0	0,81	0,41	0,00	0,045
1,4	0,60	0,49	0,25	0,005	0,028
2,8	0,087	0,088	0,085	0,035	0,007
4,2	0,004	0,028	0,071	0,047	0,005
5,6	0,014	0,021	0,034	0,035	0,010

dyfrakcyjnej w przypadku znacznego przeogniskowania dla układu ze źrenicą kołową, gdzie zgodnie z zależnościami (3.100) i (3.89)  $\Phi = k\Delta'_M = -ku_0'^2 z/2$ ;  $Z = k\rho_0' w'$ . Tablica zilustrowana jest wykresem (rys. 3.49) i fotografiami plamek dyfrakcyjnych (rys. 3.50) z wyszczególnionymi wartościami  $\Phi$ .



Rys. 3.49

Z porównania wyników zamieszczonych w tablicy i wartości intensywności wyznaczonych z zależności (3.102) dla środka plamki dyfrakcyjnej, którą można przepisać w postaci  $D_n(Z=0) = 1 - \Phi^2/12$ , wynika, że przybliżona zależność dobrze aproksymuje zmianę intensywności w plamce dla  $\Phi = \pm \pi/2$ .

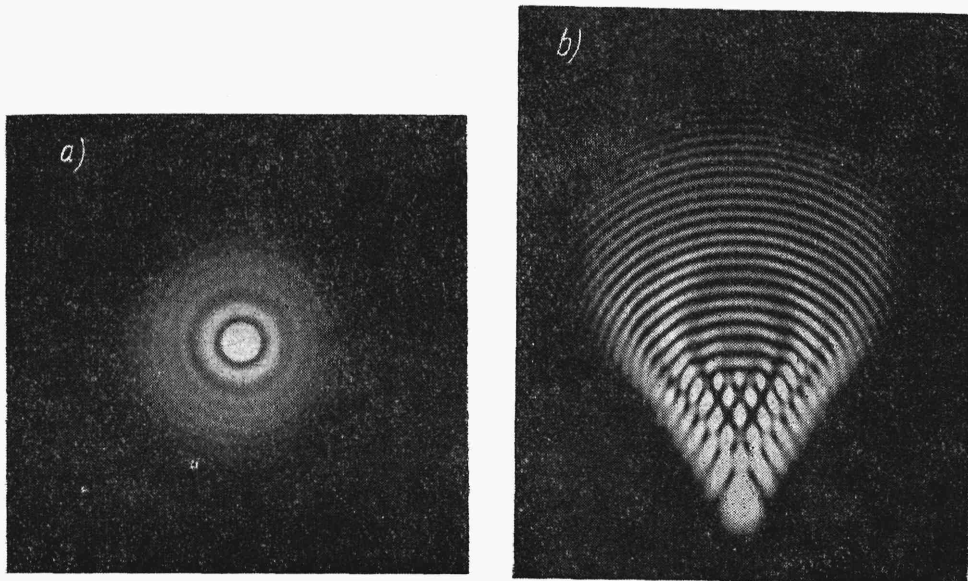


Rys. 3.50

Na rys. 3.51a pokazano plamkę dyfrakcyjną układu obarczonego aberracją sferyczną III-ciego rzędu w płaszczyźnie obrazu przyosiowego, natomiast na rys. 3.51b plamka dla układu obarczonego komą. Można udowodnić, że wraz ze wzrostem aberracji kształt plamki dyfrakcyjnej zbliża się do kształtu plamki rozproszenia wyznaczonej z praw optyki geometrycznej.

Dotychczasowe rozważania o dyfrakcji były prowadzone przy założeniu, że światło jest monochromatyczne. W przypadku źródeł emitujących światło w szerokim przedziale widma podobnie jak przy zagadnieniach interferencji można wyznaczyć plamki dyfrakcyjne w pewnej płaszczyźnie  $\pi'$  dla różnych długości fali i następnie zsumować w niej intensywności. Zagadnienie sumowania jest dość złożone ponieważ ogólnie kształt powierzchni falowych będzie różny dla różnych długości fali.

Podsumowując dotychczasowe rozważania należy podkreślić, że obraz punktowego źródła światła dany przez dowolny układ nigdy nie będzie punktem. Będzie to zawsze plamka o dość złożonym rozkładzie intensywności, zależnym od wymiarów i kształtu źrenicy układu oraz jego aberracji. Obszar plamki będzie malał wraz ze wzrostem wymiarów źrenicy i zmniejszaniem się aberracji. Najwyższe skupienie energii w obrazie punktu dla danej źrenicy występuje wtedy, gdy układ jest bezaberracyjny.



Rys. 3.51

Można stąd wyciągnąć pewne wnioski o ścisłości rozważań opartych na przybliżonych prawach optyki geometrycznej. Z tych ostatnich wynika, że rozkład intensywności w obrazie punktu tym bardziej zbliża się do punktowego, im mniejsze są aberracje. A więc korygowanie aberracji geometrycznych ogólnie poprawia jakość odwzorowania obrazu punktu. Ponadto za pomocą praw optyki geometrycznej można wyznaczyć dość dokładnie położenie płaszczyzn najlepszego odwzorowania, ale zwłaszcza dla układów o małych aberracjach, nie można opisać rozkładu intensywności w płaszczyźnie obrazu. W tym ostatnim przypadku rozważania należy prowadzić na gruncie optyki falowej.

### 3.3.4. Siatki dyfrakcyjne

Niech na siatkę dyfrakcyjną  $A$  (rys. 3.52), będącą ogólnie periodycznym zbiorem pewnych elementów (np. układu szczelin) pada fala płaska  $\Sigma$  o stałej amplitudzie  $V_{0\Sigma}$  i fazie  $\Phi$  tzn.  $V_\Sigma = V_{0\Sigma} \exp(i\Phi)$ . Fala docierając do siatki w jej płaszczyźnie będzie miała stałą amplitudę, ale różną fazę z uwagi na pochylenie  $\Sigma$  względem  $A$ . Falę padającą  $\Sigma_0$  w bieżącym punkcie  $M(\zeta)$  płaszczyzny siatki można zapisać wtedy w postaci

$$V_{\Sigma_0} = V_\Sigma \exp(-ik\zeta \sin \Theta) \quad (3.104)$$