

$$\geq \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| < \delta \wedge x \in A\} - \mu\{x: x \in A \wedge f(x) \notin \langle \alpha_m; b_m \rangle\} \\ \geq \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| < \delta \wedge x \in A\} - \frac{\alpha}{2}$$

a następnie

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \mu\{x: |h(f_n(x)) - h(f(x))| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} = \\ = \mu(A) - \mu\{x: |h(f_n(x)) - h(f(x))| < \varepsilon \wedge x \in A\} \leq \\ \leq \mu(A) - \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| < \delta \wedge x \in A\} + \frac{\alpha}{2} = \\ = \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in A\} + \frac{\alpha}{2}$$

Ale

$$f_n \xrightarrow{\mu, A} f \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta, \alpha \in \mathbb{R} \\ \delta, \alpha > 0}} \bigvee_{\substack{n_0 \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in A\} < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon, \alpha \in \mathbb{R} \\ \varepsilon, \alpha > 0}} \bigvee_{\substack{n_0 \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \mu\{x: |h(f_n(x)) - h(f(x))| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} < \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow h(f_n) \xrightarrow{\mu, A} h(f)$$

§ 215. Twierdzenie Łuzina

- Z 1° \mathcal{L} jest klasą wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n z miarą Lebesgue'a ω , tzn. w przestrzeni z miarą $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \omega)$.
 2° f jest funkcją rzeczywistą skończoną określoną na zbiorze $A \in \mathcal{L}$.
 3° $\omega(A) < \infty$.

T f jest mierzalna ω na zbiorze $A \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{F \in \mathcal{L} \\ F \subset A \\ \omega(A-F) < \varepsilon}} f \text{ jest ciągła na zbiorze } F$

gdzie \bar{F} oznacza domknięcie zbioru F .

D Dowód podzielimy na 6 części T1, ..., T6:

T1 $\bigwedge_{B \in \mathcal{L}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{G \in \mathcal{L}} G \text{ jest zbiorem otwartym} \wedge G \supset B \wedge \omega(G-B) < \varepsilon$

$$\underline{T2} \quad \bigwedge_{B \in \mathcal{L}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{F \in \mathcal{L}} F \text{ jest zbiorem domkniętym} \wedge F \subset B \wedge \omega(B - F) < \varepsilon$$

$$\underline{T3} \quad \bigwedge_{B, C \in \mathcal{L}} (\chi_C \text{ jest funkcją charakterystyczną zbioru } C \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{F = \bar{F} \in \mathcal{L} \\ F \subset B \\ \omega(B - F) < \varepsilon}} \chi_C)$$

χ_C jest ciągła na zbiorze F).

$$\underline{T4} \quad g \text{ jest funkcją prostą mierzalną} \Rightarrow \bigwedge_{B \in \mathcal{L}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{F = \bar{F} \in \mathcal{L} \\ F \subset B \\ \omega(B - F) < \varepsilon}} g \text{ jest ciągła}$$

na zbiorze F

$$\underline{T5} \quad f \text{ jest funkcją mierzalną} \wedge \omega \text{ na zbiorze } A \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{F = \bar{F} \in \mathcal{L} \\ F \subset A \\ \omega(A - F) < \varepsilon}} f \text{ jest}$$

ciągła na zbiorze F

$$\underline{T6} \quad \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{F = \bar{F} \in \mathcal{L} \\ F \subset A \\ \omega(A - F) < \varepsilon}} \rho \text{ jest funkcją ciągłą na zbiorze } F \Rightarrow \rho \text{ jest}$$

funkcją mierzalną ω na zbiorze A

Dowód części T1

Wynika z implikacji (*) w dowodzie twierdzenia (A) w § 171.

Dowód części T2

Ponieważ \mathcal{L} jest σ -ciałem, więc $B \in \mathcal{L} \Rightarrow B^c \in \mathcal{L}$. Na mocy T1

$$\bigwedge_{B \in \mathcal{L}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{G \in \mathcal{L} \\ G \supset B^c \\ \omega(G - B^c) < \varepsilon}} G \text{ jest zbiorem otwartym}$$

Niech

$$F \stackrel{\text{def}}{=} G^c$$

Zatem na mocy § 55 $F = \bar{F}$ i $F \in \mathcal{L}$. Ponadto

$$G \supset B^c \Rightarrow F \subset B$$

$$\omega(B - F) = \omega[(\mathbb{R}^n - B^c) - F] = \omega[(\mathbb{R}^n - F) - B^c] = \omega(G - B^c) < \varepsilon$$

W ten sposób dowód części T2 został zakończony.

Dowód części T3

Na mocy definicji

$$(i) \quad \chi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in C \\ 0 & \text{dla } x \in C^c = \mathbb{R}^n - C \end{cases}$$

Niech

$$(ii) \quad B_1 = B \cap C, \quad B_2 = B \cap C^c, \quad B = B_1 + B_2$$

Na mocy T2

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \left(\bigvee_{\substack{F_1 = \bar{F}_1 \in \mathcal{L} \\ F_1 \subset B_1}} \omega(B_1 - F_1) < \frac{\varepsilon}{2} \right) \vee \left(\bigvee_{\substack{F_2 = \bar{F}_2 \in \mathcal{L} \\ F_2 \subset B_2}} \omega(B_2 - F_2) < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Niech

$$F = F_1 + F_2$$

Wtedy na mocy § 58

$$F = \bar{F} \in \mathcal{L} \\ F \subset B$$

$$\omega(B - F) = \omega[(B_1 - F_1) + (B_2 - F_2)] = \omega(B_1 - F_1) + \omega(B_2 - F_2) < \varepsilon$$

Zbiory F_1 i F_2 są domknięte i rozłączne, wobec czego dla $j = 1, 2$

$$(iii) \quad \bigwedge_{x_1, x_2, \dots \in F_j} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow x \in F_j \right)$$

Ponieważ na mocy (i) i (ii)

$$\bigwedge_{x \in F_1} \chi_C(x) = 1 \wedge \bigwedge_{x \in F_2} \chi_C(x) = 0$$

więc z (iii) wynika, że χ_C jest ciągła na zbiorze F . W ten sposób dowód części T3 został zakończony.

Dowód części T4

Jeżeli g jest funkcją prostą mierzalną, to na mocy § 202

$$\bigvee_{\substack{A_1, \dots, A_m \in \mathcal{L} \\ A_1 + \dots + A_m = \mathbb{R}^n}} \quad \bigvee_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0}} \quad g = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}$$

Na mocy T3

$$\bigwedge_{B \in \mathcal{L}} \bigwedge_{k \in \{1, \dots, m\}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{F_k = \bar{F}_k \in \mathcal{L} \\ F_k \subset B \\ \omega(B - F_k) < \frac{\varepsilon}{m}}} \chi_{A_k} \text{ jest ci\u0105g\u0142a na zbiorze } F_k$$

Niech

$$F = F_1 \cap \dots \cap F_m$$

Wtedy

$$F \stackrel{\S 57}{=} \bar{F} \in \mathcal{L} \\ F \subset B$$

$$\omega(B - F) = \omega(B - F_1 \cap \dots \cap F_m) = \omega[(B - F_1) \cup \dots \cup (B - F_m)] \leq \\ \leq \omega(B - F_1) + \dots + \omega(B - F_m) < \varepsilon$$

Wszystkie funkcje $\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_m}$ s\u0105 ci\u0105g\u0142e na zbiorze F , wobec czego funkcja

$$g = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}$$

jest r\u00f3wnie\u017c ci\u0105g\u0142a na zbiorze F , co ko\u0144czy dow\u00f3d cz\u0119\u015bci T4.

Dow\u00f3d cz\u0119\u015bci T5

Za\u0142\u00f3\u017amy najpierw, \u017ce funkcja f mierzalna ω na zbiorze A (z za\u0142o\u017cenia sko\u0144czona i okre\u015blona na ca\u0142ym zbiorze $A \in \mathcal{L}$ takim, \u017ce $\omega(A) < \infty$) jest nieujemna. Na mocy twierdzenia \S 203 istniej\u0105 takie funkcje proste mierzalne f_1, f_2, \dots \u017ce

$$f \stackrel{A}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \stackrel{(\text{pr.w9})}{\implies} f \stackrel{\text{pr.w } A}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \stackrel{(\text{pr.j } 11)}{\implies} f \stackrel{\text{pr.j } A}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \implies \\ \implies \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{C \in \mathcal{L} \\ C \subset A \\ \omega(A - C) < \frac{\varepsilon}{4}}} f_k \stackrel{j.C}{\rightarrow} f$$

Na mocy T2

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{C \in \mathcal{L}} \bigvee_{\substack{D \in \mathcal{L} \\ D \subset C \\ \omega(C - D) < \frac{\varepsilon}{4}}} D = \bar{D}$$

Poniewa\u017c

$$D \subset A \wedge \omega(A - D) = \omega(A - C) + \omega(C - D) < \frac{\varepsilon}{2}$$

zatem na mocy własności (jz3)

$$(iv) \quad \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{D - \bar{D} \in \mathcal{L} \\ D \subset A \\ \omega(A-D) < \frac{\varepsilon}{2}}} f_k \xrightarrow{j \cdot D} f$$

Na mocy T4

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} \bigvee_{\substack{F_k = \bar{F}_k \in \mathcal{L} \\ F_k \subset A \\ \omega(A-F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}}} f_k \text{ jest ciągła na zbiorze } F_k$$

Niech teraz

$$F \stackrel{\text{def}}{=} D \cap F_1 \cap F_2 \cap \dots$$

Na mocy § 57 zbiór F jest domknięty, a więc na mocy powyższego

$$F = \bar{F} \in \mathcal{L} \\ F \subset A$$

$$\omega(A-F) = \omega[(A-D) \cup (A-F_1) \cup (A-F_2) \cup \dots] \leq \\ \leq \omega(A-D) + \omega(A-F_1) + \omega(A-F_2) + \dots < \varepsilon$$

Ponieważ

$$\bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} F \subset F_k$$

więc funkcje f_1, f_2, \dots są ciągłe na zbiorze F . Z drugiej strony na mocy własności (jz3)

$$f_k \xrightarrow{j \cdot F} f$$

Wobec tego na mocy własności (jz15) f jest funkcją ciągłą na zbiorze F . Stwierdzenie to kończy dowód w przypadku, gdy f jest funkcją nieujemną.

W przypadku ogólnym niech

$$h_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max(0, f), \quad h_2 \stackrel{\text{def}}{=} \max(0, -f)$$

Na mocy twierdzenia § 185 funkcja $-f$ jest mierzalna ω na zbiorze A , a na mocy twierdzenia § 197 funkcje h_1 i h_2 są mierzalne ω na zbiorze A . Ponadto z definicji funkcje h_1 i h_2 są określone na całym zbiorze A i skończone na tym zbiorze. Obie są nieujemne. Wobec tego na mocy udowodnionego już przypadku

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{H_1, H_2 \in \mathcal{L} \\ H_1, H_2 \text{ domknięte} \\ H_1, H_2 \subset A \\ \omega(A - H_1) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \omega(A - H_2) < \frac{\varepsilon}{2}}} h_1 \text{ jest ciągła na zbiorze } H_1 \wedge h_2 \text{ jest ciągła na zbiorze } H_2$$

Niech teraz

$$F \stackrel{\text{def}}{=} H_1 \cap H_2$$

Mamy

$$F = \bar{F} \in \mathcal{L}$$

$$F \subset A$$

$$\omega(A - F) = \omega[(A - H_1) \cup (A - H_2)] \leq \omega(A - H_1) + \omega(A - H_2) < \varepsilon$$

Ponadto funkcje h_1 i h_2 są ciągłe na zbiorze F i wobec tego funkcja

$$f = h_1 - h_2$$

jest również ciągła na tym zbiorze. Stwierdzenie to kończy dowód części T5.

Dowód części T6

Z założenia

$$\bigwedge_{k \in \mathfrak{R}} \bigvee_{\substack{F_k = \bar{F}_k \in \mathcal{L} \\ F_k \subset A \\ \omega(A - F_k) < \frac{1}{k}}} f \text{ jest funkcją ciągłą na zbiorze } F_k$$

Niech

$$B \stackrel{\text{def}}{=} A - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathcal{L}$$

Mamy

$$\omega(B) = \omega\left(A - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathfrak{R}} \omega(B) \leq \omega(A - F_k) < \frac{1}{k} \Rightarrow \omega(B) = 0$$

Jest zatem

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k + B, \text{ gdzie } \omega(B) = 0$$

Wobec tego

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{R}} \{x: f(x) \leq \alpha \wedge x \in A\} = \\ = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x: f(x) \leq \alpha \wedge x \in F_k\} + \{x: f(x) \leq \alpha \wedge x \in B\}$$

Na mocy tego, że funkcja f jest ciągła na każdym ze zbiorów F_k , zbiory

$$\{x: f(x) \leq \alpha \wedge x \in F_k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

są domknięte, a więc należą do klasy \mathcal{L} . Następnie zbiór

$$\{x: f(x) \leq \alpha \wedge x \in B\} \subset B$$

i na mocy twierdzenia Carathéodory'ego z § 111 jest mierzalny ω i ma miarę 0. Ze względu na to, że klasa \mathcal{L} jest σ -ciałem, wynika z powyższego

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{R}} \{x: f(x) \leq \alpha \wedge x \in A\} \in \mathcal{L}$$

Ponieważ

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{R}} \{x: f(x) < \alpha \wedge x \in A\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x: f(x) \leq \alpha - \frac{1}{k} \wedge x \in A\}$$

więc

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{R}} \{x: f(x) < \alpha \wedge x \in A\} \in \mathcal{L}$$

wobec czego f jest funkcją mierzalną ω na zbiorze A .

W ten sposób dowód części T6 i całego twierdzenia Łuzina został zakończony.

§ 216. Dystrybuanta funkcji mierzalnej

Niech będzie dana przestrzeń z miarą unormowaną (X, \mathcal{S}, ν) i funkcja f mierzalna i skończona na całej przestrzeni X . Funkcja f odwzorowuje przestrzeń X w przestrzeń \mathfrak{R} . Niech \mathcal{B} oznacza ciało zbiorów borelowskich na prostej \mathfrak{R} . Na mocy twierdzenia § 183

$$\bigwedge_{B \in \mathcal{B}} \{x: f(x) \in B\} \in \mathcal{S}$$

Wzorem

$$(143) \quad \bigwedge_{B \in \mathcal{B}} \nu_f(B) \stackrel{\text{def}}{=} \nu\{x: f(x) \in B\}$$

określamy miarę unormowaną na σ -ciele \mathcal{B} . Istotnie, ν_f jest funkcją rzeczywistą nieujemną o dziedzinie będącej σ -ciałem przestrzeni \mathfrak{X} , więc spełnia warunki ($\nu 1$) i ($\nu 2$) dla miary unormowanej. Następnie

$$\nu_f(\mathfrak{X}) = \nu\{x: f(x) \in \mathfrak{X}\} = \nu(X) = 1$$

czyli funkcja ν_f spełnia również warunek ($\nu 3$). Wreszcie

$$\begin{aligned} \nu_f\left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k\right) &= \nu\left\{x: f(x) \in \sum_{k=1}^{\infty} B_k\right\} = \nu\left(\sum_{k=1}^{\infty} \{x: f(x) \in B_k\}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \nu\{x: f(x) \in B_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_f(B_k) \end{aligned}$$

czyli funkcja ν_f spełnia także warunek ($\nu 4$) i jest miarą unormowaną.

Funkcja f generuje zatem nową przestrzeń z miarą unormowaną $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \nu_f)$. Dystrybuantę miary ν_f będziemy nazywać dystrybuantą funkcji mierzalnej f . Zatem dystrybuantą funkcji f jest funkcja $F(x)$ określona wzorem

$$(144) \quad \bigwedge_{x \in \mathfrak{X}_0} F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_f[(-\infty; x)] = \nu\{t: f(t) < x\}$$

Z definicji wynika, że w przestrzeni z miarą unormowaną (X, \mathcal{S}, ν) każda funkcja f mierzalna i skończona na całej przestrzeni X ma dystrybuantę określoną jednoznacznie wzorem (144). Natomiast, odwrotnie, dystrybuanta nie wyznacza jednoznacznie funkcji f , gdyż dwie różne funkcje mogą mieć wspólną dystrybuantę, jak to pokazuje następujący przykład.

Przykład. $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{S} = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \emptyset\}$,
 $\nu(\{0\}) = \nu(\{1\}) = \frac{1}{2}$, $\nu(\{0, 1\}) = 1$, $\nu(\emptyset) = 0$.

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}, \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Jest $f \neq g$, natomiast

$$\nu\{t: f(t) < x\} = \nu\{t: g(t) < x\} = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

Na mocy twierdzenia § 114 dystrybuanta F funkcji mierzalnej f jest dystrybuantą jednowymiarową, a więc na mocy § 103 i § 77 ma następujące własności:

(145) F jest funkcją rzeczywistą określoną w całej przestrzeni \mathfrak{R}_0 ,

(146) F jest niemalejąca,

(147) F jest lewostronnie ciągła,

(148) $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,

(149) $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

§ 217. Twierdzenie

Dystrybuanta jednowymiarowa ma co najwyżej przeliczalnie wiele punktów nieciągłości.

D] Niech F będzie dystrybuantą jednowymiarową i niech

$$B_n = \left\{ x: \frac{1}{n+1} < F(x+) - F(x) \leq \frac{1}{n} \right\}$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Zbiór B jest zbiorem wszystkich punktów nieciągłości danej dystrybuanty F .

Ze względu na własność (146) i warunek

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

wynikający z własności (146), (148) i (149), zbiór B_n ma mniej niż $n+1$ punktów. Wobec tego punkty zbioru B można ustawić w ciąg, wypisując najpierw punkty zbioru B_1 , potem punkty zbioru B_2 itd. Oznacza to, że zbiór B jest co najwyżej przeliczalny.

§ 218. Ciągi dystrybuant jednowymiarowych

Niech F_1, F_2, \dots będą dystrybuantami jednowymiarowymi. Mówimy, że ciąg dystrybuant jednowymiarowych (F_n) jest zbieżny pod-

stawowo do funkcji F wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego x będącego punktem ciągłości funkcji F jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

Z definicji wynika, że funkcja graniczna F jest niemalejąca i $0 \leq F(x) \leq 1$, ponieważ wszystkie funkcje F_1, F_2, \dots są niemalejące i ograniczone liczbami 0 i 1. Natomiast funkcja graniczna F nie musi być dystrybuantą. Przykładem może być ciąg dystrybuant

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq n \\ 1 & \text{dla } x > n \end{cases}$$

zbieżny podstawowo do funkcji $F(x) = 0$ nie będącej dystrybuantą z uwagi na niespełniony warunek (149).

W przypadku gdy funkcja graniczna F jest dystrybuantą, mówimy, że ciąg dystrybuant jednowymiarowych jest słabo zbieżny do dystrybuanty F i piszemy

$$F_n \xrightarrow{\text{st}} F \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n \stackrel{\text{st}}{=} F$$

§ 219. Zbieżność według dystrybuant

Mówimy, że ciąg (f_n) jest zbieżny według dystrybuant do funkcji f i piszemy

$$f_n \xrightarrow{\text{dys}} f \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{\text{dys}}{=} f$$

wtedy i tylko wtedy, gdy w danej przestrzeni z miarą unormowaną (X, \mathcal{S}, ν) :

- 1° f, f_1, f_2, \dots są funkcjami mierzalnymi i skończonymi na całej przestrzeni X .
- 2° F, F_1, F_2, \dots są dystrybuantami odpowiednio funkcji f, f_1, f_2, \dots
- 3° $F_n \xrightarrow{\text{st}} F$.

Zbieżność według dystrybuant ma następujące własności:

(dys1) funkcje f i g mają wspólną dystrybuantę $\wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}}$ funkcje f_n i g_n mają wspólną dystrybuantę $\Rightarrow (f_n \xrightarrow{\text{dys}} f \Leftrightarrow g_n \xrightarrow{\text{dys}} g)$

(Własność powyższa oznacza, że zbieżność według dystrybuant jest w istocie określona w zbiorze klas funkcji o wspólnych dystrybuantach).

D) Wynika z definicji zbieżności według dystrybuant.

$$(dys2) \quad f_n \xrightarrow{\text{dys}} f \Rightarrow \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathfrak{N}} f_{m_n} \xrightarrow{\text{dys}} f$$

D) Wynika z definicji zbieżności według dystrybuant.

$$(dys3) \quad f_n \xrightarrow{\mu} f \wedge \mu(X)=1 \wedge f, f_1, f_2, \dots \text{ mierzalne i skończone na całej przestrzeni } X \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{dys}} f$$

D) Z założenia

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \delta$$

Niech F, F_1, F_2, \dots będą dystrybuantami odpowiednio funkcji f, f_1, f_2, \dots . Mamy na mocy (144) dla dowolnego $n \in \mathfrak{N}$

$$\begin{aligned} F(x - \varepsilon) &= \mu\{t: f(t) < x - \varepsilon\} = \\ &= \mu\{t: f(t) < x - \varepsilon \wedge f_n(t) < x\} + \\ &+ \mu\{t: f(t) < x - \varepsilon \wedge f_n(t) \geq x\} \leq \\ &\leq \mu\{t: f_n(t) < x\} + \mu\{t: |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\} = \\ &= F_n(x) + \mu\{t: |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mu\{t: f_n(t) < x\} = \\ &= \mu\{t: f_n(t) < x \wedge f(t) < x + \varepsilon\} + \\ &+ \mu\{t: f_n(t) < x \wedge f(t) \geq x + \varepsilon\} \leq \\ &\leq \mu\{t: f(t) < x + \varepsilon\} + \mu\{t: |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\} = \\ &= F(x + \varepsilon) + \mu\{t: |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} F(x - \varepsilon) - \delta \leq F_n(x) \leq F(x + \varepsilon) + \delta$$

Przechodząc z $\varepsilon \rightarrow 0$ otrzymujemy na mocy lewostronnej ciągłości dystrybuant

$$\bigwedge_{\delta \in \mathfrak{N}} \bigvee_{\varepsilon_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} F(x) - \delta \leq F_n(x) \leq F(x+) + \delta$$

Wobec tego w każdym punkcie ciągłości x dystrybuanty $F(x)$ czyli w każdym punkcie, w którym

$$F(x+) = F(x)$$

mamy

$$\bigwedge_{\substack{\delta \in \mathfrak{N} \\ \delta > 0}} \bigvee_{\varepsilon_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} |F_n(x) - F(x)| \leq \delta$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

Zatem

$$F_n \xrightarrow{\text{st}} F \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{dys}} f$$

(dys4) $f_n \xrightarrow{\text{pr.j}} f \wedge \mu(X)=1 \wedge f, f_1, f_2, \dots$ mierzalne i skończone na całej przestrzeni $X \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{dys}} f$

D] Wynika z własności (wμ9) i (dys3).

(dys5) $f_n \xrightarrow{\text{pr.w}} f \wedge \mu(X)=1 \wedge f, f_1, f_2, \dots$ mierzalne i skończone na całej przestrzeni $X \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{dys}} f$

D] Wynika z własności (prj11) i (dys4).

(dys6) $f_n \xrightarrow{j} f \wedge \mu(X)=1 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{dys}} f$

D] Wynika z definicji zbieżności jednostajnej i własności (wμ10) oraz (dys3).

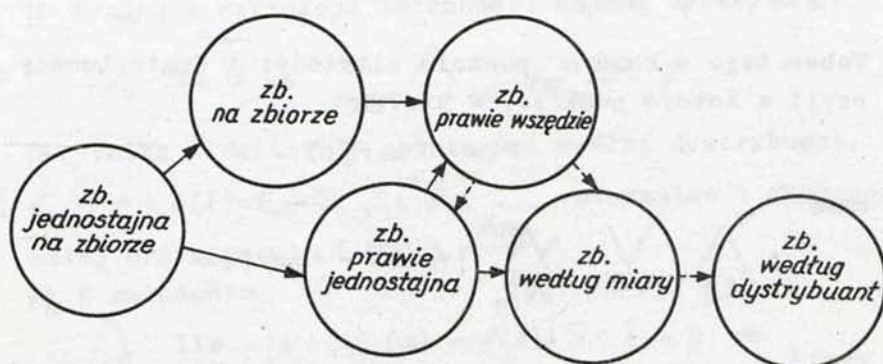
(dys7) $f_n \rightarrow f \wedge f, f_1, f_2, \dots$ są funkcjami skończonymi na całej przestrzeni $X \wedge \mu(X)=1 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{dys}} f$

D] Wynika z definicji zbieżności na zbiorze i własności (wμ12) i (dys3).

§ 220. Związki między poszczególnymi typami zbieżności

Na mocy własności (jz6), (prw9), (prj10), (prj1), (prj11), (wμ9), (wμ11), (wμ12) i (dys3) zależności między poszczególnymi

typami zbieżności można przedstawić następującym wykresem, gdzie liniami przerywanymi oznaczono implikacje przy dodatkowych założeniach:



VI. CAŁKA LEBESGUE'A

§ 221. Wiadomości wstępne

W elementarnym kursie analizy matematycznej wyklada się pojęcie całki Riemanna. Intuicyjna interpretacja tej całki jako objętości obszaru stwarza możliwości wygodnego podejścia dydaktycznego. W wielu działach matematyki pojęcie całki Riemanna staje się jednak niewystarczające i dąży się do jego uogólnienia. Najszerzej znanym i stosowanym uogólnieniem jest tzw. całka Lebesgue'a. Posiada ona następujące podstawowe zalety:

- można ją zdefiniować nie tylko w przestrzeniach euklidesowych, jak to było w przypadku całki Riemanna, ale również w dowolnych przestrzeniach z miarą,
- w przestrzeniach euklidesowych całka Lebesgue'a daje się zdefiniować dla znacznie szerszej klasy funkcji aniżeli całka Riemanna,
- w przestrzeniach euklidesowych, jeśli istnieje całka Riemanna, to istnieje również całka Lebesgue'a i obie całki są równe, co świadczy o tym, że całka Lebesgue'a jest istotnie uogólnieniem całki Riemanna,
- pomimo swego ogólniejszego charakteru całka Lebesgue'a ma bardziej regularne własności niż całka Riemanna, co świadczy o "naturalności" dokonanego uogólnienia.

Całkę Lebesgue'a wyklada się obecnie inaczej i ogólniej niż podał Lebesgue, ale w nazwie pozostało nazwisko Lebesgue'a, jako autora głównej idei prowadzącej do obecnej definicji.

Punktem wyjścia dla obecnej definicji całki Lebesgue'a jest spostrzeżenie, że całka Riemanna funkcji "schodkowej", tzn. funkcji przedziałami stałej, po figurze elementarnej jest sumą iloczynów wartości funkcji przez objętości odpowiednich przedziałów, a całkę Riemanna dowolnej funkcji po dowolnym obszarze określa się jako granicę całek funkcji schodkowych po figurach elementarnych. Naprowadza to na myśl, aby całkę Lebesgue'a w dowolnej przestrzeni z miarą określić najpierw dla funkcji prostych, analogicz-

nie jak całkę Riemanna dla funkcji schodkowych, a następnie przez przejście do granicy uzyskać całkę Lebesgue'a dla dowolnych funkcji mierzalnych.

§ 222. Definicja całki Lebesgue'a dla funkcji prostych

Niech będzie dana dowolna przestrzeń z miarą (X, \mathcal{S}, μ) , zbiór $A \in \mathcal{S}$ i funkcja prosta mierzalna

$$(150) \quad f = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}$$

gdzie

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \wedge \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0 \wedge \alpha_i \neq \alpha_j \text{ dla } i \neq j$$

$$A \cap A_1, \dots, A \cap A_m \in \mathcal{S} \wedge A_1 + \dots + A_m = X$$

$\alpha \chi_{A_k}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A_k ($k = 1, \dots, m$).

Całkę Lebesgue'a funkcji (150) po zbiorze $A \in \mathcal{S}$ określamy wzorem

$$(151) \quad \int_A f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(A_k \cap A)$$

Stąd w szczególności

$$(152) \quad \int_X f d\mu = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(A_k)$$

Zauważmy, że całka (151) funkcji prostej mierzalnej na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ zawsze istnieje i jest nieujemna, choć może przybierać wartość ∞ .

§ 223. Twierdzenie

Z] 1° (f_n) i (g_n) są ciągami niemalejącymi funkcji prostych mierzalnych w przestrzeni z miarą (X, \mathcal{S}, μ) na zbiorze $A \in \mathcal{S}$,

$$2^\circ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n.$$

$$\text{T]} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu$$

D] Dowód podzielimy na trzy części T1, T2, T3.

- T1** $A \in \mathcal{S} \wedge h_1, h_2$ są funkcjami prostymi mierzalnymi na zbiorze $A \wedge h_1 \leq h_2$ na zbiorze $A \Rightarrow \int_A h_1 d\mu \leq \int_A h_2 d\mu$.
- T2** $A \in \mathcal{S} \wedge (h_n)$ jest ciągiem niemalejącym funkcji prostych mierzalnych na zbiorze $A \wedge h$ jest funkcją prostą mierzalną na zbiorze $A \wedge h \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A h_n d\mu = \int_A h d\mu$
- T3** Twierdzenie dowodzone.

Dowód części T1

Niech

$$h_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^p c_k \chi_{C_k}, \quad h_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^q d_l \chi_{D_l}$$

gdzie

$$c_1, \dots, c_p; d_1, \dots, d_q \in \mathbb{R} \wedge c_1, \dots, c_p; d_1, \dots, d_q \geq 0 \wedge c_i \neq c_j \text{ dla } i \neq j \wedge d_i \neq d_j \text{ dla } i \neq j$$

$$C_1 + \dots + C_p = D_1 + \dots + D_q = X$$

$$A \cap C_1, \dots, A \cap C_p; A \cap D_1, \dots, A \cap D_q \in \mathcal{S}$$

Niech

$$E_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} A \cap C_k \cap D_l = (A \cap C_k) \cap (A \cap D_l) \in \mathcal{S}$$

Mamy wtedy

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, p\}} A \cap C_k = \sum_{l=1}^q E_{kl}$$

$$\bigwedge_{l \in \{1, \dots, q\}} A \cap D_l = \sum_{k=1}^p E_{kl}$$

Stąd

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, p\}} \mu(A \cap C_k) = \sum_{l=1}^q \mu(E_{kl})$$

$$\bigwedge_{l \in \{1, \dots, q\}} \mu(A \cap D_l) = \sum_{k=1}^p \mu(E_{kl})$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}
 \int_A h_1 d\mu &= \sum_{k=1}^p c_k \mu(A \cap C_k) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q c_k \mu(E_{kl}) \\
 (*) \quad \int_A h_2 d\mu &= \sum_{l=1}^q d_l \mu(A \cap D_l) = \sum_{l=1}^q \sum_{k=1}^p d_l \mu(E_{kl})
 \end{aligned}$$

Dla $\mu(E_{kl}) \neq 0$ na mocy założenia $h_1 \leq h_2$ na zbiorze A mamy

$$\begin{aligned}
 \bigwedge_{x \in E_{kl}} x \in C_k \wedge x \in D_l &\Rightarrow \bigwedge_{x \in E_{kl}} h_1(x) = c_k \leq h_2(x) = d_l \Rightarrow \\
 &\Rightarrow c_k \mu(E_{kl}) \leq d_l \mu(E_{kl})
 \end{aligned}$$

Na mocy (*) otrzymujemy stąd

$$\int_A h_1 d\mu \leq \int_A h_2 d\mu$$

Dowód części T2

Na mocy uczynionych założeń granicą

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A h_n d\mu$$

zawsze istnieje, ponieważ na mocy T1 ciąg $(\int_A h_n d\mu)$ jest niemalejący. Niech

$$h = \sum_{k=1}^p c_k \chi_{C_k}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R} \wedge c_1, \dots, c_p \geq 0 \wedge c_i \neq c_j \text{ dla } i \neq j \\
 C_1 + \dots + C_p = X \wedge A \cap C_1, \dots, A \cap C_p \in \mathcal{S}
 \end{aligned}$$

Niech

$$t \in \mathbb{R} \wedge 0 < t < 1 \wedge D_{kn} \stackrel{\text{def}}{=} A \cap C_k \{x: h_n(x) \geq t c_k\} \in \mathcal{S}$$

Wtedy

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} D_{kn} \subset A \cap C_k \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{kn} \subset A \cap C_k$$

Z drugiej strony na mocy założenia, że $h \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$

$$\bigwedge_{x \in A \cap C_k} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} h_m(x) \geq t h(x) = t c_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{x \in A \cap C_k} \bigvee_{m \in \mathfrak{N}} x \in D_{km} \Rightarrow A \cap C_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{kn}$$

Zatem

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, p\}} \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{kn} = A \cap C_k$$

Ponieważ z założenia, że ciąg (h_n) jest niemalejący na zbiorze A wynika, że

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, p\}} D_{k1} \subset D_{k2} \subset \dots$$

więc na mocy własności (m7) miary

$$(**) \quad \bigwedge_{k \in \{1, \dots, p\}} \mu(A \cap C_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D_{kn})$$

Wprowadźmy teraz funkcje proste mierzalne na zbiorze A

$$g_n = \sum_{k=1}^p t c_k \chi_{D_{kn}}$$

przyjmujące na zbiorze $(D_{1n} + \dots + D_{pn})^c$ wartość zero. Zachodzi nierówność

$$g_n \leq h_n \leq h \quad \text{na zbiorze } A$$

wynikająca z definicji zbiorów D_{kn} , definicji funkcji g oraz z założenia, że ciąg (h_n) jest niemalejący i zbieżny do funkcji h , na zbiorze A .

Na mocy T1

$$\int_A g_n d\mu \leq \int_A h_n d\mu \leq \int_A h d\mu$$

gdzie

$$\int_A g_n d\mu = \sum_{k=1}^p t c_k \mu(D_{kn})$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} t \int_A h d\mu &= \sum_{k=1}^p t c_k \mu(A \cap C_k) \stackrel{(**)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p t c_k \mu(D_{kn}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu \end{aligned}$$

więc jest

$$t \int_A h d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A h_n d\mu \leq \int_A h d\mu$$

skąd na mocy dowolności liczby $t \in (0;1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A h_n d\mu = \int_A h d\mu$$

Dowód części T3

Niech (f_n) i (g_n) będą ciągami niemalejącymi funkcji prostych mierzalnych na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ i niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

Na mocy T1 ciągi liczbowe

$$\left(\int_A f_n d\mu \right) \quad \text{ i } \quad \left(\int_A g_n d\mu \right)$$

są niemalejące i wobec tego istnieją granice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \quad \text{ i } \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu$$

Wprowadźmy funkcje

$$h_n = \min(f_n, g_m), \quad n = 1, 2, \dots$$

gdzie m jest dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Ze względu na to, że funkcja g_m jest tu ustalona, ciąg (h_n) jest również niemalejącym ciągiem funkcji prostych i mierzalnych na zbiorze A na mocy twierdzenia § 197. Zauważmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \stackrel{A}{=} g_m$$

Istotnie, dla każdego $x \in A$ mamy alternatywę

$$g_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \vee g_m(x) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

W pierwszym przypadku na mocy założenia jest

$$g_m(x) \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

a z faktu, że ciąg (f_n) jest niemalejący na zbiorze A wynika, że

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{x \in A} f_n(x) \leq g_m(x)$$

skąd

$$h_n(x) \stackrel{A}{=} f_n(x)$$

i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{A}{=} g_m(x)$$

W drugim przypadku z faktu, że ciąg (g_m) jest niemalejący na zbiorze A wynika, że

$$\begin{aligned} \bigwedge_{x \in A} g_m(x) &< \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigwedge_{x \in A} \bigvee_{n_x \in A} \bigwedge_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n > n_x}} g_m(x) &< f_n(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigwedge_{x \in A} \bigvee_{n_x \in A} \bigwedge_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n > n_x}} h_n(x) &= g_m(x) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \stackrel{A}{=} g_m$$

Ale z nierówności $h_n \leq f_n$ wynika, że

$$\int_A h_n d\mu \leq \int_A f_n d\mu$$

skąd na mocy T2 i dowolności wskaźnika m

$$\bigwedge_{m \in \mathcal{N}} \int_A g_m d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

Z uwagi na symetrię funkcji f_1, f_2, \dots i g_1, g_2, \dots otrzymujemy również nierówność odwrotną, a stąd też dowodzonego twierdzenia.

§ 224. Definicja całki Lebesgue'a

Niech będzie dana przestrzeń z miarą (X, \mathcal{S}, μ) , zbiór $A \in \mathcal{S}$ i dowolna funkcja mierzalna nieujemna na zbiorze A . Na mocy twierdzenia § 203 istnieje ciąg (f_n) niemalejący funkcji prostych mierzalnych na zbiorze A taki, że

$$(153) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{A}{=} f$$

Całką Lebesgue'a funkcji mierzalnej nieujemnej na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ nazywamy liczbę