

jest funkcją borelowską w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , ponieważ dla każdego  $\alpha \in \mathbb{R}$  zbiór

$$\begin{aligned} \{ (x_1, \dots, x_n) : h(x_1, \dots, x_n) < \alpha \} &= \\ &= \{ (x_1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n < \alpha \} \end{aligned}$$

jako zbiór otwarty jest zbiorem borelowskim.

Funkcja

$$f(x) = h[f_1(x), \dots, f_n(x)] = f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

jest określona na zbiorze  $E$  i na mocy twierdzenia § 186 jest mierzalna na zbiorze  $E$ . Wobec tego  $E_\alpha \in \mathcal{S}$ , co kończy dowód.

### § 188. Twierdzenie

Z]  $f_1, \dots, f_n$  są funkcjami mierzalnymi skończonymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .

T]  $\sum_{i=1}^n f_i$  jest funkcją mierzalną skończoną na zbiorze  $A$ .

D] Twierdzenie powyższe jest oczywistym wnioskiem z twierdzenia poprzedniego, w którym w danym przypadku mamy  $\mathcal{B} = 0$  na mocy skończoności funkcji  $f_1, \dots, f_n$ .

### § 189. Twierdzenie

Z]  $f_1, f_2$  są funkcjami mierzalnymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .

T]  $f_1 - f_2$  jest funkcją mierzalną na zbiorze  $A - B$ , gdzie

$$\begin{aligned} B &\stackrel{\text{def}}{=} \{ x : (f_1(x) = f_2(x) = \infty \vee f_1(x) = f_2(x) = -\infty) \wedge x \in A \} = \\ &= \{ x : f_1(x) = \infty \wedge x \in A \} \cap \{ x : f_2(x) = \infty \wedge x \in A \} + \\ &+ \{ x : f_1(x) = -\infty \wedge x \in A \} \cap \{ x : f_2(x) = -\infty \wedge x \in A \} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

D] Twierdzenie powyższe jest oczywistym wnioskiem z twierdzeń § 187 i § 185, ponieważ

$$f_1 - f_2 = f_1 + (-1)f_2$$

## § 190. Twierdzenie

- Z]  $f_1, f_2$  są funkcjami mierzalnymi skończonymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .
- T]  $f_1 - f_2$  jest funkcją mierzalną skończoną na zbiorze  $A$ .
- D] Twierdzenie powyższe wynika z twierdzeń § 188 i § 185.

## § 191. Twierdzenie

- Z]  $f_1, \dots, f_n$  są funkcjami mierzalnymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .
- T]  $\prod_{i=1}^n f_i$  jest funkcją mierzalną na zbiorze  $A$ .
- D] Zbiór  $A$  można przedstawić w postaci

$$A = C + D + E$$

gdzie

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x: \bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} |f_i(x)| = \infty \wedge \bigwedge_{i \in \{1, \dots, n\}} f_i(x) \neq 0 \right. \\ \left. \wedge x \in A \right\} = \left( \bigcup_{i=1}^n \{x: |f_i(x)| = \infty \wedge x \in A\} \right) \cap$$

$$\cap \bigcap_{i=1}^n \left( \{x: f_i(x) < 0 \wedge x \in A\} \cup \{x: f_i(x) > 0 \wedge x \in A\} \right) \in \mathcal{S}$$

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x: \bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} |f_i(x)| = \infty \wedge \bigvee_{j \in \{1, \dots, n\}} f_j(x) = 0 \right. \\ \left. \wedge x \in A \right\} = \left( \bigcup_{i=1}^n \{x: |f_i(x)| = \infty \wedge x \in A\} \right) \cap$$

$$\cap \left( \bigcup_{j=1}^n \{x: |f_j(x)| = 0 \wedge x \in A\} \right) \in \mathcal{S}$$

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x: \bigwedge_{i \in \{1, \dots, n\}} |f_i(x)| < \infty \wedge x \in A \right\} =$$

$$= \bigcap_{i=1}^n \{x: |f_i(x)| < \infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

Zatem



$$(*) \quad \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ x : \prod_{i=1}^n f_i(x) < \alpha \wedge x \in A \right\} = C_\alpha + D_\alpha + E_\alpha$$

gdzie

$$C_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : \prod_{i=1}^n f_i(x) < \alpha \wedge x \in C \right\}$$

$$D_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : \prod_{i=1}^n f_i(x) < \alpha \wedge x \in D \right\}$$

$$E_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : \prod_{i=1}^n f_i(x) < \alpha \wedge x \in E \right\}$$

Ale

$$\begin{aligned} C_\alpha &= \left\{ x : \prod_{i=1}^n f_i(x) = -\infty \wedge x \in C \right\} = \\ &= \left\{ x : \bigvee_{\substack{i_1 < \dots < i_m \leq n \\ m \text{ nieparzyste}}} \left( \bigwedge_{i \in \{i_1, \dots, i_m\}} f_i(x) < 0 \wedge \right. \right. \\ &\quad \left. \wedge \bigwedge_{i \notin \{i_1, \dots, i_m\}} f_i(x) > 0 \right) \wedge x \in C \Big\} = \\ &= \bigcup_{\substack{i_1 < \dots < i_m \leq n \\ m \text{ nieparzyste}}} \left( \bigcap_{i \in \{i_1, \dots, i_m\}} \{x : f_i(x) < 0 \wedge x \in A\} \cap \right. \\ &\quad \left. \cap \bigcap_{i \notin \{i_1, \dots, i_m\}} \{x : f_i(x) > 0 \wedge x \in A\} \right) \cap C \in \mathcal{S} \\ D_\alpha &= \begin{cases} D \in \mathcal{S} & \text{dla } \alpha > 0 \\ 0 \in \mathcal{S} & \text{dla } \alpha \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

gdyż  $\prod_{i=1}^\infty f_i(x) = 0$  dla  $x \in D$ , zgodnie z umową, że  $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = 0$ .

Funkcja

$$h(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$$

jest funkcją borelowską w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , ponieważ dla każdego  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \{(x_1, \dots, x_n) : h(x_1, \dots, x_n) < \alpha\} = \\ = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 x_2 \dots x_n < \alpha\} \end{aligned}$$

jako zbiór otwarty jest zbiorem borelowskim.

Funkcja

$$f(x) = h[f_1(x), \dots, f_n(x)] = \prod_{i=1}^n f_i(x)$$

jest określona na zbiorze  $E$  i na mocy twierdzenia § 186 jest mierzalna na zbiorze  $E$ . Wobec tego  $E_\alpha \in \mathcal{S}$  i na mocy (\*)

$$\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \{x : \prod_{i=1}^n f_i(x) < \alpha \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

co oznacza, że funkcja  $\prod_{i=1}^n f_i(x)$  spełnia warunek ( $\beta_2$ ) dla funkcji mierzalnych. Ponieważ funkcja ta spełnia w sposób oczywisty również warunek ( $\beta_1$ ), więc jest mierzalna na zbiorze  $A$ .

#### § 192. Twierdzenie

Z]  $f_1, \dots, f_n$  są funkcjami mierzalnymi skończonymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .

T]  $\prod_{i=1}^n f_i$  jest funkcją mierzalną skończoną na zbiorze  $A$ .

D] Twierdzenie powyższe jest oczywistym wnioskiem z twierdzenia poprzedniego.

#### § 193. Twierdzenie

Z]  $f$  jest funkcją mierzalną na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .

T]  $1/f$  jest funkcją mierzalną skończoną na zbiorze  $A - B$ , gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : f(x) = 0 \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

D]  $1/f$  jest funkcją rzeczywistą skończoną, określoną na zbiorze  $A - B \in \mathcal{S}$ , wystarczy zatem udowodnić, że spełnia warunek ( $\beta_2$ ) dla funkcji mierzalnych. Ale

$$(*) \quad \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{x : \frac{1}{f(x)} < \alpha \wedge x \in A - B\right\} = C_\alpha + D_\alpha$$



gdzie

$$C_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : \frac{1}{f(x)} < \alpha \wedge f(x) > 0 \wedge x \in A-B \right\}$$

$$D_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : \frac{1}{f(x)} < \alpha \wedge f(x) < 0 \wedge x \in A-B \right\}$$

a stąd

$$C_\alpha = \begin{cases} \{x : 0 < f(x) < \frac{1}{\alpha} \wedge x \in A-B\} \in \mathcal{S} & \text{dla } \alpha > 0 \\ 0 \in \mathcal{S} & \text{dla } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$D_\alpha = \begin{cases} \{x : f(x) < 0 \wedge x \in A-B\} \in \mathcal{S} & \text{dla } \alpha \geq 0 \\ \{x : \frac{1}{\alpha} < f(x) < 0 \wedge x \in A-B\} \in \mathcal{S} & \text{dla } \alpha < 0 \end{cases}$$

Zatem

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} C_\alpha + D_\alpha \in \mathcal{S}$$

i tym samym funkcja  $1/f$  na mocy (\*) spełnia warunek ( $\beta 2$ ), co kończy dowód.

#### § 194. Twierdzenie

Z]  $f_1, f_2$  są funkcjami mierzalnymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .

T]  $f_1/f_2$  jest funkcją mierzalną na zbiorze  $A-B$ , gdzie

$$\begin{aligned} B &\stackrel{\text{def}}{=} \{x : (f_2(x) = 0 \vee |f_1(x)| = |f_2(x)| = \infty) \wedge x \in A\} = \\ &= \{x : f_2(x) = 0 \wedge x \in A\} \cup \left( \{x : |f_1(x)| = \infty \wedge x \in A\} \cap \right. \\ &\quad \left. \cap \{x : |f_2(x)| = \infty \wedge x \in A\} \right) \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

D] Twierdzenie powyższe jest oczywistym wnioskiem z twierdzeń § 191 i § 193, ponieważ na zbiorze  $A-B$  mamy

$$\frac{f_1}{f_2} = f_1 \cdot \frac{1}{f_2}$$

## § 195. Twierdzenie

Z]  $f_1, f_2$  są funkcjami mierzalnymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $\mathcal{X}$ .  
 $f_1$  jest funkcją skończoną na zbiorze  $A$ .

T]  $f_1/f_2$  jest funkcją mierzalną skończoną na zbiorze  $A-B$ , gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : f_2(x) = 0 \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

D] Twierdzenie powyższe wynika z twierdzenia poprzedniego w sposób oczywisty.

## § 196. Twierdzenie

Z]  $f_1, f_2$  są funkcjami mierzalnymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $\mathcal{X}$ .

T]  $\{x : f_1(x) < f_2(x) \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$

$$\{x : f_1(x) \leq f_2(x) \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

$$\{x : f_1(x) = f_2(x) \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

D]  $\{x : f_1(x) < f_2(x) \wedge x \in A\} =$

$$= \{x : \left( \bigvee_{w \in \mathfrak{W}} f_1(x) < w \wedge w < f_2(x) \right) \wedge x \in A\} =$$

$$= \bigcup_{w \in \mathfrak{W}} \{x : f_1(x) < w \wedge x \in A\} \cap \{x : f_2(x) > w \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

gdzie  $\mathfrak{W}$  - jak poprzednio - oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych, przeliczalny na mocy twierdzenia § 15.

Mamy następnie

$$\{x : f_1(x) \leq f_2(x) \wedge x \in A\} = A - \{x : f_2(x) < f_1(x) \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

oraz

$$\begin{aligned} \{x : f_1(x) = f_2(x) \wedge x \in A\} &= \{x : f_1(x) \leq f_2(x) \wedge x \in A\} - \\ &- \{x : f_1(x) < f_2(x) \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$



## § 197. Twierdzenie

Z]  $f_1, \dots, f_n$  są funkcjami mierzalnymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .

T] Funkcje

$$g_1(x) = \max [f_1(x), \dots, f_n(x)]$$

$$g_2(x) = \min [f_1(x), \dots, f_n(x)]$$

są mierzalne na zbiorze  $A$ .

D] Funkcje  $g_1$  i  $g_2$  są funkcjami rzeczywistymi określonymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$ , więc spełniają warunek  $(\beta 1)$  dla funkcji mierzalnych. Ponadto

$$\begin{aligned} \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \{x: g_1(x) < \alpha \wedge x \in A\} &= \{x: \bigwedge_{j \in \{1, \dots, n\}} f_j(x) < \alpha \wedge x \in A\} = \\ &= \bigcap_{j=1}^n \{x: f_j(x) < \alpha \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \{x: g_2(x) < \alpha \wedge x \in A\} &= \{x: \bigvee_{j \in \{1, \dots, n\}} f_j(x) < \alpha \wedge x \in A\} = \\ &= \bigcup_{j=1}^n \{x: f_j(x) < \alpha \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Zatem funkcje  $g_1$  i  $g_2$  spełniają również warunek  $(\beta 2)$  i są mierzalne na zbiorze  $A$ .

## § 198. Twierdzenie

Z]  $f_1, f_2, \dots$  są funkcjami mierzalnymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .

T] Funkcje

$$g_1(x) = \sup_n f_n(x)$$

$$g_2(x) = \inf_n f_n(x)$$

$$g_3(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$g_4(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$g_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla tych } x \in A, \text{ dla których ciąg } (f_n(x)) \text{ jest roz-} \\ & \text{bieżny} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & \text{dla tych } x \in A, \text{ dla których ciąg } (f_n(x)) \text{ jest} \\ & \text{zbieżny,} \end{cases}$$

są mierzalne na zbiorze  $A$ .

D Wszystkie funkcje  $g_1, \dots, g_5$  są rzeczywiste i określone na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  i tym samym spełniają warunek  $(\beta 1)$  dla funkcji mierzalnych. Ponadto

$$\begin{aligned} \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \{x: g_1(x) < \alpha \wedge x \in A\} &= \{x: \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) < \alpha - \frac{1}{k} \wedge x \in A\} = \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x: f_j(x) < \alpha - \frac{1}{k} \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \{x: g_2(x) < \alpha \wedge x \in A\} &= \{x: \bigvee_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) < \alpha \wedge x \in A\} = \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x: f_j(x) < \alpha \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Zatem funkcje  $g_1$  i  $g_2$  spełniają również warunek  $(\beta 2)$  i są mierzalne na zbiorze  $A$ . Wobec tego funkcje

$$g_3(x) = \inf_n \sup_k f_{n+k-1}(x)$$

$$g_4(x) = \sup_n \inf_k f_{n+k-1}(x)$$

są również mierzalne na zbiorze  $A$ .

Niech teraz  $B$  będzie zbiorem tych wszystkich  $x \in A$ , dla których ciąg  $(f_n(x))$  jest zbieżny. Jest wtedy na mocy twierdzenia § 196

$$B = \{x: g_3(x) = g_4(x) \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \{x: g_5(x) < \alpha \wedge x \in A\} &= \\ &= \{x: g_5(x) < \alpha \wedge x \in B\} + \{x: g_5(x) < \alpha \wedge x \in A-B\} = \\ &= \{x: g_5(x) < \alpha \wedge x \in B\} + \{x: 0 < \alpha \wedge x \in A-B\} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

ponieważ



$$\{x: g_5(x) < \alpha \wedge x \in B\} = \{x: g_3(x) < \alpha \wedge x \in B\} \in \mathcal{S}$$

$$\{x: 0 < \alpha \wedge x \in A-B\} = \begin{cases} 0 \in \mathcal{S} & \text{dla } \alpha \leq 0 \\ A-B \in \mathcal{S} & \text{dla } \alpha > 0 \end{cases}$$

Funkcja  $g_5$  spełnia tym samym również warunek ( $\beta 2$ ) i jest mierzalna na zbiorze  $A$ .

### § 199. Twierdzenie

Funkcja rzeczywista  $\tau$  o dziedzinie  $T \in \mathcal{B}$ , gdzie  $\mathcal{B}$  jest  $\sigma$ -ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni metrycznej  $X$ , ciągła na zbiorze  $A$  domkniętym w przestrzeni  $T$ , jest mierzalna na zbiorze  $A$  ze względu na  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{B}$ .

W szczególności funkcja  $\tau$  ciągła jest mierzalna na swojej dziedzinie  $T$ .

D] Rozpatrzmy zbiór

$$B_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x: \tau(x) \geq \alpha \wedge x \in A\}$$

Jeśli  $B_\alpha \neq \emptyset$ , niech  $x_1, x_2, \dots$  będzie dowolnym ciągiem takim, że

$$x_1, x_2, \dots \in B_\alpha \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \in T$$

Ze względu na domkniętość zbioru  $A$  jest

$$x \in A$$

a ze względu na ciągłość funkcji

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau(x_k) = \tau(x) \geq \alpha$$

Wobec tego jest

$$x \in B_\alpha$$

Uwzględniając dowolność ciągu  $x_1, x_2, \dots$  dochodzimy do wniosku, że zbiór  $B_\alpha$  jest domknięty w przestrzeni  $T$ . Wobec tego zbiory  $A$  i  $B_\alpha$  są borelowskie w przestrzeni  $T$ , a na mocy twierdzenia § 164  $A, B_\alpha \in \mathcal{B}$ . Zatem

$$\bigwedge_{\alpha \in A} \{x: \tau(x) < \alpha \wedge x \in A\} = A - B_\alpha \in \mathcal{B}$$

co oznacza mierzalność funkcji  $\tau$  na zbiorze  $A$ .

Gdy funkcja  $\tau$  jest ciągła, to oznacza to, że jest ciągła na zbiorze  $T$ , który jest domknięty w przestrzeni  $T$ . Stąd funkcja  $\tau$  jest wtedy mierzalna na zbiorze  $T$ .

### § 200. Twierdzenie

Z  $1^0 \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$  są  $\sigma$ -ciałami przestrzeni odpowiednio  $X_1, \dots, X_n$ .

$2^0 f$  jest funkcją mierzalną na zbiorze  $A \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$ .

T  $\bigwedge_{\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}} (i_1, \dots, i_n)$   $\bigwedge_{k \in \{1, \dots, n-1\}} x_{i_1} \in X_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in X_{i_k}$   
 funkcja  $f[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}](x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1, \dots, x_n)$  jest mierzalna na zbiorze  $A[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] \in \mathcal{S}_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{i_n}$  gdzie  $A[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$  oznacza przekrój zbioru  $A$  przez punkt  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k}$ .

D Niech  $i_1, \dots, i_n$  będzie dowolną permutacją liczb  $1, \dots, n$  i niech  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  będzie ustalonym ciągiem punktów z przestrzeni odpowiednio  $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ . Na mocy własności (przek7) z § 176

$$A[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] \in \mathcal{S}_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{i_n}$$

Mamy dalej

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) : f[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}](x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) < \alpha \wedge \right. \\ & \left. (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \in A[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] \right\} = \\ & = \left\{ (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) : f(x_1, \dots, x_n) < \alpha \wedge (x_1, \dots, x_n) \in A \right\} = \\ & = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) < \alpha \wedge (x_1, \dots, x_n) \in A \right\} [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] \end{aligned}$$



Na mocy mierzalności funkcji  $f$  na zbiorze  $A$  i własności (przek7) z § 176 zbiór powyższy należy do  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{S}_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{i_n}$ . W ten sposób twierdzenie zostało udowodnione.

### § 201. Funkcja charakterystyczna zbioru

Funkcją charakterystyczną zbioru  $A \subset X$ , gdzie  $X$  jest ustaloną przestrzenią, nazywamy funkcję rzeczywistą, której dziedziną jest cała przestrzeń  $X$  i która jest określona wzorem

$$\chi_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \notin A \end{cases}$$

Funkcja charakterystyczna  $\chi_A$  jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \in \mathcal{S}$ , gdzie  $\mathcal{S}$  jest ustalonym  $\sigma$ -ciałem przestrzeni  $X$ , ponieważ

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{R}} \{x: \chi_A(x) < \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{dla } \alpha \leq 0 \\ A^c \in \mathcal{S} \Leftrightarrow A \in \mathcal{S} & \text{dla } 0 < \alpha \leq 1 \\ X \in \mathcal{S} & \text{dla } \alpha > 1 \end{cases}$$

Funkcje charakterystyczne zbiorów mają następujące własności ( $A, A_1, A_2, \dots \subset X$ ):

$$(h1) \quad A = \sup_n A_n \Leftrightarrow \chi_A = \sup_n \chi_{A_n}$$

$$\begin{aligned} \underline{D)} \quad A = \sup_n A_n &\Leftrightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathfrak{R}} x \in A_k) = \\ &\Leftrightarrow (\chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathfrak{R}} \chi_{A_k}(x) = 1) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow \sup_n \chi_{A_n}(x) = 1) \Leftrightarrow \chi_A = \sup_n \chi_{A_n}$$

$$(h2) \quad A = \inf_n A_n \Leftrightarrow \chi_A = \inf_n \chi_{A_n}$$

$$\underline{D)} \quad A = \inf_n A_n \Leftrightarrow A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow \bigwedge_{k \in \mathfrak{R}} x \in A_k) =$$

$$\Leftrightarrow (\chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow \bigwedge_{k \in \mathfrak{R}} \chi_{A_k}(x) = 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow \inf_n \chi_{A_n}(x) = 1) \Leftrightarrow \chi_A = \inf_n \chi_{A_n}$$

$$(h3) \quad A = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow \chi_A = \limsup_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}$$

D] Wynika na mocy (h1) i (h2) z tożsamości

$$A = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow A = \inf_n \sup_k A_{n+k-1}$$

$$\chi_A = \limsup_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} \Leftrightarrow \chi_A = \inf_n \sup_k \chi_{A_{n+k-1}}$$

$$(h4) \quad A = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow \chi_A = \liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}$$

D] Wynika na mocy (h1) i (h2) z tożsamości

$$A = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow A = \sup_n \inf_k A_{n+k-1}$$

$$\chi_A = \liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} \Leftrightarrow \chi_A = \sup_n \inf_k \chi_{A_{n+k-1}}$$

$$(h5) \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow \chi_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}$$

D] Wynika na mocy (h3) i (h4) z tożsamości

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow A = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$\chi_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} \Leftrightarrow \chi_A = \limsup_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}$$

$$(h6) \quad A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \chi_A = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k},$$

D] Wynika z definicji funkcji charakterystycznej zbioru i równoważności (h1).

$$(h7) \quad A = \sum_{k=1}^n A_k \Leftrightarrow \chi_A = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}$$

D] Wynika z (h6), gdy położymy  $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = 0$ .

$$(h8) \quad A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \chi_A = \prod_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}$$

D] Wynika z (h2).

$$(h9) \quad A = \bigcap_{k=1}^n A_k \Leftrightarrow \chi_A = \prod_{k=1}^n \chi_{A_k}$$

D] Wynika z (h8), gdy położymy  $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$



$$(h10) \quad \chi_{A^c} = 1 - \chi_A$$

D Wynika wprost z definicji.

$$(h11) \quad \chi_{A-B} = \chi_A (1 - \chi_B) \quad (A, B \subset X)$$

D Wynika z (h9) i (h10) na mocy wzoru

$$A - B = A \cap B^c$$

## § 202. Funkcje proste

Funkcję rzeczywistą  $f$  będziemy nazywać funkcją prostą wtedy i tylko wtedy, gdy przyjmuje tylko skończoną liczbę wartości skończonych i nieujemnych.

Każdą funkcję prostą można napisać w postaci

$$(142) \quad f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$$

gdzie  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ ,  $\alpha_i \neq \alpha_j$  dla  $i \neq j$ ,  $A_1 + \dots + A_n = X$ . Istotnie, niech  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  będą wszystkimi różnymi dodatnimi i skończonymi wartościami, jakie przyjmuje funkcja  $f$ , niech  $\alpha_1 = 0$  oraz niech

$$A_k = \{x: f(x) = \alpha_k\}, \quad k = 1, \dots, n$$

Z definicji wynika, że zbiory  $A_1, \dots, A_n$  są rozłączne, a ze względu na to, że  $\alpha_1 = 0$ , możemy przyjąć, że

$$(*) \quad A_1 = (A_2 + \dots + A_n)^c$$

czyli, że

$$A_1 + \dots + A_n = X$$

Wynika stąd, że każdą funkcję prostą istotnie można napisać w postaci (142) i uważać za określoną w całej przestrzeni po założeniu, że przyjmuje wartość zero w całym zbiorze (\*). Na odwrót każda funkcja postaci (142) określona w całej przestrzeni  $X$  jest funkcją rzeczywistą przyjmującą tylko skończoną liczbę wartości skończonych i nieujemnych, a więc jest funkcją prostą.

Funkcja prosta (142) jest mierzalna na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zbiory  $A \cap A_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) są ele-

mentami  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{S}$ . Istotnie, gdy  $A \cap A_k \in \mathcal{S}$  dla  $k = 1, \dots, n$ , wtedy funkcje  $\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_n}$  są mierzalne na zbiorze  $A$ , gdyż dla  $k = 1, \dots, n$  jest

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \{x: \chi_{A_k}(x) < \alpha \wedge x \in A\} = \begin{cases} \emptyset & \text{dla } \alpha \leq 0 \\ A - A_k = A - A \cap A_k \in \mathcal{S} & \text{dla } 0 < \alpha \leq 1 \\ A \in \mathcal{S} & \text{dla } \alpha > 1 \end{cases}$$

i wobec tego funkcja (142) jest mierzalna na zbiorze  $A$  na mocy twierdzeń § 185 i § 188. Odwrotnie, jeśli funkcja (142) jest mierzalna na zbiorze  $A$ , to na mocy twierdzenia § 184

$$A \cap A_k = \{x: f(x) = \alpha_k \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \quad \text{dla } k = 1, \dots, n$$

### § 203. Twierdzenie

Każda funkcja mierzalna i nieujemna na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$  jest granicą ciągu niemalejącego funkcji prostych mierzalnych na zbiorze  $A$ .

D] Niech  $f$  będzie funkcją mierzalną na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$ , spełniającą warunek

$$\bigwedge_{x \in A} f(x) \geq 0$$

Niech dla  $n = 1, 2, \dots$  będzie

$$A_{nk} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \{x: \frac{k-2}{2^n} < f(x) \leq \frac{k-1}{2^n} \wedge x \in A\} & \text{dla } k = 2, \dots, n2^n + 1 \\ \{x: f(x) > n \wedge x \in A\} & \text{dla } k = n2^n + 2 \end{cases}$$

$$A_{n1} \stackrel{\text{def}}{=} (A_{n2} + \dots + A_{n, n2^n + 2})^c = A^c + \{x: f(x) = 0 \wedge x \in A\}$$

Na mocy twierdzenia § 184 mamy

$$A_{nk} \in \mathcal{S} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots; \quad k = 1, \dots, n2^n + 2$$

a ponadto - jak łatwo zauważyć -

$$A_{11} = A_{21} = \dots$$

Wprowadźmy funkcje

$$f_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n2^n + 2} \alpha_{nk} \chi_{A_{nk}}$$



gdzie

$$a_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k = 1 \\ \frac{k-2}{2^n} & \text{dla } k = 2, \dots, n2^n + 1 \\ n & \text{dla } k = n2^n + 2 \end{cases}$$

Funkcje  $f_1, f_2, \dots$  są zatem funkcjami prostymi mierzalnymi na zbiorze  $A$ . Ciąg  $(f_n)$  jest niemalejący. Dla  $x \in A^c$  jest to oczywiste. Dla takich  $x \in A$ , dla których  $f(x) = 0$  jest to również oczywiste. Natomiast dla takich  $x \in A$ , dla których  $f(x) > 0$ , mamy

$$f_n(x) = n < f_{n+1}(x) = n+1 \text{ dla } n < f(x) - 1$$

$$f_n(x) = n \leq f_{n+1}(x) = \frac{k-2}{2^{n+1}} \text{ dla } f(x) - 1 \leq n < f(x),$$

$$(n2^{n+1} + 1 < k \leq (n+1)2^{n+1} + 1)$$

$$f_n(x) = \frac{k-2}{2^n} \leq f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{2k-4}{2^{n+1}} & \text{gdy } \frac{k-2}{2^n} < f(x) \leq \frac{2k-3}{2^{n+1}} \\ \frac{2k-3}{2^{n+1}} & \text{gdy } \frac{2k-3}{2^{n+1}} < f(x) \leq \frac{k-1}{2^n} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{dla} \\ n \geq f(x) \end{matrix}$$

Wykażemy, teraz, że

$$(*) \quad \bigwedge_{x \in A} f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

W tym celu położmy

$$A = B + C$$

gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : f(x) < \infty \wedge x \in A\}$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{x : f(x) = \infty \wedge x \in A\}$$

Mamy wtedy

$$\bigwedge_{x \in B} \bigwedge_{n \geq f(x)} 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

skąd

$$\bigwedge_{x \in B} f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

oraz

$$\bigwedge_{x \in C} \bigwedge_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n > N} f_n(x) = n > N$$

skąd

$$\bigwedge_{x \in C} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty = f(x)$$

Wynika stąd (\*) i w ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

#### § 204. Funkcje mierzalne w przestrzeniach z miarą

Niech będzie dana przestrzeń z miarą  $(X, S, \mu)$ . Wprowadzimy kilka nowych określeń.

Własność  $\alpha$  jest spełniona na zbiorze  $A \stackrel{\text{def}}{\iff} A \in S \wedge A \subset \{x: \alpha(x)\}$

W szczególności przyjmujemy

$f_1 \stackrel{A}{=} f_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} A \in S \wedge f_1, f_2$  są funkcjami mierzalnymi na zbiorze  $A \wedge \bigwedge_{x \in A} f_1(x) = f_2(x)$ .

Własność  $\alpha$  jest spełniona prawie wszędzie na zbiorze  $A \stackrel{\text{def}}{\iff} A \in S \wedge \bigvee_{B \in S} (B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge \text{własność } \alpha \text{ jest spełniona na zbiorze } B)$ .

Funkcję  $f$  będziemy nazywać funkcją mierzalną  $\mu$  na zbiorze  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$A \in S \wedge \bigvee_{B \in S} (B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge f \text{ jest funkcją mierzalną na zbiorze } B)$ .

W szczególności, gdy  $A = X$ , funkcję  $f$  będziemy nazywać po prostu funkcją mierzalną  $\mu$ . Gdy  $\mu$  jest miarą Lebesgue'a, funkcje mierzalne  $\mu$  na zbiorze  $A$  będziemy również nazywać funkcjami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a na zbiorze  $A$ , a w przypadku  $A = X$  funkcjami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a.

Przyjmujemy dalej, że

$f_1 \stackrel{\text{pr. w. } A}{=} f_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} A \in S \wedge f_1, f_2$  są funkcjami mierzalnymi  $\mu$  na zbiorze  $A \wedge \bigvee_{B \in S} (B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge f_1 \stackrel{B}{=} f_2)$ .

Funkcje  $f_1, f_2$  spełniające warunek

$$f_1 \stackrel{\text{pr. w. } A}{=} f_2$$

będziemy nazywać równoważnymi na zbiorze  $A$ . Funkcje równoważne na



całej przestrzeni  $X$  będziemy nazywać po prostu funkcjami równoważnymi.

Zauważmy, że każda funkcja rzeczywista jest mierzalna  $\mu$  na zbiorze miary zero.

### § 205. Twierdzenie

Własność  $\alpha$  jest spełniona prawie wszędzie na zbiorze  $A \wedge C \in S \wedge A \subset C \Rightarrow$  własność  $\alpha$  jest spełniona prawie wszędzie na zbiorze  $C$ .

D] Własność  $\alpha$  jest spełniona prawie wszędzie na zbiorze  $A \wedge C \in S \wedge A \subset C \Rightarrow A \in S \wedge \bigvee_{B \in S} (B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge B \subset \{x: \alpha(x)\}) \wedge C \in S \wedge A \subset C \Rightarrow$   
 $\Rightarrow C \in S \wedge \bigvee_{D \in S} (D \subset C \wedge \mu(C-D) = \mu(C-B \cap C) = \mu(C-B) \leq \mu(A-B) =$   
 $= 0 \wedge D \subset \bigcup_{B \in S} (B \cap C) \Rightarrow C \in S \wedge \bigvee_{D \in S} (D \subset C \wedge \mu(C-D) = 0 \wedge D \subset \{x: \alpha(x)\}) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  własność  $\alpha$  jest spełniona prawie wszędzie na zbiorze  $C$ .

### § 206. Twierdzenie

Własność  $\alpha$  jest spełniona prawie wszędzie na zbiorze  $A \wedge C \in S \wedge A \subset C \wedge \mu(C-A) = 0 \Rightarrow$  własność  $\alpha$  jest spełniona prawie wszędzie na zbiorze  $C$ .

D] Własność  $\alpha$  jest spełniona prawie wszędzie na zbiorze  $A \wedge C \in S \wedge A \subset C \wedge \mu(C-A) = 0 \Rightarrow A \in S \wedge \bigvee_{B \in S} (B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge B \subset \{x: \alpha(x)\}) \wedge$   
 $C \in S \wedge A \subset C \wedge \mu(C-A) = 0 \Rightarrow C \in S \wedge \bigvee_{B \in S} (B \subset A \subset C \wedge \mu(C-B) = \mu[(C-A) +$   
 $+ (A-B)] = \mu(C-A) + \mu(A-B) = 0 \wedge B \subset \{x: \alpha(x)\}) \Rightarrow$  własność  $\alpha$  jest  
 spełniona prawie wszędzie na zbiorze  $C$ .

### § 207. Twierdzenie

Własności  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  są spełnione prawie wszędzie na zbiorze  $A \Rightarrow \bigvee_{B \in S} (B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge$  własności  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  są spełnione na zbiorze  $B)$ .

D]  $\bigwedge_{k \in \{1, \dots, m\}} \bigvee_{B_k \in S} (B_k \subset A \wedge \mu(A-B_k) = 0 \wedge$  własność  $\alpha_k$  jest spełniona na zbiorze  $B_k) \Rightarrow \bigvee_{B \in S} (B = B_1 \cap \dots \cap B_m \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = \mu[A -$   
 $-(B_1 \cap \dots \cap B_m)] = \mu[(A-B_1) \cup \dots \cup (A-B_m)] \leq \mu(A-B_1) + \dots +$   
 $+ \mu(A-B_m) = 0 \wedge$  własności  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  są spełnione na zbiorze  $B) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \bigvee_{B \in S} (B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge$  własności  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  są spełnione na zbiorze  $B)$ .