

§ 208. Twierdzenie

Własności $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ są spełnione prawie wszędzie na zbiorze $A \Rightarrow \bigvee_{B \in \mathcal{S}} (B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge \text{własności } \alpha_1, \alpha_2, \dots \text{ są spełnione na zbiorze } B)$.

D] Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia § 207.

§ 209. Ciągi funkcji mierzalnych

W następnych paragrafach zajmiemy się różnymi typami zbieżności dla ciągów funkcji mierzalnych na danym zbiorze. W teorii funkcji mierzalnych korzysta się z różnych typów zbieżności w zależności od typu zagadnień. W takiej sytuacji potrzebna jest znajomość powiązań między poszczególnymi typami zbieżności. Pozwala to m.in. z twierdzeń udowodnionych dla jednego typu zbieżności otrzymywać twierdzenia dla innych typów.

Wiele z własności podanych w następnych paragrafach dla poszczególnych typów zbieżności ma charakter trywialny. Inne są znacznie głębsze i trudniejsze, znane pod nazwą odrębnych twierdzeń, jak np. twierdzenie Jegorowa czy twierdzenie Riesz. Autor uważał za wskazane zebrać te wszystkie własności razem, gdyż ułatwia to w znacznym stopniu późniejsze ich wykorzystanie.

§ 210. Zbieżność na zbiorze

Mówimy, że ciąg (f_n) jest zbieżny do funkcji f na zbiorze A i piszemy

$$f_n \xrightarrow{A} f \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^A = f$$

wtedy i tylko wtedy, gdy w danej przestrzeni X i dla ustalonego σ -ciała \mathcal{S}

$$A \in \mathcal{S} \wedge f, f_1, f_2, \dots \text{ są funkcjami mierzalnymi} \\ \text{na zbiorze } A \wedge \bigwedge_{x \in A} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Gdy ponadto $A = X$, to mówimy po prostu, że ciąg (f_n) jest zbieżny do funkcji f i piszemy

$$f_n \rightarrow f \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

Zbieżność na zbiorze ma następujące własności:

$$(nz1) \quad f_n \xrightarrow{A} f \wedge f_n \xrightarrow{A} g \Rightarrow f \xrightarrow{A} g$$

D) Wynika z jednoznaczności granicy dla ciągów liczbowych.

$$(nz2) \quad f_n \xrightarrow{A} f \Rightarrow \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathfrak{N}} f_{m_n} \xrightarrow{A} f$$

D) Wynika z odpowiedniej własności ciągów liczbowych.

$$(nz3) \quad f_n \xrightarrow{A} f \wedge B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \Rightarrow f_n \xrightarrow{B} f$$

D) Wynika z definicji zbieżności na zbiorze.

$$(nz4) \quad f_n \xrightarrow{A_1} f \wedge \dots \wedge f_n \xrightarrow{A_m} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\bigcup_{k=1}^m A_k} f$$

D) Wynika z definicji zbieżności na zbiorze.

$$(nz5) \quad f_n \xrightarrow{A_1} f \wedge f_n \xrightarrow{A_2} f \wedge \dots \Rightarrow f_n \xrightarrow{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} f$$

D) Wynika z definicji zbieżności na zbiorze.

$$(nz6) \quad f_n \xrightarrow{A} f \wedge f, f_1, f_2, \dots \text{ skończone na zbiorze } A \Leftrightarrow \text{ciąg } (f_n) \text{ spełnia warunek Cauchy'ego na zbiorze } A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \in \mathcal{S} \wedge f_1, f_2, \dots \text{ są funkcjami mierzalnymi i skończonymi na zbiorze } A \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_x \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathfrak{N} \\ m, n > n_x}} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

D) 1) Jeśli $f_n \xrightarrow{A} f$, to z definicji jest $A \in \mathcal{S}$ i funkcje f_1, f_2, \dots są mierzalne na zbiorze A . Jeśli ponadto

$$(*) \quad \bigwedge_{x \in A} \bigvee_{m_x \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{n > m_x} |f_n(x)| < \infty \wedge |f(x)| < \infty$$

to na mocy twierdzenia § 63 zastosowanego do przestrzeni \mathfrak{R} jest

$$(**) \quad \bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_x \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathfrak{N} \\ m, n > n_x}} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

2) Jeśli jest spełniony warunek (**), to tym samym jest spełniony warunek (*) dla funkcji f_n , gdy $n > n_x$. Ponadto na mocy zupełności przestrzeni \mathfrak{R}

$$\bigwedge_{x \in A} \bigvee_{f(x) \in \mathfrak{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

skąd otrzymujemy $f_n \xrightarrow{A} f$ i spełnienie warunku (*) dla funkcji f .

$$(nz7) \quad f_n \xrightarrow{A} f \wedge g_n \xrightarrow{A} g \Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{A+B} f + g$$

gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (f(x) = \infty \wedge g(x) = -\infty) \vee (f(x) = -\infty \wedge g(x) = \infty) \vee \bigvee_{k \in \mathbb{N}} (f_k(x) = \infty \wedge g_k(x) = -\infty) \vee \bigvee_{k \in \mathbb{N}} (f_k(x) = -\infty \wedge g_k(x) = \infty)\} \cap A = \{x : f(x) = \infty \wedge x \in A\} \cap \{x : g(x) = -\infty \wedge x \in A\} \cup \{x : f(x) = -\infty \wedge x \in A\} \cap \{x : g(x) = \infty \wedge x \in A\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f_k(x) = \infty \wedge x \in A\} \cap \{x : g_k(x) = -\infty \wedge x \in A\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f_k(x) = -\infty \wedge x \in A\} \cap \{x : g_k(x) = \infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

D] Na mocy twierdzenia § 187 funkcje $f+g$, f_1+g_1 , f_2+g_2 , ... są mierzalne na zbiorze $A-B \in \mathcal{S}$. Niech

$$A-B = C_1 + \dots + C_7$$

gdzie

$$C_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{x : |f(x)| < \infty \wedge |g(x)| < \infty \wedge x \in A-B\} \in \mathcal{S}$$

$$C_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x : f(x) = \infty \wedge |g(x)| < \infty \wedge x \in A-B\} \in \mathcal{S}$$

$$C_3 \stackrel{\text{def}}{=} \{x : f(x) = -\infty \wedge |g(x)| < \infty \wedge x \in A-B\} \in \mathcal{S}$$

$$C_4 \stackrel{\text{def}}{=} \{x : |f(x)| < \infty \wedge g(x) = \infty \wedge x \in A-B\} \in \mathcal{S}$$

$$C_5 \stackrel{\text{def}}{=} \{x : |f(x)| < \infty \wedge g(x) = -\infty \wedge x \in A-B\} \in \mathcal{S}$$

$$C_6 \stackrel{\text{def}}{=} \{x : f(x) = g(x) = \infty \wedge x \in A-B\} \in \mathcal{S}$$

$$C_7 \stackrel{\text{def}}{=} \{x : f(x) = g(x) = -\infty \wedge x \in A-B\} \in \mathcal{S}$$

Mamy

$$\bigwedge_{x \in C_1} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_x \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_x}} |[f_n(x) + g_n(x)] - [f(x) + g(x)]| < \varepsilon \\ \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{C_1} f + g$$

Mamy dalej

$$\bigwedge_{x \in C_2} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_x \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_x}} |f_n(x) + g_n(x) - \frac{1}{\varepsilon} + g(x) - \varepsilon| < \varepsilon \\ \Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{C_2} f + g = \infty$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$f_n + g_n \xrightarrow{C_k} f + g$$

dla $k = 3, 4, 5, 6, 7$. Na mocy (nz4) otrzymujemy stąd własność (nz7).

$$(nz8) \quad f_n \xrightarrow{A} f \wedge g_n \xrightarrow{A} g \Rightarrow f_n - g_n \xrightarrow{A-B} f - g$$

gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : f(x) = g(x) = \infty \vee f(x) = g(x) = -\infty \vee \bigvee_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = g_k(x) = \infty \vee \bigvee_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = g_k(x) = -\infty \right\} \cap A \in \mathcal{S}$$

D] Analogiczny do dowodu własności (nz7).

$$(nz9) \quad f_n \xrightarrow{A} f \wedge g_n \xrightarrow{A} g \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{A-B} fg$$

gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x : (f(x) = 0 \wedge |g(x)| = \infty) \vee (|f(x)| = \infty \wedge g(x) = 0) \} \in \mathcal{S}$$

D] Na mocy twierdzenia § 191 funkcje $fg, f_1g_1, f_2g_2, \dots$ są mierzalne na zbiorze $A - B \in \mathcal{S}$. Niech

$$A - B = C_1 + \dots + C_{13}$$

gdzie

$$C_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x : |f(x)| < \infty \wedge |g(x)| < \infty \wedge x \in A - B \} \in \mathcal{S}$$

$$C_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x : f(x) = \infty \wedge 0 < g(x) < \infty \wedge x \in A - B \} \in \mathcal{S}$$

$$C_3 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x : f(x) = \infty \wedge -\infty < g(x) < 0 \wedge x \in A - B \} \in \mathcal{S}$$

$$C_4 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x : f(x) = \infty \wedge g(x) = -\infty \wedge x \in A - B \} \in \mathcal{S}$$

$$C_5 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x : f(x) = g(x) = \infty \wedge x \in A - B \} \in \mathcal{S}$$

$$C_6 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x : f(x) = -\infty \wedge 0 < g(x) < \infty \wedge x \in A - B \} \in \mathcal{S}$$

$$C_7 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x : f(x) = -\infty \wedge -\infty < g(x) < 0 \wedge x \in A - B \} \in \mathcal{S}$$

$$C_8 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x : f(x) = g(x) = -\infty \wedge x \in A - B \} \in \mathcal{S}$$

$$C_9 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x : f(x) = -\infty \wedge g(x) = \infty \wedge x \in A - B \} \in \mathcal{S}$$

$$C_{10} \stackrel{\text{def}}{=} \{x: 0 < f(x) < \infty \wedge g(x) = \infty \wedge x \in A-B\} \in S$$

$$C_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \{x: -\infty < f(x) < 0 \wedge g(x) = \infty \wedge x \in A-B\} \in S$$

$$C_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \{x: 0 < f(x) < \infty \wedge g(x) = -\infty \wedge x \in A-B\} \in S$$

$$C_{13} \stackrel{\text{def}}{=} \{x: -\infty < f(x) < 0 \wedge g(x) = -\infty \wedge x \in A-B\} \in S$$

Mamy

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{x \in C_1} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_x \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_x}} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = \\ & = |f_n(x)[g_n(x) - g(x)] + g(x)[f_n(x) - f(x)]| \leq \\ & \leq |f_n(x)| |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| |f_n(x) - f(x)| \leq \\ & \leq \varepsilon(|f(x)| + \varepsilon + |g(x)|) \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{C_1} fg \end{aligned}$$

Mamy dalej

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{x \in C_2} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ 0 < \varepsilon < g(x)}} \bigvee_{n_x \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_x}} f_n(x) > \frac{1}{\varepsilon[g(x) - \varepsilon]} \wedge \\ & \wedge g_n(x) > g(x) - \varepsilon > 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \bigwedge_{x \in C_2} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ 0 < \varepsilon < g(x)}} \bigvee_{n_x \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_x}} f_n(x)g_n(x) > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \\ & \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{C_2} fg = \infty \end{aligned}$$

Dowód dla pozostałych zbiorów C_3, \dots, C_{13} przebiega analogicznie.

(nz10)

$$f_n \xrightarrow{A} f \Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} f_n^k \xrightarrow{A} f_k$$

D] Dowód przeprowadzimy przez indukcję. Dla $k=1$ własność (nz10) jest oczywista. Jeśli dalej własność (nz10) jest prawdziwa dla $k=r$, to

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{A} f & \Rightarrow f_n \xrightarrow{A} f \wedge f_n^r \xrightarrow{A} f^r \Rightarrow f_n f_n^r \xrightarrow{A} f f^r \Rightarrow \\ & \Rightarrow f_n^{r+1} \xrightarrow{A} f^{r+1} \end{aligned}$$

na mocy własności (nz9).

$$(nz11) \quad f_n \xrightarrow{A} f \Rightarrow \bigwedge_{c \in \mathfrak{R}} c f_n \xrightarrow{A} c f$$

D] Dla $c=0$ implikacja jest oczywista ze względu na umowę, że

$$0 \cdot (\pm \infty) = 0$$

Dla $c \neq 0$ własność wynika bezpośrednio z własności (nz9) dla $g_n(x) = g(x) = c$.

$$(nz12) \quad f_n \xrightarrow{A} f \Rightarrow \frac{1}{f_n} \xrightarrow{A-B} \frac{1}{f}$$

gdzie

$$\begin{aligned} B &\stackrel{\text{def}}{=} \{x: f(x) = 0 \vee \bigvee_{k \in \mathfrak{R}} f_k(x) = 0\} \cap A = \\ &= \{x: f(x) = 0 \wedge x \in A\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x: f_k(x) = 0 \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

D] Na mocy twierdzenia § 193 funkcje $1/f$, $1/f_1$, $1/f_2$, ... są mieralne na zbiorze $A-B$. Ponadto

$$\begin{aligned} &\bigwedge_{x \in A-B} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ 0 < \varepsilon < |f(x)|}} \bigvee_{n_x \in \mathfrak{R}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{R} \\ n > n_x}} \left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \\ &= \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)||f(x)|} \leq \frac{\varepsilon}{(|f(x)| - \varepsilon)|f(x)|} \Rightarrow \frac{1}{f_n} \xrightarrow{A-B} \frac{1}{f} \end{aligned}$$

$$(nz13) \quad f_n \xrightarrow{A} f \wedge g_n \xrightarrow{A} g \Rightarrow \frac{f_n}{g_n} \xrightarrow{A-B} \frac{f}{g}$$

gdzie

$$\begin{aligned} B &\stackrel{\text{def}}{=} \{x: g(x) = 0 \vee \bigvee_{k \in \mathfrak{R}} g_k(x) = 0 \vee |f(x)| = |g(x)| = \infty \vee \\ &\vee \bigvee_{k \in \mathfrak{R}} |f_k(x)| = |g_k(x)| = \infty\} \cap A \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

D] Na mocy twierdzenia § 194 funkcje $\frac{f}{g}$, $\frac{f_1}{g_1}$, $\frac{f_2}{g_2}$, ... są mieralne na zbiorze $A-B \in \mathcal{S}$. Również funkcje $1/g$, $1/g_1$, $1/g_2$, ... są mieralne na zbiorze $A-B$ i

$$\bigwedge_{x \in A-B} \left| \frac{1}{g(x)} \right| < \infty \wedge \bigwedge_{k \in \mathfrak{R}} \left| \frac{1}{g_k(x)} \right| < \infty$$

Wobec tego własność (nz13) wynika z własności (nz12) i (nz9), ponieważ na zbiorze $A-B$

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \quad \text{i} \quad \frac{f_n}{g_n} = f_n \cdot \frac{1}{g_n}$$

(nz14) Z] 1^0 f, f_1, f_2, \dots są funkcjami mierzalnymi i skończonymi na zbiorze $A \in \mathcal{S}$.

2^0 h jest skończoną funkcją rzeczywistą o dziedzinie $H \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na prostej \mathbb{R} , ciągłą na zbiorze $Y \subset H$ domkniętym w przestrzeni H i takim, że

$$f(A), f_1(A), f_2(A), \dots \subset Y$$

$$\text{[I]} \quad f_n \xrightarrow{A} f \Rightarrow h(f_n) \xrightarrow{A} h(f).$$

D] Na mocy twierdzenia § 199 funkcja h jest borelowska na zbiorze Y , a na mocy twierdzenia § 186 funkcje $h(f), h(f_1), h(f_2), \dots$ są mierzalne na zbiorze A . Ponadto na mocy ciągłości funkcji h na zbiorze $f(A)$

$$\bigwedge_{x \in A} f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \Rightarrow h[f_n(x)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h[f(x)]$$

Zatem

$$f_n \xrightarrow{A} f \Rightarrow h(f_n) \xrightarrow{A} h(f)$$

co było do wykazania.

§ 211. Zbieżność jednostajna

Mówimy, że ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f na zbiorze A i piszemy

$$f_n \xrightarrow{j.A} f \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{j.A}{=} f$$

wtedy i tylko wtedy, gdy w danej przestrzeni X i dla ustalonego σ -ciała \mathcal{S}

$A \in \mathcal{S} \wedge f, f_1, f_2, \dots$ są funkcjami mierzalnymi i skończonymi na zbiorze $A \wedge$

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Gdy ponadto $A = X$, to mówimy po prostu, że ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f i piszemy

$$f_n \xrightarrow{j} f \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{j}{=} f$$

Zbieżność jednostajna ma następujące własności:

$$(jz1) \quad f_n \xrightarrow{j, A} f \wedge f_n \xrightarrow{j, A} g \implies f \stackrel{A}{=} g$$

D] Gdyby z danych założeń nie wynikało, że $f \stackrel{A}{=} g$, oznaczałoby to, że

$$\bigvee_{x \in A} \bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} |f(x) - g(x)| > \varepsilon$$

Ale wtedy nie mogłyby być spełnione równocześnie nierówności

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ponieważ

$$|f(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - g(x)|$$

Zatem teza, że $f \stackrel{A}{=} g$ jest prawdziwa.

$$(jz2) \quad f_n \xrightarrow{j, A} f \implies \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} f_{m_n} \xrightarrow{j, A} f$$

D] Mamy

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \implies \\ & \implies \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m_n \in \mathbb{N} \\ m_n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_{m_n}(x) - f(x)| < \varepsilon \implies \\ & \implies \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{m_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > m_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_{m_n}(x) - f(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Ponieważ z założenia $A \in \mathcal{S}$ i funkcje $f, f_{m_1}, f_{m_2}, \dots$ są mierzalne i skończone na zbiorze A , więc $f_{m_n} \xrightarrow{j, A} f$.

$$(jz3) \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \wedge B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \Rightarrow f_n \xrightarrow{j.B} f.$$

D] Wynika bezpośrednio z definicji zbieżności jednostajnej.

$$(jz4) \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \wedge \dots \wedge f_n \xrightarrow{j.A_m} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{j.\bigcup_{k=1}^m A_k} f$$

D] Z założenia wynika, że $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$ i wobec tego $\bigcup_{k=1}^m A_k \in \mathcal{S}$ oraz, że funkcje f, f_1, f_2, \dots są mierzalne i skończone na zbiorach A_1, \dots, A_m i wobec tego są mierzalne i skończone na zbiorze $\bigcup_{k=1}^m A_k$. Ponadto

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{k \in \{1, \dots, m\}} \bigvee_{n_k \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_k}} \bigwedge_{x \in A_k} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

skąd wynika, że dla $n_0 = \max(n_1, \dots, n_m)$ jest

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in \bigcup_{k=1}^m A_k} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Zatem $f_n \xrightarrow{j.\bigcup_{k=1}^m A_k} f$.

(jz5) $f_n \xrightarrow{j.A} f \Leftrightarrow$ ciąg (f_n) spełnia jednostajnie warunek Cauchy'ego na zbiorze $A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \in \mathcal{S} \wedge f_1, f_2, \dots$ są funkcjami mierzalnymi i skończonymi na zbiorze $A \wedge$

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigvee_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

D] 1) $f_n \xrightarrow{j.A} f \Rightarrow A \in \mathcal{S} \wedge f_1, f_2, \dots$ mierzalne i skończone na zbiorze $A \wedge$

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigvee_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$\ll |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

2) Niech ciąg (f_n) spełnia jednostajnie warunek Cauchy'ego na zbiorze A .

Z zupełności przestrzeni \mathbb{R} wynika, że

$$\bigwedge_{x \in A} \bigvee_{f(x) \in \mathbb{R}} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)$$

Niech zatem

$$\bigwedge_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$$

Na mocy twierdzenia § 198 funkcja f jest mierzalna na zbiorze A , a z powyższego warunku, że $f(x) \in \mathbb{R}$ wynika, że jest skończona na zbiorze A . Przechodząc we wzorze

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

do granicy z $m \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

skąd $f_n \xrightarrow{j.A} f$.

$$(jz6) \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{A} f$$

$$\begin{aligned} \text{D)} \quad f_n \xrightarrow{j.A} f &\Rightarrow A \in \mathcal{S} \wedge f, f_1, f_2, \dots \text{ mierzalne na zbiorze } A \wedge \\ &\wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow A \in \mathcal{S} \wedge f, f_1, f_2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{mierzalne na zbiorze } A \wedge \bigwedge_{\substack{x \in A \\ \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_n \xrightarrow{A} f \end{aligned}$$

$$(jz7) \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \Rightarrow \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} c f_n \xrightarrow{j.A} c f$$

$$\text{D)} \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \Rightarrow A \in \mathcal{S} \wedge f, f_1, f_2, \dots \text{ mierzalne i skończone na zbiorze } A \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{\substack{c \in \mathbb{R} \\ c \neq 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |c f_n(x) - c f(x)| < \frac{\varepsilon}{|c|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{S} \wedge c f, c f_1, c f_2, \dots \text{ mierzalne i skończone na zbiorze}$$

$$\begin{aligned} A \wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{\substack{c \in \mathbb{R} \\ c \neq 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |c f_n(x) - c f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigwedge_{\substack{c \in \mathbb{R} \\ c \neq 0}} c f_n \xrightarrow{j.A} c f \end{aligned}$$

Przypadek $c = 0$ jest oczywisty.

$$(jz8) \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{j.A} g \Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{j.A} f + g$$

D $f_n \xrightarrow{j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{j.A} g \Rightarrow A \in S \wedge$ funkcje $f, f_1, f_2, \dots, g, g_1, g_2, \dots$ i $f+g, f_1+g_1, f_2+g_2, \dots$ są na mocy twierdzenia § 188 mierzalne i skończone na zbiorze $A \wedge$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leq \\ \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{j.A} f + g$$

$$(jz9) \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{j.A} g \Rightarrow f_n - g_n \xrightarrow{j.A} f - g$$

D Wynika z (jz7) i (jz8).

$$(jz10) \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{j.A} g \wedge$$

$$\wedge \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathfrak{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in A} (|f(x)| < \alpha \wedge |g(x)| < \alpha) \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{j.A} fg$$

$$\underline{D} \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{j.A} g \wedge$$

$$\wedge \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathfrak{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in A} (|f(x)| < \alpha \wedge |g(x)| < \alpha) \Rightarrow A \in S \wedge$$

$\wedge fg, f_1 g_1, f_2 g_2, \dots$ są mierzalne i skończone na zbiorze $A \wedge$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| =$$

$$= | [f_n(x) - f(x)] [g_n(x) - g(x)] + f(x) [g_n(x) - g(x)] + g(x) [f_n(x) - f(x)] | \leq |f_n(x) - f(x)| |g_n(x) - g(x)| + |f(x)| |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon^2 + 2\alpha \varepsilon \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{j.A} fg$$

$$(jz11) \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \wedge \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathfrak{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in A} |f(x)| < \alpha \Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} f_n^k \xrightarrow{j.A} f^k$$

D Wynika z własności (jz10).

$$(jz12) \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \wedge \bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} f_n(x) \neq 0 \wedge$$

$$\wedge \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathfrak{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in A} |f(x)| > \alpha \Rightarrow \frac{1}{f_n} \xrightarrow{j.A} \frac{1}{f}$$

D] Z danych założeń wynika, że $A \in \mathcal{S} \wedge \frac{1}{f}, \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_2}, \dots$ są funkcjami mierzalnymi i skończonymi na zbiorze $A \wedge$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} \left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \\ = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)| |f(x)|} < \frac{\varepsilon}{\frac{\alpha}{2} \cdot \alpha} \Rightarrow \frac{1}{f_n} \xrightarrow{j.A} \frac{1}{f}.$$

$$(jz13) \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{j.A} g \wedge$$

$$\left(\bigvee_{\substack{\alpha, b \in \mathbb{R} \\ \alpha, b > 0}} \bigwedge_{x \in A} f(x) < \alpha \wedge g(x) > b \right) \wedge \bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{f_n}{g_n} \xrightarrow{j.A} \frac{f}{g}$$

D] Wynika z własności (jz10) i (jz12).

$$(jz14) \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{\substack{\alpha_n \in \mathbb{R} \\ \alpha_n > 0}} \bigwedge_{x \in A} |f_n(x)| < \alpha_n \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in A} |f(x)| < \alpha$$

D] Niech n_0 będzie dla ustalonej liczby rzeczywistej dodatniej ε taką liczbą naturalną, że

$$\bigwedge_{x \in A} |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Wtedy

$$\bigwedge_{x \in A} |f(x)| = |f_{n_0}(x) + f(x) - f_{n_0}(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| < \\ < \alpha_{n_0} + \varepsilon = \alpha$$

(jz15) Z] 1° A jest zbiorem otwartym w przestrzeni metrycznej X .

2° $f_n \xrightarrow{j.A} f$.

3° f_1, f_2, \dots ciągłe na zbiorze A .

T] f jest funkcją ciągłą na zbiorze A .

$$\text{D]} \quad \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{x, x_0 \in A \\ |x - x_0| < \delta}} |f(x) - f(x_0)| =$$

$$= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow$$

tw. (B) z § 168 $\Rightarrow f$ jest funkcją ciągłą na zbiorze A .

(jz16) Z $1^0 f, f_1, f_2, \dots$ są funkcjami mierzalnymi i skończonymi na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ w przestrzeni X .

$2^0 h$ jest skończoną funkcją rzeczywistą o dziedzinie $H \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na prostej \mathbb{R} , jednostajnie ciągłą na zbiorze Y , tzn.

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{y_1, y_2 \in Y} (|y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |h(y_1) - h(y_2)| < \varepsilon)$$

3^0 zbiór Y jest domknięty w przestrzeni H .

$4^0 f(A), f_1(A), f_2(A), \dots \subset Y$.

$$\text{T} \quad f_n \xrightarrow{j.A} f \Rightarrow h(f_n) \xrightarrow{j.A} h(f)$$

D Na mocy twierdzenia § 199 funkcja h jest borelowska na zbiorze Y , a na mocy twierdzenia § 186 funkcje $h(f), h(f_1), h(f_2), \dots$ są mierzalne na zbiorze A . Ponieważ funkcja h jest skończona, więc funkcje $h(f), h(f_1), h(f_2), \dots$ są też skończone na zbiorze A . Wreszcie na mocy jednostajnej ciągłości funkcji h

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{j.A} f &\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |h(f_n(x)) - h(f(x))| < \varepsilon \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy tezę dowodzonej własności.

Przy wykorzystywaniu własności (jz16) przydaje się następujące twierdzenie.

Twierdzenie (A)

Jeśli funkcja rzeczywista h o dziedzinie $H \in \mathcal{B}$ jest ciągła na przedziale $\langle a; b \rangle \subset H$, $a, b \in \mathbb{R}$, to jest jednostajnie ciągła na tym przedziale.

D Niech w_1, w_2, \dots będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych z przedziału $\langle a; b \rangle$. Na mocy twierdzenia § 168

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \bigvee_{\substack{\delta_k \in \mathbb{R} \\ \delta_k > 0}} \bigwedge_{x \in \langle a, b \rangle} (x \in (w_k - 2\delta_k; w_k + 2\delta_k) \Rightarrow |h(x) - h(w_k)| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Mamy

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (w_k - \delta_k; w_k + \delta_k) \supset \langle a; b \rangle$$

i na mocy twierdzenia § 91

$$\bigvee_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^m (w_{k_j} - \delta_{k_j}; w_{k_j} + \delta_{k_j}) \supset \langle a; b \rangle$$

Niech

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \min(\delta_{k_1}, \dots, \delta_{k_m})$$

Stąd

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{\substack{x_1, x_2 \in \langle a; b \rangle \\ |x_1 - x_2| < \delta}} \bigvee_{r \in \{1, \dots, m\}} x_1 \in (w_{k_r} - \delta_{k_r}; w_{k_r} + \delta_{k_r}) \wedge \\ & \wedge x_2 \in (w_{k_r} - 2\delta_{k_r}; w_{k_r} + 2\delta_{k_r}) \Rightarrow |h(x_1) - h(x_2)| \leq |h(x_1) - h(w_{k_r})| + \\ & + |h(w_{k_r}) - h(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} x_1, x_2 \in \langle a; b \rangle (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |h(x_1) - h(x_2)| < \varepsilon)$$

co było do dowiedzenia.

§ 212. Zbieżność prawie wszędzie

Mówimy, że ciąg (f_n) jest zbieżny do funkcji f prawie wszędzie na zbiorze A i piszemy

$$f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f$$

wtedy i tylko wtedy, gdy w danej przestrzeni z miarą (X, \mathcal{S}, μ) :

$A \in \mathcal{S} \wedge f, f_1, f_2, \dots$ są funkcjami mierzalnymi μ na zbiorze $A \wedge$

$$\bigwedge_{\substack{B \subset A \\ B \in \mathcal{S}}} \mu(A-B) = 0 \wedge f_n \xrightarrow{B} f$$

Gdy ponadto $A = X$, to mówimy po prostu, że ciąg (f_n) jest zbieżny prawie wszędzie do funkcji f i piszemy

$$f_n \xrightarrow{\text{pr. w.}} f \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \xrightarrow{\text{pr. w.}} f.$$

Zbieżność prawie wszędzie ma następujące własności

$$(prw1) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f \wedge f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} g \implies f \xrightarrow{\text{pr. w. } A} g$$

D] Na mocy twierdzenia § 208

$$\begin{aligned} & \bigvee_{B \in \mathcal{S}} B \subset A \wedge \mu(A - B) = 0 \wedge f_n \xrightarrow{B} f \wedge f_n \xrightarrow{B} g \xRightarrow{(nz1)} \\ & \xRightarrow{(nz1)} f \xrightarrow{B} g \implies f \xrightarrow{\text{pr. w. } A} g \\ (prw2) \quad & \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} g_n \right) \wedge f \xrightarrow{\text{pr. w. } A} g \implies \\ & \implies \left(f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f \iff g_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} g \right) \end{aligned}$$

(Własność ta oznacza, że zbieżność prawie wszędzie jest w istocie określona w zbiorze klas funkcji równoważnych).

D] Załóżmy, że

$$f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f$$

Na mocy twierdzenia § 208

$$\begin{aligned} & \bigvee_{B \in \mathcal{S}} B \subset A \wedge \mu(A - B) = 0 \wedge f_n \xrightarrow{B} f \wedge f_n \xrightarrow{B} g_n \wedge f \xrightarrow{B} g \implies \\ & \implies \bigvee_{B \in \mathcal{S}} B \subset A \wedge \mu(A - B) = 0 \wedge g_n \xrightarrow{B} g \implies g_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} g \end{aligned}$$

Ze względu na symetrię również $g_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} g \implies f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f$, skąd otrzymujemy żadaną równoważność.

$$(prw3) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f \implies \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} f_{m_n} \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f$$

D] Wynika z definicji zbieżności prawie wszędzie i własności (nz2) zbieżności na zbiorze.

$$(prw4) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f \wedge B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \implies f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } B} f$$

D] Wynika z twierdzenia § 205.

$$\begin{aligned} (prw5) \quad & f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f \wedge C \in \mathcal{S} \wedge C \supset A \wedge \mu(C - A) = 0 \implies \\ & \implies f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } C} f \end{aligned}$$

D] Wynika z twierdzenia § 206.

$$(prw6) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A_1} f \wedge \dots \wedge f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A_m} f \implies f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } \bigcup_{k=1}^m A_k} f$$



$$\text{D)} \quad k \in \{1, \dots, m\} \quad \bigwedge_{B_k \in \mathcal{S}} B_k \subset A_k \wedge \mu(A_k - B_k) = 0 \wedge$$

$$\wedge f_n \xrightarrow{B_k} f \xrightarrow{(nz4)} f_n \xrightarrow{\bigcup_{k=1}^m B_k} f$$

Ale

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^m A_k - \bigcup_{k=1}^m B_k\right) = \mu\left[\bigcup_{k=1}^m (A_k - B_k) - \bigcup_{k=1}^m B_k\right] \leq$$

$$\leq \mu\left[\bigcup_{k=1}^m (A_k - B_k)\right] \leq \sum_{k=1}^m \mu(A_k - B_k) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^m A_k - \bigcup_{k=1}^m B_k\right) = 0$$

i wobec tego

$$f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } \bigcup_{k=1}^m A_k} f$$

co było do dowiedzenia.

$$\begin{aligned} (\text{prw7}) \quad f_n &\xrightarrow{\text{pr. w. } A_1} f \wedge f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A_2} f \wedge \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} f \end{aligned}$$

D) Analogiczny do dowodu własności (prw6).

(prw8) $f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f \wedge f, f_1, f_2, \dots$ skończone prawie wszędzie na zbiorze $A \Leftrightarrow$ ciąg (f_n) spełnia warunek Cauchy'ego prawie wszędzie na zbiorze $A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \in \mathcal{S} \wedge f_1, f_2, \dots$ mierzalne μ na zbiorze A i skończone prawie wszędzie na zbiorze $A \wedge$

$$\wedge \bigvee_{B \in \mathcal{S}} B \subset A \wedge \mu(A - B) = 0$$

$$\wedge \bigwedge_{x \in B} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_x \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_x}} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

D) Wynika z twierdzenia § 208 i własności (nz6).

$$(\text{prw9}) \quad f_n \xrightarrow{A} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f$$

D) Wynika z definicji zbieżności prawie wszędzie.

$$(prw10) \quad f_n \xrightarrow{J.A} f \implies f_n \xrightarrow{pr. w. A} f$$

D] Wynika z własności (jz6) i (prw9).

$$(prw11) \quad f_n \xrightarrow{pr. w. A} f \implies \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} c f_n \xrightarrow{pr. w. A} c f$$

D] Dla $c = 0$ implikacja jest oczywista ze względu na umowę, że $0 \cdot (\pm \infty) = 0$.

Dla $c \neq 0$ własność wynika z definicji zbieżności prawie wszędzie i własności (nz11).

$$(prw12) \quad f_n \xrightarrow{pr. w. A} f \wedge g_n \xrightarrow{pr. w. A} g \implies f_n + g_n \xrightarrow{pr. w. A-B} f + g$$

gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : (f(x) = \infty \wedge g(x) = -\infty) \vee (f(x) = -\infty \wedge g(x) = \infty) \vee \bigvee_{k \in \mathbb{N}} (f_k(x) = \infty \wedge g_k(x) = -\infty) \vee \bigvee_{k \in \mathbb{N}} (f_k(x) = -\infty \wedge g_k(x) = \infty) \right\} \cap A \in \mathcal{S}$$

D] Na mocy twierdzenia § 208

$$\bigvee_{C \in \mathcal{S}} C \subset A \wedge \mu(A - C) = 0 \wedge f_n \xrightarrow{C} f \wedge g_n \xrightarrow{C} g \xrightarrow{(nz?)}$$

$$\xrightarrow{(nz?) } f_n + g_n \xrightarrow{C-B} f + g$$

Ponieważ

$$\mu[(A - B) - (C - B)] = \mu[(A - B) - C] = \mu[(A - C) - B] \leq \leq \mu(A - C) = 0 \implies \mu[(A - B) - (C - B)] = 0$$

więc

$$f_n + g_n \xrightarrow{pr. w. A-B} f + g$$

$$(prw13) \quad f_n \xrightarrow{pr. w. A} f \wedge g_n \xrightarrow{pr. w. A} g \implies f_n - g_n \xrightarrow{pr. w. A-B} f - g$$

gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : f(x) = g(x) = \infty \vee f(x) = g(x) = -\infty \vee \bigvee_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = g_k(x) = \infty \vee \bigvee_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = g_k(x) = -\infty \right\} \cap A \in \mathcal{S}$$

D] Analogiczny do dowodu własności (prw12).

$$(prw14) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} f \wedge g_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} g \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A-B} fg$$

gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x: (f(x) = 0 \wedge |g(x)| = \infty) \vee (|f(x)| = \infty \wedge g(x) = 0)\}$$

D] Analogiczny do dowodu własności (prw12).

$$(prw15) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} f \Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} f_n^k \xrightarrow{\text{pr.w. } A} f^k$$

D] Wynika z definicji zbieżności prawie wszędzie i własności (nz10).

$$(prw16) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} f \Rightarrow \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\text{pr.w. } A-B} \frac{1}{f}$$

gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x: f(x) = 0 \vee \bigvee_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = 0\} \cap A \in \mathcal{S}$$

D] Analogiczny do dowodu własności (prw12).

$$(prw17) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} f \wedge g_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} g \Rightarrow \frac{f_n}{g_n} \xrightarrow{\text{pr.w. } A-B} \frac{f}{g}$$

gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x: g(x) = 0 \vee \bigvee_{k \in \mathbb{N}} g_k(x) = 0 \vee$$

$$\vee |f(x)| = |g(x)| = \infty \vee \bigvee_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| = |g_k(x)| = \infty\} \cap A \in \mathcal{S}$$

D] Analogiczny do dowodu własności (prw12).

(prw18) Z] 1^0 f, f_1, f_2, \dots są funkcjami mierzalnymi μ i skończonymi prawie wszędzie na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ w przestrzeni z miarą (X, \mathcal{S}, μ) .

2^0 h jest skończoną funkcją rzeczywistą o dziedzinie $H \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na prostej \mathbb{R} , ciągłą na zbiorze $Y \subset H$ domkniętym w przestrzeni H i takim, że $f(A), f_1(A), f_2(A), \dots \subset Y$.

$$\text{T]} \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} f \Rightarrow h(f_n) \xrightarrow{\text{pr.w. } A} h(f)$$

D] Na mocy twierdzenia § 208

$\bigvee_{B \in \mathcal{S}} B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge f, f_1, f_2, \dots$ są funkcjami mierzalnymi i skończonymi na zbiorze $B \wedge$

$$\wedge f(B), f_1(B), f_2(B), \dots \subset Y \wedge f_n \xrightarrow{B} f \xrightarrow{(nz14)} \\ \xrightarrow{(nz14)} h(f_n) \xrightarrow{B} h(f) \implies h(f_n) \xrightarrow{\text{pr. w. } A} h(f)$$

§ 213. Zbieżność prawie jednostajna

Mówimy, że ciąg (f_n) jest zbieżny prawie jednostajnie do funkcji f na zbiorze A i piszemy

$$f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} f \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} f$$

wtedy i tylko wtedy, gdy w danej przestrzeni z miarą (X, \mathcal{S}, μ) :
 $A \in \mathcal{S} \wedge f, f_1, f_2, \dots$ są funkcjami mierzalnymi μ na zbiorze $A \wedge$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{C \subset A} \mu(A-C) < \varepsilon \wedge f_n \xrightarrow{j \cdot C} f$$

Gdy ponadto $A = X$, to mówimy po prostu, że ciąg (f_n) jest zbieżny prawie jednostajnie do funkcji f i piszemy

$$f_n \xrightarrow{\text{pr. j.}} f \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \xrightarrow{\text{pr. j.}} f$$

Zbieżność prawie jednostajna ma następujące własności:

$$\begin{aligned} (\text{prj1}) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} f &\implies f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f \\ \Downarrow \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} f &\implies \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{C_m \subset A} \mu(A-C_m) < \frac{1}{m} \wedge f_n \xrightarrow{j \cdot C_m} f \end{aligned}$$

Niech

$$C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$$

$$\text{Mamy } C \in \mathcal{S} \wedge C \subset A \wedge \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \mu(A-C) \leq \mu(A-C_m) < \frac{1}{m}$$

skąd $\mu(A-C) = 0$. Z drugiej strony na mocy własności (jz6) i (nz5)

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} f_n \xrightarrow{j \cdot C_m} f \implies f_n \xrightarrow{C} f \implies f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f$$

$$(\text{prj2}) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} f \wedge f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} g \implies f \xrightarrow{\text{pr. w. } A} g$$