

$X_1 \times \dots \times X_n$. Ze względu na to, że zbiory postaci (*) są także postaci (vi), więc klasa \mathcal{H} jest ciałem zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ zawierającym wszystkie zbiory postaci (*) i na mocy (**)

$$X_1 * \dots * X_n \in \mathcal{H}$$

W konsekwencji otrzymujemy implikację (v), co kończy dowód własności (cp 4).

§ 175. σ -ciała produktowe

σ -ciałem produktowym $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$, gdzie $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ są σ -ciałami odpowiednio przestrzeni X_1, \dots, X_n , nazywamy najmniejsze σ -ciało przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ zawierające wszystkie zbiory postaci

$$(*) \quad X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times A_k \times X_{k+1} \times \dots \times X_n$$

gdzie

$$k \in \{1, 2, \dots, n\} \wedge A_k \in \mathcal{S}_k$$

Analogicznie, jak wykazaliśmy istnienie i jednoznaczność ciała produktowego, dowodzi się, że dla danych σ -ciał $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ istnieje dokładnie jedno σ -ciało produktowe $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$.

σ -ciało produktowe jako σ -ciało przestrzeni $X = X_1 \times \dots \times X_n$ ma wszystkie własności podane w § 24. Ma ponadto jeszcze następujące własności.

($\sigma p1$) σ -ciało produktowe $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$ jest najmniejszym σ -ciałem przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ zawierającym wszystkie zbiory postaci

$$(**) \quad A_1 \times \dots \times A_n$$

gdzie

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k \in \mathcal{S}_k$$

D] Analogiczny do dowodu własności (cp1).

($\sigma p2$) $(\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_m) \otimes (\mathcal{S}_{m+1} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n) = \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$

D] Analogiczny do dowodu własności (cp2).

(6p3) Jeśli $\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_q, \mathcal{B}_{p+q}$ oznaczają σ -ciała zbiorów borelowskich przestrzeni euklidesowych odpowiednio $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ i \mathbb{R}^{p+q} , to

$$\mathcal{B}_p \otimes \mathcal{B}_q = \mathcal{B}_{p+q}$$

D] Z definicji $\mathcal{B}_p \otimes \mathcal{B}_q$ jest najmniejszym σ -ciałem przestrzeni $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q}$ zawierającym wszystkie zbiory postaci

$$(***) \quad A \times \mathbb{R}^q \quad \text{ i } \quad \mathbb{R}^p \times B$$

gdzie

$$A \in \mathcal{B}_p \quad \text{ i } \quad B \in \mathcal{B}_q$$

Niech \mathcal{K} będzie klasą tych wszystkich zbiorów $K \in \mathbb{R}^p$, dla których

$$K \times \mathbb{R}^q \in \mathcal{B}_{p+q}$$

Klasa \mathcal{K} nie jest pusta, gdyż zawiera wszystkie przedziały postaci $< -\infty; x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}_0^p$, gdyż zbiory

$$< -\infty; x) \times \mathbb{R}^q$$

jako przedziały należą do \mathcal{B}_{p+q} . Zatem klasa \mathcal{K} spełnia warunek (61) dla σ -ciała.

Jeśli $K \in \mathcal{K}$, to

$$K^c \times \mathbb{R}^q = (\mathbb{R}^p - K) \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q - K \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q} -$$

$$- K \times \mathbb{R}^q \in \mathcal{B}_{p+q}$$

czyli klasa \mathcal{K} spełnia także warunek (62) dla σ -ciała. Wreszcie, jeśli $K_1, K_2, \dots \in \mathcal{K}$, czyli

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} K_k \times \mathbb{R}^q \in \mathcal{B}_{p+q}$$

to

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \times \mathbb{R}^q \stackrel{(\text{kar 4})}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} (K_k \times \mathbb{R}^q) \in \mathcal{B}_{p+q}$$

Klasa \mathcal{K} jest zatem σ -ciałem przestrzeni \mathbb{R}^p zawierającym wszystkie przedziały postaci $< -\infty; x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}_0^p$ i na mocy twierdzenia § 93

$$\mathcal{B}_p \subset \mathcal{K}$$

skąd

$$\mathcal{B}_p \times \mathbb{R}^q \subset \mathcal{B}_{p+q}$$

Zatem

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{B}_p} A \times \mathbb{R}^q \in \mathcal{B}_{p+q}$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\bigwedge_{B \in \mathcal{B}_q} \mathbb{R}^p \times B \in \mathcal{B}_{p+q}$$

W konsekwencji \mathcal{B}_{p+q} jest σ -ciałem przestrzeni \mathbb{R}^{p+q} zawierającym wszystkie zbiory postaci (***), skąd

$$(i) \quad \mathcal{B}_p \otimes \mathcal{B}_q \subset \mathcal{B}_{p+q}$$

Z drugiej strony na mocy własności ($\sigma p1$) klasa $\mathcal{B}_p \otimes \mathcal{B}_q$ zawiera wszystkie zbiory postaci $A \times B$, gdzie A jest przedziałem $< -\infty; x)$, $x \in \mathbb{R}_0^p$, a B jest przedziałem $< -\infty; y)$, $y \in \mathbb{R}_0^q$.

Z definicji przedziału w § 76 wynika, że zbiór

$$(***) \quad < -\infty; x) \times < -\infty; y)$$

jest przedziałem postaci $< -\infty; z)$, gdzie $z \in \mathbb{R}_0^{p+q}$, przestrzeni \mathbb{R}^{p+q} i odwrotnie każdy przedział $< -\infty; z)$ przestrzeni \mathbb{R}^{p+q} można przedstawić w postaci (***). Wynika stąd, że $\mathcal{B}_p \otimes \mathcal{B}_q$ jest σ -ciałem przestrzeni \mathbb{R}^{p+q} zawierającym wszystkie przedziały postaci $< -\infty; z)$, gdzie $z \in \mathbb{R}_0^{p+q}$, i na mocy twierdzenia § 93

$$(ii) \quad \mathcal{B}_p \otimes \mathcal{B}_q \supset \mathcal{B}_{p+q}$$

Z (i) i (ii) wynika żądana własność.

§ 176. Przekroje i rzuty zbiorów

Przekrojem zbioru $A \subset X_1 \times \dots \times X_n$ przez punkt $(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \in X_{i_{k+1}} \times \dots \times X_{i_n}$ przy ustalonej permutacji (i_1, \dots, i_n) ciągu $(1, \dots, n)$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, będziemy nazywać zbiór

$$A[x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}] \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) : (x_1, \dots, x_n) \in A\}$$

W niektórych przypadkach będziemy traktować przekrój zbioru A jako funkcję, której dziedziną jest przestrzeń $X_{i_{k+1}} \times \dots \times X_{i_n}$, a wartości podzbiarami przestrzeni $X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k}$.

Przekroje zbiorów mają następujące własności, w zapisie których przyjmujemy dla prostoty, że

$$x \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \dots, x_n), \quad y \stackrel{\text{def}}{=} (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), \quad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n})$$

$$A, A_1, A_2, \dots \subset X \stackrel{\text{def}}{=} X_1 \times \dots \times X_n$$

$$(\text{przek1}) \quad \left(\bigcup_{j=1}^m A_j \right)_{[\alpha]} = \bigcup_{j=1}^m A_{j[\alpha]}, \quad \left(\sum_{j=1}^m A_j \right)_{[\alpha]} = \sum_{j=1}^m A_{j[\alpha]}$$

gdzie $m \in \mathbb{N} \vee m = \infty$

D Z definicji

$$\left(\bigcup_{j=1}^m A_j \right)_{[\alpha]} = \{y: x \in \bigcup_{j=1}^m A_j\} = \bigcup_{j=1}^m \{y: x \in A_j\} = \bigcup_{j=1}^m A_{j[\alpha]}$$

$$\left(\sum_{j=1}^m A_j \right)_{[\alpha]} = \{y: x \in \sum_{j=1}^m A_j\} = \sum_{j=1}^m \{y: x \in A_j\} = \sum_{j=1}^m A_{j[\alpha]}$$

$$(\text{przek2}) \quad \left(\bigcap_{j=1}^m A_j \right)_{[\alpha]} = \bigcap_{j=1}^m A_{j[\alpha]}, \quad \text{gdzie } m \in \mathbb{N} \vee m = \infty$$

D Analogiczny do dowodu własności (przek1).

$$(\text{przek3}) \quad (X - A)_{[\alpha]} = X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} - A_{[\alpha]}$$

D Z definicji

$$\begin{aligned} (X - A)_{[\alpha]} &= \{y: x \notin A\} = X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} - \{y: x \in A\} = \\ &= X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} - A_{[\alpha]} \end{aligned}$$

$$(\text{przek4}) \quad (A_1 - A_2)_{[\alpha]} = A_{1[\alpha]} - A_{2[\alpha]}$$

$$\underline{D} \quad (A_1 - A_2)_{[\alpha]} = [A_1 \cap (X - A_2)]_{[\alpha]} \quad \begin{matrix} (\text{przek2}) \\ (\text{przek3}) \end{matrix}$$

$$= A_{1[\alpha]} \cap [(X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k}) - A_{2[\alpha]}] = A_{1[\alpha]} - A_{2[\alpha]}$$

(przek5) $A_1 \cap A_2 = 0 \Rightarrow A_1[\alpha] \cap A_2[\alpha] = 0$

D] Wynika bezpośrednio z własności (przek2).

(przek6) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_1[\alpha] \subset A_2[\alpha]$

D] Wynika bezpośrednio z definicji.

(przek7) Z] $1^\circ \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ są σ -ciałami odpowiednio przestrzeni X_1, \dots, X_n

$$2^\circ A \in \mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$$

$$\text{T]} \quad A[\alpha] \in \mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{i_k}$$

D] Niech \mathcal{K} będzie klasą wszystkich takich zbiorów $K \subset X_1 \times \dots \times X_n$, dla których

$$\alpha \in \bigwedge_{i_{k+1} \times \dots \times i_n} K[\alpha] \in \mathcal{M}$$

Klasa \mathcal{K} nie jest pusta, ponieważ należy do niej zbiór $X_1 \times \dots \times X_n$, dla którego

$$\bigwedge_{\alpha \in X_{i_{k+1}} \times \dots \times X_{i_n}} (X_1 \times \dots \times X_n)[\alpha] = X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} \in \mathcal{M}$$

Zatem klasa \mathcal{K} spełnia warunek (61) dla σ -ciał. Warunek (62) jest spełniony na mocy własności (przek3), a warunek (63) na mocy własności (przek1). Wobec tego klasa \mathcal{K} jest σ -ciałem przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$.

Klasa \mathcal{K} zawiera wszystkie zbiory postaci

$$(*) \quad C_t \stackrel{\text{def}}{=} X_1 \times \dots \times X_{t-1} \times B_t \times X_{t+1} \times \dots \times X_n$$

gdzie $t \in \{1, \dots, n\}$ i $B_t \in \mathcal{S}_t$, ponieważ dla $t = i_r$ jest

$$C_t[\alpha] = \begin{cases} X_{i_1} \times \dots \times X_{i_{r-1}} \times B_{i_r} \times X_{i_{r+1}} \times \dots \times X_{i_k} \in \mathcal{M} & \text{gdy } 1 \leq r \leq k \\ X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} \in \mathcal{M} & \text{gdy } k < r \leq n \wedge \alpha_t \in B_t \\ 0 \in \mathcal{M} & \text{gdy } k < r \leq n \wedge \alpha_t \notin B_t \end{cases}$$

na mocy definicji σ -ciała produktowego \mathcal{M} . Z uwagi na to, że z definicji \mathcal{S} jest najmniejszym σ -ciałem przestrzeni

$X_1 \times \dots \times X_n$ zawierającym wszystkie zbiory postaci (*), mamy $\mathcal{S} \subset \mathcal{K}$, co oznacza prawdziwość dowodzonej własności.

$$\begin{aligned} \text{(przek8)} \quad \underline{Z} \quad \alpha_1 &\stackrel{\text{def}}{=} (x_{i_{m+1}}, \dots, x_{i_n}) \in X_{i_{m+1}} \times \dots \times X_{i_n} \\ \alpha_2 &\stackrel{\text{def}}{=} (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_m}) \in X_{i_{k+1}} \times \dots \times X_{i_m}, \quad k < m < n \\ \alpha &\stackrel{\text{def}}{=} (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \in X_{i_{k+1}} \times \dots \times X_{i_n} \end{aligned}$$

$$\underline{T} \quad (A[\alpha_1])[\alpha_2] = A[\alpha]$$

D] Na mocy definicji

$$\begin{aligned} (A[\alpha_1])[\alpha_2] &= \{(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) : (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \in A[\alpha_1]\} = \\ &= \{(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) : (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \in \{(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) : \\ &(x_1, \dots, x_n) \in A\}\} = \{(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) : (x_1, \dots, x_n) \in A\} = \\ &= A[\alpha] \end{aligned}$$

$$\text{(przek9)} \quad A[x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}] = \left(\dots \left((A[x_{i_n}])[x_{i_{n-1}}] \right) \dots \right) [x_{i_{k+1}}]$$

D] Wynika z własności (przek8).

Rzutem zbioru $A \subset X_1 \times \dots \times X_n$ na przestrzeń $X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k}$, gdzie $k < n$ i (i_1, \dots, i_n) jest ustaloną permutacją ciągu $(1, \dots, n)$, będziemy nazywać zbiór

$$\begin{aligned} A^{[i_1, \dots, i_k]} &\stackrel{\text{def}}{=} \{(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) : x_{i_1} \in X_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} \in X_{i_k} \wedge \\ &\wedge \bigvee_{x_{i_{k+1}} \in X_{i_{k+1}}} \dots \bigvee_{x_{i_n} \in X_{i_n}} (x_1, \dots, x_n) \in A\} \end{aligned}$$

Rzuty zbiorów mają następujące własności, w zapisie których przyjmujemy, że

$$x \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \dots, x_n), \quad y \stackrel{\text{def}}{=} (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), \quad z \stackrel{\text{def}}{=} (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}),$$

$$z_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_{i_{k+1}}^{(j)}, \dots, x_{i_n}^{(j)}), \quad x \in X_1 \times \dots \times X_n, \quad y \in X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k},$$

$z, z_j \in X_{i_{k+1}} \times \dots \times X_{i_n}, j = 1, \dots, m, m \in \mathbb{N} \vee m = \infty,$

$A, A_1, A_2, \dots \subset X_1 \times \dots \times X_n, \alpha = (i_1, \dots, i_k)$

$$(r\text{zut1}) \quad \left(\bigcup_{j=1}^m A_j \right)^{[\alpha]} = \bigcup_{j=1}^m A_j^{[\alpha]}$$

$$\begin{aligned} \text{D]} \quad \left(\bigcup_{j=1}^m A_j \right)^{[\alpha]} &= \left\{ y : \bigvee_z x \in \bigcup_{j=1}^m A_j \right\} = \bigcup_{j=1}^m \left\{ y : \bigvee_z x \in A_j \right\} = \\ &= \bigcup_{j=1}^m A_j^{[\alpha]} \end{aligned}$$

$$(r\text{zut2}) \quad \left(\bigcap_{j=1}^m A_j \right)^{[\alpha]} \subset \bigcap_{j=1}^m A_j^{[\alpha]}$$

$$\begin{aligned} \text{D]} \quad \left(\bigcap_{j=1}^m A_j \right)^{[\alpha]} &= \left\{ y : \bigvee_z (x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots) \right\} \subset \\ &\subset \left\{ y : \bigvee_{z_1} x \in A_1 \wedge \bigvee_{z_2} x \in A_2 \wedge \dots \right\} = \\ &= \bigcap_{j=1}^m \left\{ y : \bigvee_{z_j} x \in A_j \right\} = \bigcap_{j=1}^m A_j^{[\alpha]} \end{aligned}$$

$$(r\text{zut3}) \quad (X_1 \times \dots \times X_n - A)^{[\alpha]} \supset X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} - A^{[\alpha]}$$

$$\begin{aligned} \text{D]} \quad (X_1 \times \dots \times X_n - A)^{[\alpha]} &= \left\{ y : \bigvee_z x \notin A \right\} = \\ &= (X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} - \left\{ y : \bigvee_z x \in A \right\}) \cup \left\{ y : \bigvee_{z_1} x \in A \wedge \bigvee_{z_2} x \notin A \right\} \supset \\ &\supset X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} - \left\{ y : \bigvee_z x \in A \right\} = X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} - A^{[\alpha]} \end{aligned}$$

$$(r\text{zut4}) \quad A = 0 \iff A^{[\alpha]} = 0$$

D] Wynika wprost z definicji.

$$(r\text{zut5}) \quad A_1^{[\alpha]} \cap A_2^{[\alpha]} = 0 \implies A_1 \cap A_2 = 0$$

D] Wynika z własności (rzut2) i (rzut4).

$$(r\text{zut6}) \quad A_1 \subset A_2 \implies A_1^{[\alpha]} \subset A_2^{[\alpha]}$$

D] Wynika wprost z definicji.

$$(rzut7) \quad (C_1 \times \dots \times C_n)^{[\alpha]} = C_{i_1} \times \dots \times C_{i_k}$$

gdzie

$$C_1 \subset X_1 \wedge \dots \wedge C_n \subset X_n$$

D] Wynika wprost z definicji.

$$(rzut8) \quad A \in \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n \Rightarrow A^{[\alpha]} \in \mathcal{K}_{i_1} * \dots * \mathcal{K}_{i_k} \text{ gdzie } \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n \text{ s\k{a} ciałami zbiorów w przestrzeniach odpowiednio } X_1, \dots, X_n.$$

D] Wynika z własności (cp3) z § 174 oraz własności (rzut7) i (rzut1).

$$(rzut9) \quad \underline{Z]} \quad b \stackrel{\text{def}}{=} (i_1, \dots, i_m) \wedge k < m < n$$

$$\underline{T]} \quad A^{[\alpha]} = (A^{[b]})^{[\alpha]}$$

$$\begin{aligned} \underline{D]} \quad & (A^{[b]})^{[\alpha]} = \\ & = \left\{ (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) : \bigvee_{x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_m}} (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \in A^{[b]} \right\} = \\ & = \left\{ (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) : \bigvee_{x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_m}} (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \in \right. \\ & \left. \in \left\{ (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) : \bigvee_{x_{i_{m+1}}, \dots, x_{i_n}} (x_1, \dots, x_n) \in A \right\} \right\} = \\ & = \left\{ (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) : \bigvee_{x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}} (x_1, \dots, x_n) \in A \right\} = A^{[\alpha]} \end{aligned}$$

§ 177. Produkty nieujemnych addytywnych funkcji zbioru

Produktem nieujemnych addytywnych funkcji zbioru $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ określonych odpowiednio na ciałach zbiorów $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ w przestrzeniach odpowiednio X_1, \dots, X_n , będziemy nazywać nieujemną addytywną funkcję zbioru λ , określoną na ciele produktowym $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$ w przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$, taką, że

$$(*) \quad \bigwedge_{A_1 \in \mathcal{K}_1 \wedge \dots \wedge A_n \in \mathcal{K}_n} \lambda(A_1 \times \dots \times A_n) = \lambda_1(A_1) \cdot \dots \cdot \lambda_n(A_n)$$

Twierdzenie (A)

Dla danych nieujemnych addytywnych funkcji zbioru $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, określonych odpowiednio na ciałach zbiorów $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$, w prze-

strzeniach odpowiednio $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, istnieje dokładnie jedna nieujemna addytywna funkcja zbioru λ określona na ciele produktowym $\mathcal{X}_1 * \dots * \mathcal{X}_n$ w przestrzeni $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ i taka, że

$$(i) \quad \bigwedge_{A_1 \in \mathcal{X}_1 \wedge \dots \wedge A_n \in \mathcal{X}_n} \lambda(A_1 \times \dots \times A_n) = \lambda_1(A_1) \cdot \dots \cdot \lambda_n(A_n)$$

D Przeprowadzimy dowód przez indukcję. Najpierw wykazemy słuszność twierdzenia dla $n = 2$.

Na mocy własności (cp 4) z § 174

$$(ii) \quad \bigwedge_{A \in \mathcal{X}_1 * \mathcal{X}_2} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{A_{11}, A_{21}, \dots, A_{1m}, A_{2m}} A = \sum_{j=1}^m (A_{1j} \times A_{2j})$$

gdzie

$$\bigwedge_{j \in \{1, \dots, m\}} A_{1j} \in \mathcal{X}_1 \wedge A_{2j} \in \mathcal{X}_2$$

Wprowadzamy liczbę

$$(iii) \quad \lambda(A) = \sum_{j=1}^m \lambda_1(A_{1j}) \cdot \lambda_2(A_{2j})$$

i wykazemy, że nie zależy ona od sposobu przedstawienia zbioru A w postaci (ii).

Rozpatrzmy zbiory

$$(iv) \quad C_{p_1} \dots p_m \stackrel{\text{def}}{=} C_{p_1}^{(1)} \cap \dots \cap C_{p_m}^{(m)}$$

gdzie

$$(v) \quad C_{p_j}^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} A_{1j} & \text{gdy } p_j = 1 \\ \mathcal{X}_1 - A_{1j} & \text{gdy } p_j = 2, j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Z powyższej definicji wynika, że zbiory $C_{p_1 \dots p_m} (p_1, \dots, p_m = 1, 2)$ są rozłączne i

$$(vi) \quad A_{1j} = \sum_{p_1=1}^2 \dots \sum_{p_{j-1}=1}^2 \sum_{p_{j+1}=1}^2 \dots \sum_{p_m=1}^2 C_{p_1 \dots p_{j-1} 1 p_{j+1} \dots p_m}$$

W konsekwencji na mocy (ii) i własności (kar5) z § 173

$$(vii) \quad A = \sum_{p_2=1}^2 \dots \sum_{p_m=1}^2 (C_{1p_2 \dots p_m} \times A_{21}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{p_1=1}^2 \sum_{p_3=1}^2 \dots \sum_{p_{m-1}=1}^2 (C_{p_1 1 p_3 \dots p_m} \times A_{22}) + \dots \\
& \dots + \sum_{p_1=1}^2 \dots \sum_{p_{m-1}=1}^2 (C_{p_1 \dots p_{m-1} 1} \times A_{2m}) = \\
& = \sum_{p_1=1}^2 \dots \sum_{p_m=1}^2 (C_{p_1 \dots p_m} \times E_{p_1 \dots p_m})
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
E_{p_1 \dots p_m} & \stackrel{\text{def}}{=} D_{p_1}^{(1)} \cup \dots \cup D_{p_m}^{(m)} \\
D_{p_j}^{(j)} & \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} A_{2j} & \text{gdy } p_j = 1 \\ 0 & \text{gdy } p_j = 2, j = 1, \dots, m \end{cases}
\end{aligned}$$

Zauważmy jeszcze, że ze względu na rozłączność zbiorów $A_{11} \times A_{21}, \dots, A_{1m} \times A_{2m}$ mamy

$$(viii) \quad C_{p_1 \dots p_m} \neq 0 \Rightarrow E_{p_1 \dots p_m} = D_{p_1}^{(1)} + \dots + D_{p_m}^{(m)}$$

Niech będzie teraz dany jakikolwiek inny rozkład zbioru A postaci (ii)

$$(ix) \quad A = \sum_{i=1}^r (B_{1i} \times B_{2i})$$

gdzie

$$\bigwedge_{i \in \{1, \dots, r\}} B_{1i} \in \mathcal{K}_1 \wedge B_{2i} \in \mathcal{K}_2$$

Analogicznie wprowadzamy zbiory

$$(x) \quad G_{u_1 \dots u_r} \stackrel{\text{def}}{=} G_{u_1}^{(1)} \cap \dots \cap G_{u_r}^{(r)}$$

gdzie

$$G_{u_i}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} B_{1i} & \text{gdy } u_i = 1 \\ \mathcal{K}_1 - B_{1i} & \text{gdy } u_i = 2, i = 1, \dots, r \end{cases}$$

Jest wtedy

$$(xi) \quad B_{1i} = \sum_{u_1=1}^2 \cdots \sum_{u_{i-1}=1}^2 \sum_{u_{i+1}=1}^2 \cdots \sum_{u_r=1}^2 G_{u_1 \dots u_{i-1} 1 u_{i+1} \dots u_r}$$

a w konsekwencji

$$(xii) \quad A = \sum_{u_1=1}^2 \cdots \sum_{u_r=1}^2 (G_{u_1 \dots u_r} \times H_{u_1 \dots u_r})$$

gdzie

$$H_{u_1 \dots u_r} \stackrel{\text{def}}{=} F_{u_1}^{(1)} \cup \dots \cup F_{u_r}^{(r)}$$

$$F_{u_i}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} B_{2i} & \text{gdy } u_i = 1 \\ 0 & \text{gdy } u_i = 2, \quad i = 1, \dots, r \end{cases}$$

i gdzie ponadto

$$(xiii) \quad G_{u_1 \dots u_r} \neq 0 \Rightarrow H_{u_1 \dots u_r} = F_{u_1}^{(1)} + \dots + F_{u_r}^{(r)}$$

Na mocy definicji

$$C_{p_1 \dots p_m}, G_{u_1, \dots, u_r} \in \mathcal{K}_1$$

$$E_{p_1 \dots p_m}, H_{u_1, \dots, u_r} \in \mathcal{K}_2$$

oraz

$$(xiv) \quad \sum_{p_1=1}^2 \cdots \sum_{p_m=1}^2 C_{p_1 \dots p_m} = \chi_1 \wedge \sum_{u_1=1}^2 \cdots \sum_{u_r=1}^2 G_{u_1 \dots u_r} = \chi_1$$

Wykorzystując te wzory otrzymujemy na mocy (vii)

$$A = \sum_{p_1=1}^2 \cdots \sum_{p_m=1}^2 \left((C_{p_1 \dots p_m} \cap \left(\sum_{u_1=1}^2 \cdots \sum_{u_r=1}^2 G_{u_1 \dots u_r} \right)) \times E_{p_1 \dots p_m} \right)$$

czyli

$$(xv) \quad A = \sum_{p_1=1}^2 \cdots \sum_{p_m=1}^2 \sum_{u_1=1}^2 \cdots \sum_{u_r=1}^2 \left((C_{p_1 \dots p_m} \cap G_{u_1 \dots u_r}) \times E_{p_1 \dots p_m} \right)$$

a na mocy (xii) analogicznie

$$(xvi) \quad A = \sum_{p_1=1}^2 \cdots \sum_{p_m=1}^2 \sum_{u_1=1}^2 \cdots \sum_{u_r=1}^2 \left((C_{p_1 \dots p_m} \cap G_{u_1 \dots u_r}) \times H_{u_1 \dots u_r} \right)$$

Na mocy rozłączności zbiorów $C_{p_1 \dots p_m} \cap G_{u_1, \dots, u_r}$ ($p_1, \dots, p_m, u_1, \dots, u_r = 1, 2$) otrzymujemy stąd

$$\bigwedge_{p_1, \dots, p_m} \bigwedge_{u_1, \dots, u_r} (C_{p_1, \dots, p_m} \cap G_{u_1, \dots, u_r}) \times E_{p_1, \dots, p_m} = \\ = (C_{p_1, \dots, p_m} \cap G_{u_1, \dots, u_r}) \times H_{u_1, \dots, u_r}$$

Jeśli $C_{p_1 \dots p_m} \cap G_{u_1 \dots u_r} \neq 0$, to:

$$E_{p_1 \dots p_m} = 0 \xRightarrow{(\text{kar } 6)} H_{u_1 \dots u_r} = 0 \Rightarrow E_{p_1 \dots p_m} = H_{u_1 \dots u_r}$$

$$E_{p_1 \dots p_m} \neq 0 \xRightarrow{(\text{kar } 6)} (C_{p_1 \dots p_m} \cap G_{u_1 \dots u_r}) \times E_{p_1 \dots p_m} \neq 0 \xRightarrow{(\text{kar } 7)}$$

$$\xRightarrow{(\text{kar } 9)} E_{p_1 \dots p_m} = H_{u_1 \dots u_r}$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że

$$(xvii) \quad C_{p_1 \dots p_m} \cap G_{u_1 \dots u_r} \neq 0 \Rightarrow E_{p_1 \dots p_m} = H_{u_1 \dots u_r}$$

a stąd, że

$$(xviii) \quad \bigwedge_{p_1, \dots, p_m} \bigwedge_{u_1, \dots, u_r} \lambda_1(C_{p_1 \dots p_m} \cap G_{u_1 \dots u_r}) \cdot \lambda_2(E_{p_1 \dots p_m}) = \\ = \lambda_1(C_{p_1 \dots p_m} \cap G_{u_1 \dots u_r}) \cdot \lambda_2(H_{u_1 \dots u_r})$$

Opierając się na wyprowadzonych zależnościach mamy wychodząc ze wzoru (iii)

$$\lambda(A) = \sum_{j=1}^m \lambda_1(A_{1j}) \cdot \lambda_2(A_{2j}) \quad (\overline{vi})$$

$$(\overline{vi}) \quad \sum_{p_2=1}^2 \dots \sum_{p_m=1}^2 \lambda_1(C_{1p_2 \dots p_m}) \cdot \lambda_2(A_{21}) +$$

$$+ \sum_{p_1=1}^2 \sum_{p_3=1}^2 \dots \sum_{p_m=1}^2 \lambda_1(C_{p_1 1 p_3 \dots p_m}) \cdot \lambda_2(A_{22}) + \dots$$

$$\dots + \sum_{p_1=1}^2 \dots \sum_{p_{m-1}=1}^2 \lambda_1(C_{p_1 \dots p_{m-1} 1}) \cdot \lambda_2(A_{2m}) \quad (\overline{viii})$$

$$(\overline{viii}) \quad \sum_{p_1=1}^2 \dots \sum_{p_m=1}^2 \lambda_1(C_{p_1 \dots p_m}) \cdot \lambda_2(E_{p_1 \dots p_m}) \quad (\overline{xiv})$$

$$\begin{aligned}
& \overline{(xiv)} \sum_{p_1=1}^2 \dots \sum_{p_m=1}^2 \lambda_1 (C_{p_1 \dots p_m} \cap (\sum_{u_1=1}^2 \dots \sum_{u_r=1}^2 G_{u_1 \dots u_r})). \\
& \cdot \lambda_2 (E_{p_1 \dots p_m}) = \sum_{p_1=1}^2 \dots \sum_{p_m=1}^2 \sum_{u_1=1}^2 \dots \sum_{u_r=1}^2 \lambda_1 (C_{p_1 \dots p_m} \cap G_{u_1 \dots u_r}) \cdot \\
& \cdot \lambda_2 (E_{p_1 \dots p_m}) \overline{(xviii)} \sum_{p_1=1}^2 \dots \sum_{p_m=1}^2 \sum_{u_1=1}^2 \dots \sum_{u_r=1}^2 \lambda_1 (C_{p_1 \dots p_m} \cap \\
& \cap G_{u_1 \dots u_r}) \cdot \lambda_2 (H_{u_1 \dots u_r}) = \sum_{u_r=1}^2 \dots \sum_{u_1=1}^2 \lambda_1 ((\sum_{p_1=1}^2 \dots \sum_{p_m=1}^2 C_{p_1 \dots p_m}) \cap \\
& \cap G_{u_1 \dots u_r}) \cdot \lambda_2 (H_{u_1 \dots u_r}) \overline{(xiv)} \sum_{u_1=1}^2 \dots \sum_{u_r=1}^2 \lambda_1 (G_{u_1 \dots u_r}) \cdot \\
& \cdot \lambda_2 (H_{u_1 \dots u_r}) = \sum_{u_2=1}^2 \dots \sum_{u_r=1}^2 \lambda_1 (G_{u_1 \dots u_r}) \cdot \lambda_2 (B_{21}) + \\
& + \sum_{u_1=1}^2 \sum_{u_3=1}^2 \dots \sum_{u_r=1}^2 \lambda_1 (G_{u_1 \dots u_r}) \cdot \lambda_2 (B_{22}) + \dots \\
& \dots + \sum_{u_1=1}^2 \dots \sum_{u_{r-1}=1}^2 \lambda_1 (G_{u_1 \dots u_r}) \cdot \lambda_2 (B_{2r}) = \\
& = \sum_{i=1}^r \lambda_1 (\sum_{u_1=1}^2 \dots \sum_{u_{i-1}=1}^2 \sum_{u_{i+1}=1}^2 \dots \sum_{u_r=1}^2 G_{u_1 \dots u_{i-1} 1 u_{i+1} \dots u_r}) \cdot \\
& \cdot \lambda_2 (B_{2i}) \overline{(xi)} \sum_{i=1}^r \lambda_1 (B_{1i}) \cdot \lambda_2 (B_{2i})
\end{aligned}$$

zgodnie z rozkładem (ix). Wykazaliśmy w ten sposób, że liczba (iii) nie zależy od sposobu przedstawienia zbioru A w postaci (ii). Wzór (iii) określa zatem nieujemną funkcję zbioru λ na ciele produktowym $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2$ i wzór ten zapewnia, że funkcja λ jest addytywna. Tym samym dowód twierdzenia w przypadku $n = 2$ został zakończony.

W przypadku ogólnym ciało produktowe $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$ przedstawiamy w postaci $(\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_{n-1}) * \mathcal{K}_n$ i stosujemy przypadek już udowodniony. Istnieje zatem dokładnie jedna nieujemna addytywna funkcja zbioru λ określona na ciele produktowym $(\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_{n-1}) * \mathcal{K}_n$ w przestrzeni $(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$ czyli $X_1 \times \dots \times X_n$ i taka, że

$$\text{(xix)} \quad \bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_{n-1} \\ A_n \in \mathcal{K}_n}} \lambda(A \times A_n) = \lambda^*(A) \cdot \lambda_n(A_n)$$

gdzie — zgodnie z założeniem kroku indukcyjnego — λ^* jest jedyną nieujemną addytywną funkcją zbioru określoną na ciele produktowym $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_{n-1}$ i taką, że

$$(xx) \quad \lambda^*(A_1 \times \dots \times A_{n-1}) = \lambda_1(A_1) \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}(A_{n-1})$$

dla

$$A_1 \in \mathcal{K}_1 \wedge \dots \wedge A_{n-1} \in \mathcal{K}_{n-1}$$

Ze wzorów (xix) i (xx) wynika, że λ jest nieujemną addytywną funkcją zbioru określoną na ciele produktowym $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$ w przestrzeni $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ i spełniającą warunek (*). To, że jest to jedyna funkcja o tych własnościach, wynika z jednoznaczności warunku (*) oraz własności (cp4) ciał produktowych.

Dowód twierdzenia (A) został w ten sposób zakończony.

Funkcję produktową λ będziemy również pisać w postaci

$$\lambda = \lambda_1 * \dots * \lambda_n$$

Twierdzenie (B)

$$(\lambda_1 * \dots * \lambda_m) * (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n) = \lambda_1 * \dots * \lambda_n$$

D] Funkcja produktowa $\lambda_1 * \dots * \lambda_m$ jest jedyną nieujemną addytywną funkcją zbioru określoną na ciele produktowym $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m$ w przestrzeni $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_m$ i taką, że

$$\bigwedge_{A_1 \in \mathcal{K}_1 \wedge \dots \wedge A_m \in \mathcal{K}_m} (\lambda_1 * \dots * \lambda_m)(A_1 \times \dots \times A_m) = \lambda_1(A_1) \cdot \dots \cdot \lambda_m(A_m).$$

Analogicznie, funkcja produktowa $\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n$ jest jedyną nieujemną addytywną funkcją zbioru określoną na ciele produktowym $\mathcal{K}_{m+1} * \dots * \mathcal{K}_n$ w przestrzeni $\mathcal{X}_{m+1} \times \dots \times \mathcal{X}_n$ i taką, że

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{A_{m+1} \in \mathcal{K}_{m+1} \wedge \dots \wedge A_n \in \mathcal{K}_n} (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)(A_{m+1} \times \dots \times A_n) = \\ & = \lambda_{m+1}(A_{m+1}) \cdot \dots \cdot \lambda_n(A_n) \end{aligned}$$

Funkcja produktowa $(\lambda_1 * \dots * \lambda_m) * (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)$ jest jedyną nieujemną funkcją zbioru określoną na ciele produktowym $(\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m) * (\mathcal{K}_{m+1} * \dots * \mathcal{K}_n)$, a więc na mocy własności (cp2) na ciele produktowym $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$ i taką, że

$$\bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m \\ B \in \mathcal{K}_{m+1} * \dots * \mathcal{K}_n}} [(\lambda_1 * \dots * \lambda_m) * (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)] (A \times B) =$$

$$= (\lambda_1 * \dots * \lambda_m)(A) \cdot (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)(B).$$

W szczególności funkcja produktowa $(\lambda_1 * \dots * \lambda_m) * (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)$ jest nieujemną addytywną funkcją zbioru określoną na ciele produktowym $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$ i taką, że

$$\bigwedge_{A_1 \in \mathcal{K}_1 \wedge \dots \wedge A_n \in \mathcal{K}_n} [(\lambda_1 * \dots * \lambda_m) * (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)] (A_1 \times \dots \times A_n) =$$

$$= [(\lambda_1 * \dots * \lambda_m) * (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)] [(A_1 \times \dots \times A_m) \times (A_{m+1} \times \dots \times A_n)] =$$

$$= (\lambda_1 * \dots * \lambda_m)(A_1 \times \dots \times A_m) \cdot (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)(A_{m+1} \times \dots \times A_n) =$$

$$= \lambda_1(A_1) \cdot \dots \cdot \lambda_m(A_m) \cdot \lambda_{m+1}(A_{m+1}) \cdot \dots \cdot \lambda_n(A_n) = \lambda_1(A_1) \cdot \dots \cdot \lambda_n(A_n)$$

Ale na mocy twierdzenia (A) istnieje tylko jedna funkcja o takich własnościach, skąd wynika teza twierdzenia (B).

§ 178. Miary produktowe

Miara produktową μ miar μ_1, \dots, μ_n , określonych odpowiednio na σ -ciałach $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ w przestrzeniach odpowiednio $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, będziemy nazywać przeliczalnie addytywny produkt miar μ_1, \dots, μ_n taki, że

$$(*) \quad \bigwedge_{A_1 \in \mathcal{S}_1 \wedge \dots \wedge A_n \in \mathcal{S}_n} \mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(A_n)$$

Twierdzenie (A)

Dla danych miar μ_1, \dots, μ_n określonych odpowiednio na σ -ciałach $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ w przestrzeniach odpowiednio $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ istnieje dokładnie jedna miara produktowa μ określona na σ -ciele produktowym $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$ w przestrzeni $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ i spełniająca warunek (*).

D) Dowód podzielimy na 7 części L1, ..., L7, z których ostatnia stanowi właściwy dowód twierdzenia przez indukcję, przedostatnia - dowód w przypadku $n = 2$, a pozostałe mają charakter oddzielnych lematów.