

$$(330) \quad D\xi \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mu_2}, \quad \text{skąd} \quad \mu_2 = D^2 \xi$$

Na mocy (328) i (320) mamy

$$(331) \quad D^2(a\xi + b) = a^2 D^2 \xi, \quad \text{czyli} \quad D(a\xi + b) = |a| D\xi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Kwantylami zmiennej losowej nazywamy kwantyle jej rozkładu prawdopodobieństwa.

Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej ξ nazywamy

$$(332) \quad \varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} E e^{it\xi} = \int_{\mathbb{X}} e^{it\xi} dP$$

Twierdzenie (D)

Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej ξ jest funkcją charakterystyczną rozkładu prawdopodobieństwa P_ξ tej zmiennej losowej, czyli

$$(333) \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dP_\xi(x)$$

D Analogiczny do dowodu twierdzenia (C).

Z twierdzenia (D) wynika, że dla funkcji charakterystycznych zmiennych losowych zachowują prawdziwość twierdzenia (A) i (B) z § 237 oraz własności (fchar1)-(fchar5).

§ 262. Zbieżność ciągu zmiennych losowych według dystrybuant

Zbieżność ciągu zmiennych losowych według dystrybuant określamy jak w § 219, tzn.

$$(334) \quad \xi_n \xrightarrow{\text{dys}} \xi \stackrel{\text{def}}{\iff} F_n \xrightarrow{\text{SI}} F$$

gdzie F, F_1, F_2, \dots są odpowiednio dystrybuantami zmiennych losowych ξ, ξ_1, ξ_2, \dots . Wobec tego zbieżność zmiennych losowych według dystrybuant ma następujące własności.

(§73) Zmienne losowe ξ i η mają wspólną dystrybuantę \wedge

$$\wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \text{zmienne } \xi_n \text{ i } \eta_n \text{ mają wspólną dystrybuantę} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{\text{dys}} \xi \Leftrightarrow \eta_n \xrightarrow{\text{dys}} \eta \right) \quad (\text{na mocy własności (dys1)})$$

$$(\xi 74) \quad \xi_n \xrightarrow{\text{dys}} \xi \Rightarrow \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathcal{N}} \xi_{m_n} \xrightarrow{\text{dys}} \xi$$

(na mocy własności (dys2))

$$(\xi 75) \quad \xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{dys}} \xi \quad (\text{na mocy własności (dys3)})$$

$$(\xi 76) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{dys}} \xi \quad (\text{na mocy własności (dys4) i (dys5)})$$

$$(\xi 77) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{dys}} \xi \quad (\text{na mocy własności (dys6)})$$

$$(\xi 78) \quad \xi_n \rightarrow \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{dys}} \xi \quad (\text{na mocy własności (dys7)})$$

Twierdzenie (A)

$$\xi_n \xrightarrow{\text{dys}} \xi \Leftrightarrow \varphi_n \rightarrow \varphi$$

gdzie $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ są odpowiednio funkcjami charakterystycznymi zmiennych losowych ξ, ξ_1, ξ_2, \dots

D] Dowód przeprowadzimy w 5 częściach L1, ..., L5, z których pierwsze trzy stanowią oddzielne lematy, czwarta dowód implikacji \Rightarrow , a piąta dowód implikacji \Leftarrow . We wszystkich częściach przyjmujemy, że F_1, F_2, \dots jest ciągiem dystrybuant zmiennych losowych ξ_1, ξ_2, \dots

$$\text{L1)} \quad \bigvee_{\substack{D \\ \overline{D} = \mathcal{R}}} \bigvee_G \bigwedge_{x \in D} F_n(x) \rightarrow G(x) \Rightarrow \text{ciąg } F_1, F_2, \dots \text{ jest zbieżny}$$

podstawowo do funkcji G

D] Niech $x_1, x_2 \in D$ i $x_1 < x < x_2$. Wtedy

$$\bigwedge_{n \in \mathcal{N}} F_n(x_1) \leq F_n(x) \leq F_n(x_2)$$

skąd

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_1) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x_2)$$

Ale z założenia jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_1) = G(x_1) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_2) = G(x_2)$$

więc

$$G(x_1) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq G(x_2)$$

Jeśli x jest punktem ciągłości funkcji G , to

$$\lim_{x_1 \nearrow x} G(x_1) = \lim_{x_2 \searrow x} G(x_2) = G(x)$$

skąd wynika, że

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$$

Założenie, że domknięciem zbioru D jest cała prosta, było tu potrzebne, aby dla każdego punktu $x \in \mathfrak{R}$ istniał ciąg punktów ze zbioru D zbieżny do punktu x .

L2] Pierwsze twierdzenie Helly'ego

$\bigvee_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathfrak{N}} \bigvee_G$ ciąg F_{m_1}, F_{m_2}, \dots jest zbieżny podstawowo do funkcji G .

D] Niech w_1, w_2, \dots będzie zgodnie z § 15 ciągiem wszystkich liczb wymiernych. Ponieważ

$$\bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} 0 \leq F_n(w_k) \leq 1$$

więc co najmniej jeden z przedziałów $\langle 0; \frac{1}{2} \rangle$, $\langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $F_n(w_1)$. Oznaczamy ten przedział symbolem \mathcal{P}_1 . Niech F_{11} będzie pierwszym z kolei wyrazem ciągu F_1, F_2, \dots , dla którego $F_{11}(w_1) \in \mathcal{P}_1$. Dzielimy teraz przedział \mathcal{P}_1 na połowy i oznaczamy przez \mathcal{P}_2 tę część, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $F_n(w_1)$. Niech F_{12} będzie pierwszym z kolei po F_{11} wyrazem ciągu F_1, F_2, \dots , dla którego $F_{12}(w_1) \in \mathcal{P}_2$. Postępując dalej analogicznie, otrzymujemy podciąg

$$(i) \quad F_{11}, F_{12}, \dots$$

taki, że ciąg $F_{11}(w_1), F_{12}(w_1), \dots$ jest zbieżny na mocy własności Cauchy'ego dla ciągów liczbowych. Niech $G(w_1)$ oznacza granicę tego ciągu, tzn.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{1k}(w_1) = G(w_1)$$

Ale przez analogiczne postępowanie z ciągiem (i) można wybrać z niego podciąg

$$F_{21}, F_{22}, \dots$$

taki, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{2k}(w_2) = G(w_2)$$

Kontynuując takie postępowanie otrzymujemy ciąg podciągów

$$(ii) \quad F_{p1}, F_{p2}, \dots, \quad p \in \mathcal{N}$$

taki, że

$$(iii) \quad \bigwedge_{p \in \mathcal{N}} \lim_{k \rightarrow \infty} F_{pk}(w_p) = G(w_p)$$

Rozpatrzmy teraz podciąg

$$F_{m_1} = F_{11}, \quad F_{m_2} = F_{22}, \dots$$

Jest zatem

$$(iv) \quad \bigwedge_{p \in \mathcal{N}} \lim_{k \rightarrow \infty} F_{m_k}(w_p) = G(w_p)$$

ponieważ dla $k \geq p$ wszystkie wyrazy ciągu F_{m_1}, F_{m_2}, \dots są wyrazami ciągu (ii), czyli $F_{m_p}, F_{m_{p+1}}, \dots$ jest podciągiem ciągu (ii) i na mocy (iii) ma miejsce (iv).

Wzór (iii), a więc i (iv) określa na zbiorze wszystkich liczb wymiernych w_1, w_2, \dots funkcję G . Jest ona niemalejąca i ograniczona, ponieważ funkcje F_1, F_2, \dots są wszystkie niemalejące i ograniczone. Wobec tego

$$(v) \quad \bigwedge_{x \in \mathcal{R}} \bigwedge_{\substack{x_1 < x_2 < \dots \in \mathcal{R} \\ x_k \nearrow x}} G(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} G(x_k)$$

Wartość $G(x)$ nie zależy od wyboru ciągu liczb wymiernych x_1, x_2, \dots . Gdyby bowiem dla innego takiego ciągu $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ było $\bar{G}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} G(\bar{x}_k)$ i, na przykład $\bar{G}(x) < G(x)$, to

$$\bigvee_{n_0 \in \mathcal{N}} G(x_{n_0}) > \bar{G}(x_{n_0})$$

co przeczyłoby faktowi, że na mocy (iii) funkcje G i \bar{G} na zbiorze liczb wymiernych są równe. Analogicznie wykazujemy, że nie może być $\bar{G}(x) > G(x)$.

Wzór (v) okresia zatem funkcję G na całej prostej. Ponieważ domknięciem zbioru wszystkich liczb wymiernych jest cała prosta, więc na mocy (iv) i udowodnionego już lematu L1 otrzymujemy tezę lematu L2.

L3] Drugie twierdzenie Helly'ego

- Z] 1^o Ciąg F_1, F_2, \dots jest słabo zbieżny do dystrybuanty F .
 2^o h jest funkcją, rzeczywistą lub zespoloną, ciągłą i ograniczoną na całej prostej \mathbb{R}

T]
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF(x)$$

D] Wykażemy najpierw, że jeśli a i b są punktami ciągłości dystrybuanty F , to

(vi)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h(x) dF_n(x) = \int_a^b h(x) dF(x)$$

Niech

(vii)
$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| < M, \quad M \in \mathbb{R}$$

Mamy na mocy ciągłości funkcji h i słabej zbieżności ciągu F_1, F_2, \dots do funkcji F

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \\ x_0, x_1, \dots, x_N \text{ są} \\ \text{punktami ciągłości} \\ \text{dystrybuanty } F}} \bigwedge_{k \in \{1, \dots, N\}} \bigwedge_{x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle} |h(x) - h(x_k)| < \varepsilon \wedge$$

$$\bigwedge_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigvee_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} |F(x_k) - F_n(x_k)| < \frac{\varepsilon}{MN}$$

Otrzymujemy stąd

$$\left| \int_a^b h(x) dF(x) - \int_a^b h(x) dF_n(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(x) dF(x) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left| \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(x) dF_n(x) \right| \leq \sum_{k=1}^N \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(x) dF(x) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(x) dF_n(x) \right| \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^N \left(\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(x) dF(x) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(x_k) dF(x) \right| + \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(x_k) dF_n(x) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(x) dF_n(x) \right| + \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(x_k) dF(x) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(x_k) dF_n(x) \right| \right) \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^N \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} |h(x) - h(x_k)| dF(x) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} |h(x) - h(x_k)| dF_n(x) + \right. \\
& \left. + |h(x_k)| \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} dF(x) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} dF_n(x) \right| \right) \leq_{(166)} \\
& \leq \sum_{k=1}^N \left(\varepsilon \int_{x_{k-1}}^{x_k} dF(x) + \varepsilon \int_{x_{k-1}}^{x_k} dF_n(x) + M |F(x_k) - F(x_{k-1}) - F_n(x_k) + \right. \\
& \left. + F_n(x_{k-1})| \right) \leq \sum_{k=1}^N \left(\varepsilon F(x_k) - \varepsilon F(x_{k-1}) + \varepsilon F_n(x_k) - \varepsilon F_n(x_{k-1}) + \right. \\
& \left. + M |F(x_k) - F_n(x_k)| + M |F(x_{k-1}) - F_n(x_{k-1})| \right) \leq \varepsilon F(b) - \varepsilon F(a) + \\
& + \varepsilon F_n(b) - \varepsilon F_n(a) + MN \cdot \frac{\varepsilon}{MN} + MN \cdot \frac{\varepsilon}{MN} \leq_{\substack{(146) \\ (149)}} 4\varepsilon
\end{aligned}$$

skąd wynika równość (vi)

Mamy teraz

$$\text{(viii)} \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF_n(x) \right| \leq \left| \int_{-\infty}^a h(x) dF(x) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left| \int_{-\infty}^a h(x) dF_n(x) \right| + \left| \int_a^b h(x) dF(x) - \int_a^b h(x) dF_n(x) \right| + \\
& + \left| \int_b^{\infty} h(x) dF(x) - \int_b^{\infty} h(x) dF_n(x) \right| \leq_{\substack{(c18) \\ (vii)}} M \left(\int_{-\infty}^a dF(x) + \int_{-\infty}^a dF_n(x) \right) + \\
& + \left| \int_a^b h(x) dF(x) - \int_a^b h(x) dF_n(x) \right| + M \left(\int_b^{\infty} dF(x) + \int_b^{\infty} dF_n(x) \right) \stackrel{(166)}{=} \\
& \stackrel{(167)}{=} M(F(a) + F_n(a)) + M[1 - F(b) + 1 - F_n(b)] + \\
& + \left| \int_a^b h(x) dF(x) - \int_a^b h(x) dF_n(x) \right|
\end{aligned}$$

Niech a i b będą punktami ciągłości funkcji F . Na mocy (148) i (149) punkt a można tak dobrać, by

$$(ix) \quad F(a) < \frac{\varepsilon}{7M}$$

a punkt b tak, by

$$(x) \quad 1 - F(b) < \frac{\varepsilon}{7M}$$

Dalej na mocy słabej zbieżności ciągu F_1, F_2, \dots do funkcji F

$$\bigvee_{n_1 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_1}} |F_n(a) - F(a)| < \frac{\varepsilon}{7M}$$

$$\bigvee_{n_2 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_2}} |F_n(b) - F(b)| < \frac{\varepsilon}{7M}$$

skąd na mocy (ix) i (x)

$$(xi) \quad \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > \max(n_1, n_2)}} F_n(a) < \frac{2\varepsilon}{7M} \wedge 1 - F_n(b) < \frac{2\varepsilon}{7M}$$

Wreszcie dla ustalonych już punktów a i b na mocy (vi)

$$(xii) \quad \bigvee_{n_3 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_3}} \left| \int_a^b h(x) dF(x) - \int_a^b h(x) dF_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{7}$$

W ten sposób z nierówności (viii) otrzymujemy na mocy (ix), (x), (xi) i (xii)

$$\begin{aligned} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > \max(n_1, n_2, n_3)}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF_n(x) \right| &< M \left(\frac{\varepsilon}{7M} + \frac{2\varepsilon}{7M} \right) + \\ &+ M \left(\frac{\varepsilon}{7M} + \frac{2\varepsilon}{7M} \right) + \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon \end{aligned}$$

Wynika stąd teza lematu L3.

$$\underline{L4} \quad \xi \xrightarrow{\text{dys}} \xi \Rightarrow \varphi_n \rightarrow \varphi$$

D Z definicji zbieżności według dystrybuant wynika, że

$$F_n(x) \rightarrow F(x) \quad \text{w punktach ciągłości funkcji } F$$

gdzie F jest dystrybuantą zmiennej losowej ξ . Mamy ponadto na mocy twierdzenia (D)

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) \wedge \bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} \varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_n(x)$$

Zatem teza części L4 wynika wprost z lematu L3.

$$\underline{L5} \quad \varphi_n \rightarrow \varphi \Rightarrow \xi \xrightarrow{\text{dys}} \xi$$

D Teza części L5 jest na mocy (334) równoważna implikacji.

$$(xlii) \quad \varphi_n \rightarrow \varphi \Rightarrow F_n \xrightarrow{\text{st}} F$$

Na mocy lematu L2 z ciągu F_1, F_2, \dots można wybrać podciąg F_{m_1}, F_{m_2}, \dots zbieżny podstawowo do pewnej funkcji F . Wykażemy, że funkcja F jest dystrybuantą. Na mocy (v) funkcja jest określona i lewostronnie ciągła na całej prostej \mathfrak{R} . Jest też niemalejąca, ponieważ funkcje F_{m_1}, F_{m_2}, \dots są niemalejące. Tym samym funkcja F będzie dystrybuantą zgodnie z definicją z § 103, jeśli wykażemy jeszcze, że

$$(xiv) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

W tym celu wystarczy wykazać, że nie może zachodzić równość

$$(xv) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \delta < 1$$

gdyż z faktu, że funkcje F_1, F_2, \dots są dystrybuantami, wynika,

$$\text{że } \bigwedge_{x \in \mathfrak{R}} 0 \leq F(x) \leq 1.$$

Funkcja φ jest ciągła i wobec tego istnieje całka Riemanna tej funkcji dla dowolnego przedziału skończonego na prostej \mathfrak{R} i tym samym funkcja φ jest całkowna na dowolnym przedziale skończonym. Ponieważ $\varphi(0) = 1$, więc z ciągłości funkcji φ wynikałoby, że

$$(xvi) \quad \bigvee_{\substack{\alpha, \varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \alpha, \varepsilon > 0}} \frac{1}{2\alpha} \left| \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t) dt \right| > 1 - \frac{\varepsilon}{2} > \delta + \frac{\varepsilon}{2}$$

Gdyby była spełniona równość (xv), to

$$(xvii) \quad \bigvee_{\substack{u \in \mathfrak{R} \\ u > 0}} F(u) - F(-u) < \delta + \frac{\varepsilon}{8} \wedge F \text{ jest ciągła w punkcie } u \text{ i } -u$$

Ponadto

$$\bigwedge_{\substack{u \in \mathfrak{R} \\ u > 0 \\ F \text{ jest ciągła} \\ \text{w punkcie } u \text{ i } -u}} \bigvee_{k_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathfrak{N} \\ k > k_0}} |F(u) - F_{m_k}(u)| < \frac{\varepsilon}{16} \wedge \\ \wedge |F(-u) - F_{m_k}(-u)| < \frac{\varepsilon}{16}$$

skąd na mocy (xvii)

$$(xviii) \bigvee_{\substack{u \in \mathfrak{N} \\ u > 0}} \bigvee_{k_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathfrak{N} \\ k > k_0}} \delta_k \stackrel{\text{def}}{=} F_{m_k}(u) - F_{m_k}(-u) < \delta + \frac{\varepsilon}{4}$$

Ale

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_{m_k}(t) dt = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{m_k}(x) dt \stackrel{(c61)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{itx} dt dF_{m_k}(x)$$

Ponieważ

$$\left| \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{itx} dt \right| = \left| \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{ix} \right| = \left| \frac{2}{x} \sin \alpha x \right| \leq \frac{2}{|x|}$$

więc

$$|x| \geq u > 0 \Rightarrow \left| \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{itx} dt \right| \leq \frac{2}{u}$$

Z drugiej strony

$$\left| \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{itx} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| dt = \int_{-\alpha}^{+\alpha} dt = 2\alpha$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi_{m_k}(t) dt \right| &\leq \left| \int_{-\infty}^{-u} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{itx} dt dF_{m_k}(x) \right| + \left| \int_{-u}^{+u} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{itx} dt dF_{m_k}(x) \right| + \\ &+ \left| \int_u^{\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{itx} dt dF_{m_k}(x) \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{u} \int_{-\infty}^{-u} dF_{m_k}(x) + 2\alpha \int_{-u}^{+u} dF_{m_k}(x) + \frac{2}{u} \int_u^{\infty} dF_{m_k}(x) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{u} \int_{-\infty}^{+\infty} dF_{m_k}(x) + 2\alpha (F_{m_k}(u) - F_{m_k}(-u)) < \frac{2}{u} + 2\alpha\delta_k$$

a stąd

$$\left| \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi_{m_k}(t) dt \right| < \delta_k + \frac{1}{\alpha u}$$

Ale na mocy (xvii) można obrać liczbę u tak dużą, by $\alpha u > \frac{4}{\varepsilon}$, czyli

$$\frac{1}{\alpha u} < \frac{\varepsilon}{4}$$

skąd na mocy (xviii)

$$\bigwedge_{\substack{k \in \mathfrak{N} \\ k \in K_0}} \left| \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi_{m_k}(t) dt \right| < \delta + \frac{\varepsilon}{2}$$

i z uwagi na to, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{m_k}(t) = \varphi(t), \quad \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} \left| \varphi_{m_k}(t) \right| \leq 1 \quad (\text{fchar1})$$

na mocy własności (c47) całek Lebesgue'a

$$\left| \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi(t) dt \right| \leq \delta + \frac{\varepsilon}{2}$$

co jest sprzeczne z (xvi). Wykazaliśmy tym samym, że funkcja F jest dystrybuantą. Zatem

$$(xix) \quad F_{m_k} \xrightarrow{st} F$$

Niech ξ będzie jakąkolwiek zmienną losową o dystrybuancie F . Wtedy

$$\xi \xrightarrow{dys} \xi$$

i na mocy udowodnionej już części L4

$$\varphi_{m_k} \rightarrow \varphi$$

gdzie φ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej ξ . W § 237 wykazaliśmy wzajemną odpowiedniość między funkcjami charakterystycznymi i dystrybuantami. Zatem F jest jedyną możliwą dystrybuantą odpowiadającą funkcji charakterystycznej φ . W tej sytuacji wystarczy jeszcze wykazać, że zachodzi nie tylko (xix), ale i (xiii).

Gdyby tak nie było, tzn. ciąg F_1, F_2, \dots nie byłby zbieżny podstawowo do dystrybuanty F , to istniałby punkt $x_0 \in \mathfrak{R}$, w którym funkcja F byłaby ciągła i ciąg $F_1(x_0), F_2(x_0), \dots$ nie byłby zbieżny do $F(x_0)$. Rozumując analogicznie jak w dowodzie lematu L2, dochodzimy do wniosku, że istnieje podciąg

$$(xx) \quad F_{n_1}, F_{n_2}, \dots$$

taki, że ciąg

$$F_{n_1}(x_0), F_{n_2}(x_0), \dots$$

jest zbieżny, tzn.

$$(xxi) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(x_0) = G(x_0) \neq F(x_0)$$

Rozumując dalej analogicznie jak przy wyprowadzaniu wzoru (xix), dochodzimy do wniosku, że istniałby podciąg

$$F_{n_{k_1}}, F_{n_{k_2}}, \dots$$

ciągu (xx), taki, że

$$F_{n_{k_i}} \xrightarrow{st} F$$

gdzie F jest dystrybuantą odpowiadającą funkcji charakterystycznej φ , co jest sprzeczne z (xxi). Tym samym część L5, a z nią i całe twierdzenie (A) zostały udowodnione.

Twierdzenie (B)

Jeśli h jest funkcją rzeczywistą, ciągłą i skończoną na całej prostej \mathfrak{R} , to

$$\xi_n \xrightarrow{\text{dys}} \xi \implies h(\xi_n) \xrightarrow{\text{dys}} h(\xi)$$

D] Wynika z twierdzenia (A), ponieważ na mocy lematu L3 z dowodu tego twierdzenia i twierdzenia (B) z § 261

$$E e^{ith(\xi_n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ith(x)} dF_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ith(x)} dF(x) = E e^{ith(\xi)}$$

§ 263. Nierówność Czebyszewa

Twierdzenie

Jeśli zmienna losowa ξ ma wariancję $D^2 \xi$, to

$$(335) \quad \bigwedge_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{R}}} P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2 \xi}{\varepsilon^2}$$

D] Niech

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{e : |\xi(e) - E\xi| \geq \varepsilon\}$$

Wtedy

$$D^2 \xi = \int_X [\xi(e) - E\xi]^2 dP(e) \geq \int_A [\xi(e) - E\xi]^2 dP(e) \geq \int_A \varepsilon^2 dP(e) = \varepsilon^2 P(A)$$

skąd

$$P(A) \leq \frac{D^2 \xi}{\varepsilon^2}$$

czyli nierówność (335), nosząca nazwę nierówność Czebyszewa.

§ 264. Zbieżność ciągów zmiennych losowych według średniej

Ciąg zmiennych losowych ξ_1, ξ_2, \dots będziemy nazywać zbieżnym według średniej do zmiennej losowej ξ i pisać

$$\xi_n \xrightarrow{\text{sr}} \xi \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \stackrel{\text{sr}}{=} \xi$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(336) \quad E |\xi_n - \xi|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Zbieżność według średniej ma następujące własności

$$(\text{śr1}) \quad \xi_n \xrightarrow{\text{śr}} \xi \wedge \xi_n \xrightarrow{\text{śr}} \eta \Rightarrow \xi \stackrel{1}{=} \eta$$

$$\underline{D} \quad E |\xi - \eta| = E |(\xi_n - \xi) - (\xi_n - \eta)| \leq E |\xi_n - \xi| + E |\xi_n - \eta|$$

Ale na mocy własności (c62) całek Lebesgue'a

$$(E |\xi_n - \xi|)^2 = \left(\int_X |\xi_n - \xi| \cdot 1 \, d\rho \right)^2 \leq \int_X |\xi_n - \xi|^2 \, d\rho \cdot \int_X 1^2 \, d\rho =$$

$$= \int_X |\xi_n - \xi|^2 \, d\rho = E |\xi_n - \xi|^2$$

wobec czego na mocy (336)

$$(1) \quad E |\xi_n - \xi| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \wedge E |\xi_n - \eta| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

i stąd

$$E |\xi - \eta| = \int_X |\xi - \eta| \, d\rho = 0$$

Na mocy własności (c13) całek Lebesgue'a otrzymujemy

$$|\xi - \eta| \stackrel{\text{pr.w}}{=} 0 \iff \xi - \eta \stackrel{1}{=} 0 \iff \xi \stackrel{1}{=} \eta$$

$$(\text{śr2}) \quad \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \xi_n \stackrel{1}{=} \eta_n \right) \wedge \xi \stackrel{1}{=} \eta \Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{\text{śr}} \xi \iff \eta_n \xrightarrow{\text{śr}} \eta \right)$$

D Z założenia wynika, że

$$|\xi_n - \xi|^2 \stackrel{1}{=} |\eta_n - \eta|^2$$

a stąd na mocy definicji zbieżności według średniej

$$\xi_n \xrightarrow{\text{śr}} \xi \iff \eta_n \xrightarrow{\text{śr}} \eta$$

$$(śr3) \quad \xi_n \xrightarrow{sr} \xi \Rightarrow \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathfrak{N}} \xi_{m_n} \xrightarrow{sr} \xi$$

D Wynika z faktu, że dla ciągu liczbowego

$$E|\xi_n - \xi|^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathfrak{N}} E|\xi_{m_n} - \xi|^2 \rightarrow 0$$

$$(śr4) \quad \xi_n \xrightarrow{sr} \xi \Rightarrow E|\xi_n - \xi| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \underline{D} \quad E|\xi_n - \xi| &= \int_X |\xi_n - \xi| dP \leq_{(c 62)} \sqrt{\int_X |\xi_n - \xi|^2 dP} \cdot \int_X dP = \\ &= \sqrt{\int_X |\xi_n - \xi|^2 dP} = \sqrt{E|\xi_n - \xi|^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$(śr5) \quad \xi_n \xrightarrow{sr} \xi \Rightarrow E(\xi_n - \xi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

D Wynika z własności (śr4), ponieważ

$$|E(\xi_n - \xi)| \leq_{(326)} E|\xi_n - \xi| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(śr6) \quad \xi_n \xrightarrow{sr} \xi \wedge \text{istnieje } E\xi \Rightarrow E\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E\xi$$

$$\underline{D} \quad E\xi_n = E((\xi_n - \xi) + \xi) = \int_X [(\xi_n - \xi) + \xi] dP \quad (=_{(c 21)})$$

$$= \int_X (\xi_n - \xi) dP + \int_X \xi dP = E(\xi_n - \xi) + E\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E\xi$$

$$(śr7) \quad \xi_n \xrightarrow{sr} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$$

D Niech

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{e : |\xi_n(e) - \xi(e)| \geq \varepsilon\}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} E|\xi_n - \xi|^2 &= \int_X |\xi_n(e) - \xi(e)|^2 dP(e) \geq \\ &\geq \int_A |\xi_n(e) - \xi(e)|^2 dP(e) \geq \int_A \varepsilon^2 dP = \varepsilon^2 P(A) \end{aligned}$$

skąd

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} P(\{e : |\xi_n(e) - \xi(e)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

czyli

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$$

(śr8) $\xi_n \xrightarrow{sr} \xi \iff$ ciąg (ξ_n) spełnia warunek Cauchy'ego według średniej \xLeftrightarrow{def}

$$\xLeftrightarrow{def} |\xi_m - \xi_n| \xrightarrow{sr} 0 \xLeftrightarrow{def} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_0}} E|\xi_m - \xi_n|^2 < \varepsilon$$

D Mamy

$$(|\xi_m - \xi| - |\xi_n - \xi|)^2 \geq 0$$

czyli

$$|\xi_m - \xi|^2 - 2|\xi_m - \xi||\xi_n - \xi| + |\xi_n - \xi|^2 \geq 0$$

skąd

$$2|\xi_m - \xi||\xi_n - \xi| \leq |\xi_m - \xi|^2 + |\xi_n - \xi|^2$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} |\xi_m - \xi_n|^2 &= |(\xi_m - \xi) - (\xi_n - \xi)|^2 \leq \\ &\leq |\xi_m - \xi|^2 + 2|\xi_m - \xi||\xi_n - \xi| + |\xi_n - \xi|^2 \leq \\ &\leq 2|\xi_m - \xi|^2 + 2|\xi_n - \xi|^2 \end{aligned}$$

Jeśli zatem $\xi_n \xrightarrow{\text{sr}} \xi$, to na mocy (336)

$$E |\xi_m - \xi_n|^2 \leq 2E |\xi_m - \xi|^2 + 2E |\xi_n - \xi|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m \rightarrow \infty} 0$$

czyli

$$(ii) \quad |\xi_m - \xi_n| \xrightarrow{\text{sr}} 0$$

Jeżeli, odwrotnie, zachodzi warunek (ii), to na mocy własności (sr7) mamy

$$|\xi_m - \xi_n| \xrightarrow{p} 0$$

co na mocy (§60) jest równoważne temu, że istnieje zmienna losowa ξ taka, iż

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi$$

Wobec tego na mocy (§64)

$$(iii) \quad \bigvee_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathfrak{N}} \xi_{m_n} \xrightarrow{1} \xi$$

Warunek (ii) można napisać w postaci

$$(iv) \quad \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{m, m_n \in \mathfrak{N} \\ m, m_n > n_0}} \int_{\mathfrak{X}} |\xi_m - \xi_{m_n}|^2 dp < \varepsilon$$

Ponieważ na mocy (iii) i własności (c46) całek Lebesgue'a

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{m > n_0} \int_{\mathfrak{X}} |\xi_m - \xi|^2 dp \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{X}} |\xi_m - \xi_{m_n}|^2 dp \leq \varepsilon$$

więc

$$E |\xi_m - \xi|^2 = \int_{\mathfrak{X}} |\xi_m - \xi|^2 dp \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

czyli

$$\xi_m \xrightarrow{\text{sr}} \xi$$

(śr9)

$$\xi_n \xrightarrow{j} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{śr}} \xi$$

$$\text{D)} \bigwedge_{\substack{\xi \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{e \in X} |\xi_n(e) - \xi(e)| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\xi \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} E |\xi_n - \xi|^2 = \int_X |\xi_n - \xi|^2 dP < \varepsilon \int_X dP = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E |\xi_n - \xi|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{śr}} \xi$$

$$(\text{śr10}) \xi_n \xrightarrow{\text{śr}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{dys}} \xi$$

D) Wynika z własności (śr7) i (ξ75)

$$(\text{śr11}) \xi_n \xrightarrow{\text{śr}} \xi \Rightarrow \bigwedge_{c \in \mathfrak{R}} c \xi_n \xrightarrow{\text{śr}} c \xi$$

D) Wynika z faktu, że na mocy (320)

$$E |c \xi_n - c \xi|^2 = c^2 E |\xi_n - \xi|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(\text{śr12}) \xi_n \xrightarrow{\text{śr}} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{\text{śr}} \eta \Rightarrow \xi_n + \eta_n \xrightarrow{\text{śr}} \xi + \eta$$

D) Wynika z faktu, że na mocy (324)

$$\begin{aligned} E |\xi_n + \eta_n - \xi - \eta|^2 &\leq E (|\xi_n - \xi| + |\eta_n - \eta|)^2 = \\ &= E |\xi_n - \xi|^2 + 2E |\xi_n - \xi| |\eta_n - \eta| + E |\eta_n - \eta|^2 \leq \\ &\leq 2E |\xi_n - \xi|^2 + 2E |\eta_n - \eta|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

gdyż z nierówności

$$E (|\xi_n - \xi| - |\eta_n - \eta|)^2 \geq 0$$

czyli

$$E |\xi_n - \xi|^2 - 2E |\xi_n - \xi| |\eta_n - \eta| + E |\eta_n - \eta|^2 \geq 0$$

wynika, że

$$2E|\xi_n - \xi| |\eta_n - \eta| \leq E|\xi_n - \xi|^2 + E|\eta_n - \eta|^2$$

$$(\text{sr13}) \quad \xi_n \xrightarrow{\text{sr}} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{\text{sr}} \eta \Rightarrow \xi_n - \eta_n \xrightarrow{\text{sr}} \xi - \eta$$

D] Wynika z własności (sr11) i (sr12).

$$(\text{sr14}) \quad \xi_n \xrightarrow{\text{sr}} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{\text{sr}} \eta \wedge \bigvee_{\substack{a \in \mathfrak{R} \\ a > 0}} \bigwedge_{e \in \mathcal{X}} \left(|\xi(e)| < a \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} |\eta_n(e)| < a \right) \vee \left(\bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} |\xi_n(e)| < a \wedge |\eta(e)| < a \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \xi_n \eta_n \xrightarrow{\text{sr}} \xi \eta$$

D] Ze względu na symetrię wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy

$$\bigvee_{\substack{a \in \mathfrak{R} \\ a > 0}} \bigwedge_{e \in \mathcal{X}} \left(|\xi(e)| < a \wedge \bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} |\eta_n(e)| < a \right)$$

Mamy wtedy rozumując analogicznie jak w dowodzie własności (sr8)

$$\begin{aligned} E|\xi_n \eta_n - \xi \eta|^2 &= E|(\xi_n - \xi) \eta_n + \xi(\eta_n - \eta)|^2 \leq \\ &\leq E(|\xi_n - \xi| |\eta_n| + |\xi| |\eta_n - \eta|)^2 < a^2 E(|\xi_n - \xi| + |\eta_n - \eta|)^2 \leq \\ &\leq 2a^2 (E|\xi_n - \xi|^2 + E|\eta_n - \eta|^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E|\xi_n \eta_n - \xi \eta|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \xi_n \eta_n \xrightarrow{\text{sr}} \xi \eta \end{aligned}$$

$$(\text{sr15}) \quad \xi_n \xrightarrow{\text{sr}} \xi \wedge \bigvee_{\substack{a \in \mathfrak{R} \\ a > 0}} \bigwedge_{e \in \mathcal{X}} \left(|\xi(e)| < a \wedge \bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} |\xi_n(e)| < a \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} \xi_n^k \xrightarrow{\text{sr}} \xi^k$$

D] Wynika z (k-1)-krotnego wykorzystania własności (sr14).

$$(\text{sr16}) \quad \xi_n \xrightarrow{\text{sr}} \xi \wedge \bigvee_{\substack{b \in \mathfrak{R} \\ b > 0}} \bigwedge_{e \in \mathcal{X}} \left(|\xi(e)| > b \wedge \bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} |\xi_n(e)| > b \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\xi_n} \xrightarrow{\text{sr}} \frac{1}{\xi}$$

$$\text{D]} \quad E \left| \frac{1}{\xi_n} - \frac{1}{\xi} \right|^2 = E \frac{|\xi_n - \xi|^2}{|\xi_n \xi|^2} < \frac{1}{b^2} E |\xi_n - \xi|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \left| \frac{1}{\xi_n} - \frac{1}{\xi} \right|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\xi_n} \xrightarrow{\text{sr}} \frac{1}{\xi}$$

$$(\text{sr17}) \quad \xi_n \xrightarrow{\text{sr}} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{\text{sr}} \eta \wedge$$

$$\wedge \bigvee_{\substack{a \in \mathfrak{R} \\ a > 0}} \bigwedge_{e \in \mathcal{X}} \left(|\xi(e)| < a \wedge |\eta(e)| > \frac{1}{a} \wedge \bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} |\eta_n(e)| > \frac{1}{a} \right) \Rightarrow \frac{\xi_n}{\eta_n} \xrightarrow{\text{sr}} \frac{\xi}{\eta}$$

D] Wynika z własności (sr14) i (sr16).

(sr18) Jeśli h jest skończoną funkcją rzeczywistą o dziedzinie $H \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na prostej \mathfrak{R} , spełniającą na zbiorze $\mathcal{Y} \subset H$ domkniętym w przestrzeni H i takim, że

$$\xi(x), \xi_1(x), \xi_2(x), \dots \in \mathcal{Y}$$

warunek Lipschitza, tzn.

$$\bigvee_{\substack{M \in \mathfrak{R} \\ M > 0}} \bigwedge_{y_1, y_2 \in \mathcal{Y}} |h(y_1) - h(y_2)| \leq M |y_1 - y_2|$$

to

$$\xi_n \xrightarrow{\text{sr}} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{\text{sr}} h(\xi)$$

D] Z warunku Lipschitza wynika, że funkcja h jest ciągła na zbiorze \mathcal{Y} . Zatem na mocy twierdzenia § 199 funkcja h jest borelowska na zbiorze \mathcal{Y} , a na mocy twierdzenia § 186

funkcje $h(\xi)$, $h(\xi_1)$, $h(\xi_2)$, ... są zmiennymi losowymi. Ponadto na mocy warunku Lipschitza

$$E|h(\xi_n) - h(\xi)|^2 \leq M^2 E|\xi_n - \xi|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{\text{sr}} h(\xi)$$

§ 265. Związki między poszczególnymi typami zbieżności ciągów zmiennych losowych

Na mocy własności (§ 30), (§ 45), (§ 61), (§ 75), (sr7) i (sr9) zależności między poszczególnymi typami zbieżności ciągów zmiennych losowych można przedstawić następującym wykresem:

