

(c77) Całkowanie przez części

Jeśli f i g są funkcjami bezwzględnie ciągłymi w przedziale $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$, a w przypadku, gdy przedział ten jest nieograniczony, funkcja fg ma wahanie skończone na tym przedziale, to

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

D] Na mocy twierdzenia (E) z § 180 funkcja fg jest bezwzględnie ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$ i na mocy własności (c73) i (c74)

$$f(b) g(b) = f(a) g(a) + \int_a^b (f(x) g(x))'$$

skąd otrzymujemy tezę, gdyż $(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$ prawie wszędzie w przedziale $\langle a; b \rangle$, a na mocy własności (c37) funkcje $f'g$ i fg' są prawie całkowalne na przedziale $\langle a; b \rangle$.

§ 229. Całki niewłaściwe Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n

Jak wynika z własności (c64) całka niewłaściwa Riemanna może być równa całce Lebesgue'a. Mogą jednak zaistnieć przypadki, gdy tak nie jest. Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy obie całki

$$\int_A f^+(x) dx \quad \text{ i } \quad \int_A f^-(x) dx, \quad A \subset \mathbb{R}^n$$

gdzie f^+ oznacza część dodatnią, a f^- część ujemną funkcji f , są nieskończone, a mimo to całka niewłaściwa Riemanna funkcji f na przedziale A istnieje.

Całkę niewłaściwą Lebesgue'a definiuje się analogicznie jak całkę niewłaściwą Riemanna:

$$(*) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\alpha \nearrow a \\ \beta \nearrow b}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

przy założeniu, że

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

jest całką właściwą Lebesgue'a, że istnieje powyższa granica i że nie istnieje całka właściwa Lebesgue'a

$$\int_a^b f(x) dx$$

Gdy ta ostatnia całka istnieje, równość (*) jest zagwarantowana na mocy własności (c43).

Twierdzenie (A)

Gdy istnieje całka niewłaściwa Riemanna funkcji f na przedziale $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}^n$, to istnieje równa jej całka właściwa lub niewłaściwa Lebesgue'a funkcji f na przedziale $\langle a; b \rangle$.

D] Na mocy własności (c63) wynika z definicji całki niewłaściwej Lebesgue'a oraz własności (c43).

§ 230. Całki Lebesgue'a funkcji zespolonych

W niniejszym wykładzie funkcjami zespolonymi będziemy nazywać funkcje o wartościach zespolonych określone w dowolnej przestrzeni X . Funkcję zespoloną f można będzie zatem pisać w postaci

$$(i) \quad f = r + iu$$

gdzie r i u są funkcjami rzeczywistymi określonymi w przestrzeni X , a $i = \sqrt{-1}$. Funkcję f będziemy nazywać skończoną wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje r, u są skończone, a ograniczoną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigvee_{\alpha \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in X} |f(x)| \leq \alpha$$

Z nierówności

$$(ii) \quad \left. \begin{array}{l} |r| \\ |u| \end{array} \right\} \leq |f| = \sqrt{r^2 + u^2} \leq |r| + |u|$$

wynika, że funkcja f jest ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje r i u są ograniczone.

Przestrzeń wartości funkcji zespolonych skończonych, czyli przestrzeń wszystkich liczb zespolonych, będziemy - zgodnie z § 6 - oznaczać symbolem \mathfrak{B} . Jeśli do tej przestrzeni dołączymy jeszcze cztery elementy $\infty + i\infty$, $-\infty + i\infty$, $\infty - i\infty$, $-\infty - i\infty$, otrzymaną w ten sposób przestrzeń będziemy oznaczać symbolem \mathfrak{B}_0 . Przestrzeń \mathfrak{B} będziemy rozpatrywać jako przestrzeń metryczną z metryką

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

gdzie $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathfrak{B}$

Na mocy (ii) punkt $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathfrak{B}_0$ jest granicą funkcji zespolonej $f = r + iu$ w punkcie $t_0 \in T$, gdzie T jest dziedziną funkcji f , wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} r(t) \wedge y_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} u(t)$$

Granica dolną funkcji $f = r + iu$ w punkcie $t_0 \in T$ będziemy nazywać liczbę zespoloną

$$\liminf_{t \rightarrow t_0} f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{t \rightarrow t_0} r(t) + i \cdot \liminf_{t \rightarrow t_0} u(t)$$

a granicą górną w punkcie t_0 liczbę zespoloną

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{t \rightarrow t_0} r(t) + i \cdot \limsup_{t \rightarrow t_0} u(t)$$

Pochodną funkcji $f = r + iu$ nazywamy funkcję $f' = r' + iu'$.

Funkcję $f = r + iu$ będziemy nazywać funkcją o wahanu skończonym, gdy funkcje r i u są o wahanu skończonym, a bezwzględnie ciągłą, gdy funkcje r i u są bezwzględnie ciągłe.

Będziemy przyjmować, że dla liczb zespolonych $z_1 = x_1 + iy_1$
i $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 < z_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2$$

$$z_1 \leq z_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$$

Wobec tego dla funkcji zespolonych f zachowują swą ważność twierdzenia (B) i (D) z § 167, z tym, że w drugim z nich zamiast \mathbb{R} należy przyjąć \mathbb{C}

Zgodnie z podanymi wyżej określeniami dla funkcji zespolonych f zachowują swą ważność twierdzenia (D) z § 179 i twierdzenia (A) - (F) z § 180.

Funkcję zespoloną (i) będziemy nazywać mierzalną na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje r i u są mierzalne na zbiorze A . Analogicznie, będziemy ją nazywać mierzalną μ na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje r i u są mierzalne μ na zbiorze A . W podobny sposób definiujemy funkcje zespolone mierzalne w sensie Lebesgue'a na zbiorze A i funkcje zespolone mierzalne w sensie Lebesgue'a.

Definicję funkcji równoważnych na zbiorze przedłużamy na funkcje zespolone, a mianowicie funkcje zespolone f_1 i f_2 będziemy nazywać równoważnymi na zbiorze A i pisać

$f_1 \stackrel{\text{pr.w.} A}{\sim} f_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} A \in S \wedge f_1, f_2 \text{ są funkcjami mierzalnymi } \mu \text{ na}$
zbiorze $A \vee \bigvee_{B \in S} (B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge f_1|_B \stackrel{B}{\sim} f_2|_B)$ gdzie S jest σ -ciałem przestrzeni X , a μ miarą w przestrzeni z miarą (X, S, μ) . Funkcje f_1 i f_2 równoważne na całej przestrzeni X będziemy nazywać po prostu równoważnymi.

Ciąg (f_n) funkcji zespolonych będziemy nazywać zbieżnym w ustalonym sensie do funkcji zespolonej f , gdzie $f = r + iu$, $f_1 = r_1 + iu_1$, $f_2 = r_2 + iu_2, \dots$, wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (r_n) jest zbieżny do funkcji rzeczywistej r , a ciąg (u_n) do funkcji rzeczywistej u w tym samym sensie. Odnosi się to do zbieżności na zbiorze, zbieżności jednostajnej na zbiorze, zbieżności prawie wszędzie, zbieżności prawie jednostajnej, zbieżności według miary i zbieżności według dystrybuant.

Całkę Lebesgue'a funkcji zespolonej (i) określamy wzorem

$$(iii) \quad \int_A f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_A r d\mu + i \int_A u d\mu$$

Funkcję zespoloną (i) będziemy nazywać całkowalną na zbiorze A , gdy obie funkcje r i u są całkowalne na zbiorze A , i prawie całkowalną na zbiorze A , gdy obie funkcje r i u są prawie całkowalne na zbiorze.

Własności całek Lebesgue'a podane w § 225, § 227 i § 228 – jak wykażemy niżej – odnoszą się również do funkcji zespolonych poza przypadkami, gdy nie ma to sensu, jak np. we własności (c60), lub gdy nie ma potrzeby wprowadzać miar zespolonych, jak np. we własności (c54). Ale, zgodnie z wprowadzoną umową, nierówność

$$f_1 < f_2$$

w przypadku funkcji zespolonych $f_1 = r_1 + iu_1$, $f_2 = r_2 + iu_2$, gdzie r_1, u_1, r_2, u_2 są funkcjami rzeczywistymi, oznacza, że

$$r_1 < r_2 \wedge u_1 < u_2$$

a nierówność

$$f_1 \leq f_2$$

analogicznie, że

$$r_1 \leq r_2 \wedge u_1 \leq u_2$$

Zgodnie z tym nierówność

$$f_1 \geq 0$$

oznacza, że

$$r_1 \geq 0 \wedge u_1 \geq 0$$

i funkcję zespoloną f_1 nazywamy wtedy nieujemną, a nierówność

$$f_1 < \infty$$

że

$$r_1 < \infty \wedge u_1 < \infty$$

Własności (c1)-(c16) przedłużają się wtedy na funkcje zespolone w sposób oczywisty, jak również własność (c17). Ale tę ostatnią możemy uogólnić dopuszczając $c = i$. Mamy bowiem dla funkcji zespolonej (i) i całki (iii)

$$\begin{aligned} \int_A i f d\mu &= \int_A i(r + iu) d\mu = \int_A (-u + ir) d\mu = \int_A (-u) d\mu + i \int_A r d\mu = \\ &= -\int_A u d\mu + i \int_A r d\mu = i \left(\int_A r d\mu + i \int_A u d\mu \right) = i \int_A f d\mu \end{aligned}$$

gdzie z istnienia całki $\int_A f d\mu$ wynika istnienie całek $\int_A r d\mu$ i $\int_A u d\mu$

Własności (c17) nie można bez dodatkowych założeń uogólnić na dowolne liczby zespolone c , ale na mocy powyższego i własności (c17) jest

$$(165) \quad \bigwedge_{c \in \mathbb{C}} \int_A i c f d\mu = i c \int_A f d\mu$$

Własności (c18)-(c21) przedłużają się na funkcje zespolone w sposób oczywisty.

Zajmiemy się teraz dowodem, że własność (c22) mają również całki funkcji zespolonych. Wykażemy najpierw, że jeżeli f jest funkcją zespoloną mierzalną na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ w przestrzeni X z σ -ciałem \mathcal{S} , to funkcja rzeczywista

$$|f| = \sqrt{r^2 + u^2}$$

gdzie $f = r + iu$ i r, u są funkcjami rzeczywistymi, jest mierzalna na tym zbiorze. Istotnie mierzalność funkcji f oznacza mierzalność funkcji r i u . Jeśli funkcje r i u są mierzalne na zbiorze A , to na mocy twierdzenia § 191 funkcje r^2 i u^2 są mierzalne na zbiorze A , a na mocy twierdzenia § 187 funkcja $r^2 + u^2$ jest mierzalna na zbiorze A , gdyż funkcje r^2 i u^2 są obie nieujemne. Wobec tego

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \{x: \sqrt{(r(x))^2 + (u(x))^2} < \alpha \wedge x \in A\} =$$

$$= \begin{cases} 0 \in S & \text{dla } \alpha \leq 0 \\ \{x: (r(x))^2 + (u(x))^2 < \alpha^2 \wedge x \in A\} \in S & \text{dla } \alpha > 0 \end{cases}$$

Wobec powyższego, istotnie, mierzalność funkcji f pociąga za sobą mierzalność funkcji $|f|$. Ponieważ $|f| \geq 0$, więc całka

$$\int_A |f| d\mu$$

zawsze istnieje. Mamy jeszcze wykazać, że gdy istnieje całka

$$\int_A f d\mu$$

to

$$(iv) \quad \left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu$$

Zacznijmy od przypadku, gdy funkcja f ma wartość stałą na zbiorze A . Niech

$$(v) \quad \bigwedge_{x \in A} f(x) = \alpha + ib, \quad \alpha, b \in \mathbb{R}$$

Wtedy na mocy własności (c17)

$$\left| \int_A f d\mu \right| = \left| \int_A \alpha d\mu + i \int_A b d\mu \right| = \left| \alpha \mu(A) + i b \mu(A) \right| =$$

$$= \mu(A) |\alpha + ib| = \mu(A) \sqrt{\alpha^2 + b^2}$$

$$(vi) \quad \int_A |f| d\mu = \int_A \sqrt{\alpha^2 + b^2} d\mu = \sqrt{\alpha^2 + b^2} \int_A d\mu =$$

$$= \mu(A) \sqrt{a^2 + b^2}$$

Zatem w przypadku (v) mamy

$$\left| \int_A f d\mu \right| = \int_A |f| d\mu$$

Przejdźmy teraz do przypadku, gdy funkcja f przybiera na zbiorze A tylko skończoną liczbę wartości, w tym sensie, że

$$A = A_1 + \dots + A_m, \quad A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$$

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, m\}} \bigwedge_{x \in A_k} f(x) = \alpha_k + i b_k, \quad \alpha_k, b_k \in \mathbb{R}$$

Posługując się tym, że dla przypadku (v) mamy równość (vi), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \int_A f d\mu \right| &= \left| \int_{A_1} f d\mu + \dots + \int_{A_m} f d\mu \right| = \\ &= \left| (\alpha_1 + i b_1) \mu(A_1) + \dots + (\alpha_m + i b_m) \mu(A_m) \right| = \\ &= \left| (\alpha_1 \mu(A_1) + \dots + \alpha_m \mu(A_m)) + i (b_1 \mu(A_1) + \dots + b_m \mu(A_m)) \right| = \\ &= \sqrt{[\alpha_1 \mu(A_1) + \dots + \alpha_m \mu(A_m)]^2 + [b_1 \mu(A_1) + \dots + b_m \mu(A_m)]^2} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \int_A |f| d\mu &= \int_{A_1} |f| d\mu + \dots + \int_{A_m} |f| d\mu = \\ &= \sqrt{\alpha_1^2 + b_1^2} \mu(A_1) + \dots + \sqrt{\alpha_m^2 + b_m^2} \mu(A_m) \end{aligned}$$

Mamy stąd

$$\left| \int_A f d\mu \right|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\alpha_i \alpha_j + b_i b_j) \mu(A_i) \mu(A_j)$$

$$\left(\int_A |f| d\mu \right)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sqrt{(\alpha_i^2 + b_i^2)(\alpha_j^2 + b_j^2)} \mu(A_i) \mu(A_j).$$

Ponieważ

$$\bigwedge_{i,j \in \{1, \dots, m\}} \sqrt{(\alpha_i^2 + b_i^2)(\alpha_j^2 + b_j^2)} \geq \alpha_i \alpha_j + b_i b_j$$

gdyż dla $\alpha_i \alpha_j + b_i b_j \leq 0$ jest to oczywiste, a dla $\alpha_i \alpha_j + b_i b_j > 0$ nierówność powyższa jest równoważna

$$\alpha_i^2 \alpha_j^2 + b_i^2 b_j^2 + \alpha_i^2 b_j^2 + \alpha_j^2 b_i^2 \geq \alpha_i^2 \alpha_j^2 + b_i^2 b_j^2 + 2 \alpha_j \alpha_j b_i b_j$$

czyli

$$(\alpha_i b_j - \alpha_j b_i)^2 \geq 0$$

więc

$$\left| \int_A f d\mu \right|^2 \leq \left(\int_A |f| d\mu \right)^2$$

skąd otrzymujemy żadaną nierówność (iv).

W przypadku ogólnym całkę

(vii)

$$\int_A f d\mu$$

otrzymuje się jako granicę ciągu całek funkcji zespolonych przyjmujących skończoną liczbę wartości na zbiorze A , a więc funkcji, dla których jest – jak widzieliśmy – spełniona nierówność (iv). Przejście do granicy nie psuje tej nierówności, wobec czego jest

ona prawdziwa we wszystkich przypadkach, gdy istnieje całka (vii).

Własność (c23) pozostaje prawdziwa, gdyż implikuje, że funkcja f jest rzeczywista, ale w sposób oczywisty można ją uogólnić na przypadek, gdy $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{B}$

Własności (c24) i (c25) wynikają w sposób oczywisty z nierówności (ii).

Własności (c26), (c27) i (c28) są prawdziwe dla funkcji zespolonych w sposób oczywisty.

Własności (c29) i (c30) wykazujemy dla funkcji zespolonych f i g z łatwością, opierając się na własnościach (c24) i (c25).

Własności (c31) i (c32) wynikają dla funkcji zespolonych f i g w sposób oczywisty. Natomiast w oparciu o nie z łatwością uogólniamy własności (c33) i (c34) na wszystkie liczby $c \in \mathcal{B}$

Własności (c35) i (c36) wynikają dla funkcji zespolonych w sposób oczywisty.

Własność (c37) otrzymujemy przeprowadzając jeszcze raz ten sam dowód przy założeniu, że funkcje f i g są zespolone.

Własność (c38) można z łatwością uogólnić na przypadek, gdy funkcja f jest rzeczywista, a funkcja g zespolona.

Własności (c39)–(c44) wynikają dla funkcji zespolonych w sposób oczywisty.

Własność (c45) dla funkcji zespolonych otrzymujemy przeprowadzając ten sam dowód, ale przy założeniu, że funkcja f jest zespolona.

Własność (c46) uogólnia się na funkcje zespolone w sposób oczywisty.

Wykorzystując nierówność (ii) z łatwością sprawdzamy, że własności (c47)–(c52) są prawdziwe również dla funkcji zespolonych.

We własności (c53) będziemy zawsze przyjmować, że funkcja g jest rzeczywista, tzn. będziemy rozpatrywać tylko przypadek miar ν rzeczywistych. W tym przypadku własność (c53) z łatwością uogólniamy na funkcje f zespolone.

W świetle powyższej uwagi własności (c54) nie uogólniamy na funkcje zespolone g , a własności (c55)–(c58) uogólniają się na funkcje zespolone f w sposób oczywisty.

Własność (c59) uogólniamy łatwo na funkcje zespolone $f(x, y) = r(x, y) + i u(x, y)$.

Własność (c60) z założenia dotyczy tylko funkcji charakterystycznych zbiorów, a więc funkcji rzeczywistych. Natomiast wła-

sności (c61) i (c62) uogólniają się na funkcje zespolone w sposób oczywisty.

Również własności (c63)-(c77) z łatwością uogólniamy na funkcje zespolone, z tym że we własnościach (c65), (c75) i (c76) ograniczamy się tylko do funkcji \mathcal{C} rzeczywistych.

Definicję całek niewłaściwych Lebesgue'a przedłużamy dla funkcji zespolonych, przyjmując, że wzór (*) w § 229 zachodzi również dla funkcji f zespolonych.