

$$(prj22) \quad f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{pr.j.A} g \wedge$$

$$\bigvee_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A \\ \mu(A-B)=0}} \bigvee_{\substack{\alpha, b \in \mathbb{R} \\ \alpha, b > 0}} \bigwedge_{x \in B} (|f(x)| < \alpha \wedge |g(x)| > b) \wedge g_1, g_2, \dots$$

różne od zera prawie wszędzie na zbiorze $A \Rightarrow \frac{f_n}{g_n} \xrightarrow{pr.j.A} \frac{f}{g}$

D] Wynika z własności (prj15) i (prj19).

$$(prj23) \quad f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{pr.j.A} g \wedge g, g_1, g_2, \dots \text{ różne od zera prawie wszędzie na zbiorze } A \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \frac{f_n}{g_n} \xrightarrow{pr.j.A} \frac{f}{g}$$

D] Wynika z własności (prj16) i (prj21).

(prj24) Z] 1° f, f_1, f_2, \dots są funkcjami mierzalnymi μ i skończonymi prawie wszędzie na zbiorze A w przestrzeni z miarą (X, \mathcal{S}, μ) .

2° h jest skończoną funkcją rzeczywistą o dziedzinie $H \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na prostej \mathbb{R} .

3° Y jest zbiorem domkniętym w przestrzeni H i takim, że $f(A), f_1(A), f_2(A), \dots \subset Y$.

4° $\mu(A) < \infty \wedge h$ jest funkcją ciągłą na zbiorze Y albo $\mu(A) = \infty \wedge h$ jest funkcją jednostajnie ciągłą na zbiorze Y .

$$T] \quad f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \Rightarrow h(f_n) \xrightarrow{pr.j.A} h(f)$$

D] Gdy $\mu(A) < \infty$, własność powyższa wynika z własności (prj11) i (prw18). Gdy natomiast $\mu(A) = \infty$, to z definicji zbieżności prawie jednostajnej i własności (jz16)

§ 214. Zbieżność według miary

Mówimy, że ciąg (f_n) jest zbieżny według miary na zbiorze A do funkcji f i piszemy

$$f_n \xrightarrow{\mu.A} f \text{ albo } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \xrightarrow{\mu.A} f$$

wtedy i tylko wtedy, gdy w danej przestrzeni z miarą (X, \mathcal{S}, μ) : $A \in \mathcal{S} \wedge f, f_1, f_2, \dots$ są funkcjami mierzalnymi μ na zbiorze A i skończonymi prawie wszędzie na zbiorze $A \wedge$

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} = 0$$

Gdy ponadto $A = X$, to mówimy po prostu, że ciąg (f_n) jest zbieżny według miary do funkcji f i piszemy

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{\mu}{=} f$$

Zbieżność według miary ma następujące własności:

$$(w\mu 1) \quad f_n \xrightarrow{\mu, A} f \wedge f_n \xrightarrow{\mu, A} g \Rightarrow f \xrightarrow{\text{pr. w. } A} g$$

$$D \quad f_n \xrightarrow{\mu, A} f \wedge f_n \xrightarrow{\mu, A} g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \wedge x \in A\} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x: |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \wedge x \in A\} = 0$$

skąd

$$\begin{aligned} & \mu\{x: |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} \leq \\ & \leq \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} \leq \\ & \leq \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \wedge x \in A\} + \\ & + \mu\{x: |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \wedge x \in A\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

czyli

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \mu\{x: |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} = 0$$

Niech

$$D_m \stackrel{\text{def}}{=} \{x: |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{m} \wedge x \in A\}$$

Mamy

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \mu(D_m) = 0$$

$$\{x: f(x) \neq g(x) \wedge x \in A\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$$

skąd

$$\mu\{x: f(x) \neq g(x) \wedge x \in A\} = 0 \iff f \xrightarrow{\text{pr.w. } A} g$$

$$(w\mu 2) \quad f_n \xrightarrow{\mu.A} f \wedge B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \implies f_n \xrightarrow{\mu.B} f$$

D] Wynika z definicji zbieżności według miary, gdyż

$$\bigcap_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A}} \bigcap_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in B\} \subset$$

$$\subset \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} \implies$$

$$\implies \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A}} \bigcap_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in B\} \leq$$

$$\leq \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} \implies$$

$$\implies \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A}} \bigcap_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in B\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(w\mu 3) \quad f_n \xrightarrow{\mu.A} f \wedge B \in \mathcal{S} \wedge B \supset A \wedge \mu(B-A) = 0 \implies f_n \xrightarrow{\mu.B} f$$

D] Wynika z definicji zbieżności według miary, gdyż

$$B = A + (B-A)$$

$$\mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in B\} =$$

$$= \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} +$$

$$+ \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in B-A\} =$$

$$= \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(w\mu 4) \quad \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} g_n \right) \wedge f \xrightarrow{\text{pr.w. } A} g \implies$$

$$\implies \left(f_n \xrightarrow{\mu.A} f \iff g_n \xrightarrow{\mu.A} g \right)$$

(Własność ta oznacza, że zbieżność według miary jest w istocie określona w zbiorze klas funkcji równoważnych).

D] Na mocy twierdzenia § 208 i własności (wμ2)

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} g_n \right) \wedge f \xrightarrow{\text{pr.w. } A} g \implies$$

$$\implies \bigvee_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A \\ \mu(A-B)=0}} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n \xrightarrow{B} g_n \right) \wedge f \xrightarrow{B} g \implies$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \left(f_n \xrightarrow{\mu \cdot B} f \iff g_n \xrightarrow{\mu \cdot B} g \right) \Rightarrow \\
 &(\text{w}\mu 3) \left(f_n \xrightarrow{\mu \cdot A} f \iff g_n \xrightarrow{\mu \cdot A} g \right) \\
 (\text{w}\mu 5) \quad f_n \xrightarrow{\mu \cdot A} f &\Rightarrow \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} f_{m_n} \xrightarrow{\mu \cdot A} f
 \end{aligned}$$

D Wynika z faktu, że ciąg

$$\alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} \mu \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

jest ciągiem liczbowym.

$$(\text{w}\mu 6) \quad f_n \xrightarrow{\mu \cdot A_1} f \wedge \dots \wedge f_n \xrightarrow{\mu \cdot A_m} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu \cdot \bigcup_{k=1}^m A_k} f$$

D Wynika z definicji zbieżności według miary, gdyż

$$\begin{aligned}
 &\mu \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in \bigcup_{k=1}^m A_k\} = \\
 &= \mu \left(\bigcup_{k=1}^m \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in A_k\} \right) \ll \\
 &\ll \sum_{k=1}^m \mu \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in A_k\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{w}\mu 7) \quad &\left(f_n \xrightarrow{\mu \cdot A_1} f \wedge f_n \xrightarrow{\mu \cdot A_2} f \wedge \dots \right) \wedge \\
 &\wedge \mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) < \infty \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu \cdot \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} f
 \end{aligned}$$

D Niech

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} B_k \stackrel{\text{def}}{=} A_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \in \mathcal{S}$$

Wtedy

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$$

oraz na mocy (wμ2)

$$f_n \xrightarrow{\mu \cdot A_1} f \wedge f_n \xrightarrow{\mu \cdot A_2} f \wedge \dots \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu \cdot B_1} f \wedge f_n \xrightarrow{\mu \cdot B_2} f \wedge \dots$$

Niech ε będzie teraz dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią i

$$\alpha_{kn} \stackrel{\text{def}}{=} \mu \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in B_k\}$$

$$c_n \stackrel{\text{def}}{=} \mu \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in \sum_{k=1}^{\infty} B_k\}$$

Zatem

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} c_n = \sum_{k=1}^{\infty} d_{kn}$$

a z założenia

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \mu \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) < \infty$$

wynika, że

$$\bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu(B_k) < \frac{\delta}{2}$$

Ponieważ

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} d_{kn} \leq \mu(B_k)$$

Zatem

$$(*) \quad \bigwedge_{\substack{\varepsilon, \delta \in \mathbb{R} \\ \varepsilon, \delta > 0}} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=m+1}^{\infty} d_{kn} < \frac{\delta}{2}$$

Z drugiej strony

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} f_n \xrightarrow{\mu \cdot B_k} f \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \lim_{n \rightarrow \infty} d_{kn} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon, \delta \in \mathbb{R} \\ \varepsilon, \delta > 0}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} d_{kn} < \frac{\delta}{2m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon, \delta \in \mathbb{R} \\ \varepsilon, \delta > 0}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \sum_{k=1}^m d_{kn} < \frac{\delta}{2} \stackrel{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \bigwedge_{\substack{\varepsilon, \delta \in \mathbb{R} \\ \varepsilon, \delta > 0}} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} c_n =$$

$$= \sum_{k=1}^m d_{kn} + \sum_{k=m+1}^{\infty} d_{kn} < \delta \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu \cdot \sum_{k=1}^{\infty} B_k} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu \cdot \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} f$$

(w μ 8) $f_n \xrightarrow{\mu \cdot A} f \Leftrightarrow$ ciąg (f_n) spełnia warunek Cauchy'ego według miary na zbiorze $A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \in \mathcal{S} \wedge f_1, f_2, \dots$ mierzalne μ na zbiorze $A \wedge f_1, f_2, \dots$ skończone prawie wszędzie na zbiorze $A \wedge$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_0}} \mu\{x : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \delta \wedge x \in A\} < \varepsilon$$

D] Dowód podzielimy na 4 części:

T1 $f_n \xrightarrow{\mu \cdot A} f \Rightarrow$ ciąg (f_n) spełnia warunek Cauchy'ego według miary na zbiorze A .

T2 Ciąg (f_n) spełnia warunek Cauchy'ego według miary na zbiorze $A \Rightarrow \bigvee_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} f_{m_n} \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f$.

T3 Ciąg (f_n) spełnia warunek Cauchy'ego według miary na zbiorze $A \Rightarrow \bigvee_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} f_{m_n} \xrightarrow{\mu \cdot A} f$.

T4 Twierdzenie Riesz. Ciąg (f_n) spełnia warunek Cauchy'ego według miary na zbiorze $A \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu \cdot A} f$.

Dowód T1

Na mocy twierdzenia § 208

$\bigvee_{B \in \mathcal{S}} B \subset A \wedge \mu(A-B)=0 \wedge f, f_1, f_2, \dots$ skończone na zbiorze B a następnie

$$f_n \xrightarrow{\mu \cdot A} f \stackrel{(w\mu 2)}{\Rightarrow} f_n \xrightarrow{\mu \cdot B} f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_0}} \mu\{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in B\} < \frac{\varepsilon}{2} \wedge$$

$$\wedge \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in B\} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_0}} \mu\{x : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \delta \wedge x \in B\} \leq$$

$$\leq \mu\{x : |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in B\} \leq$$

$$\begin{aligned} & \ll \mu(\{x: |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in B\} \cup \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge \\ & \wedge x \in B\}) \ll \mu\{x: |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in B\} + \\ & + \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in B\} < \varepsilon \end{aligned}$$

Ale

$$0 \leq \mu\{x: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \delta \wedge x \in A-B\} \leq \mu(A-B) = 0$$

skąd

$$\begin{aligned} & \mu\{x: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \delta \wedge x \in A\} = \\ & = \mu\{x: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \delta \wedge x \in B\} + \\ & + \mu\{x: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \delta \wedge x \in A-B\} = \\ & = \mu\{x: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \delta \wedge x \in B\} \end{aligned}$$

Zatem

$$\bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_0}} \mu\{x: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \delta \wedge x \in A\} < \varepsilon$$

co kończy dowód części T1, gdyż warunki $A \in \mathcal{S}$, f_1, f_2, \dots mierzalne μ na zbiorze A i f_1, f_2, \dots skończone prawie wszędzie na zbiorze A są spełnione z założenia.

Dowód T2

Na mocy twierdzenia § 208

$$\bigvee_{C \in \mathcal{S}} C \subset A \wedge \mu(A-C) = 0 \wedge f_1, f_2, \dots \text{ skończone na zbiorze } C$$

Ponadto z założenia, że ciąg (f_n) spełnia warunek Cauchy'ego według miary na zbiorze A wynika, że

$$\begin{aligned} & \bigvee_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \mu\{x: |f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x)| \geq \frac{1}{2^n} \wedge x \in A\} < \\ & < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \bigvee_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \mu\{x: |f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x)| \geq \frac{1}{2^n} \wedge \\ & \wedge x \in C\} < \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Niech

$$C_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x: |f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x)| \geq \frac{1}{2^n} \wedge x \in C\} \in \mathcal{S}, (C_n \subset C)$$

$$D_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k \in \mathcal{S}, (D_n \subset C)$$

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{S}, (D \subset C)$$

Zatem

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n) < \frac{1}{2^n} \wedge \mu(D_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(C_k) < \frac{1}{2^{n-1}} \wedge$$

$$\wedge \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \mu(D) \leq \mu(D_n) < \frac{1}{2^{n-1}} \right) \Rightarrow \mu(D) = 0$$

a ponadto

$$(i) \quad C - D_n = C - \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k = \bigcap_{k=n}^{\infty} (C - C_k) \in \mathcal{S}$$

$$(ii) \quad C - D = C - \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C - D_n) \in \mathcal{S}$$

Na mocy (i)

$$(iii) \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} C - D_n \subset C - C_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} x \in C - D_n \Rightarrow |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)| < \frac{1}{2^k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{x \in C - D_n} \bigwedge_{\substack{k, l \in \mathbb{N} \\ l \geq k \geq n}} |f_{m_l}(x) - f_{m_k}(x)| =$$

$$= |[f_{m_l}(x) - f_{m_{l-1}}(x)] + \dots + [f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)]| \leq$$

$$\leq |f_{m_l}(x) - f_{m_{l-1}}(x)| + \dots + |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)| <$$

$$< \frac{1}{2^{l-1}} + \dots + \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots = \frac{1}{2^{k-1}}$$

Ponieważ na mocy (ii)

$$\bigwedge_{x \in C-D} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} x \in C-D_n$$

więc na mocy (iii)

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{x \in C-D} \text{ciąg liczbowy } (f_{m_n}(x)) \text{ spełnia warunek Cauchy'} \\ \text{ego} \Rightarrow & \bigwedge_{x \in C-D} \bigvee_{f(x) \in \mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_{m_n}(x) = f(x) \end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia § 198 funkcja f jest mierzalna na zbiorze $C-D \in \mathcal{S}$ i wobec tego

$$(iv) \quad f_{m_n} \xrightarrow{C-D} f$$

Ale

$$\mu[A - (C-D)] = \mu[(A-C) \cup D] \leq \mu(A-C) + \mu(D) = 0$$

i wobec tego

$$f_{m_n} \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f$$

co kończy dowód części T2.

Dowód T3

Rozpatrujemy w dalszym ciągu zależności wykazane w części T2. Mamy

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{x \in C-D_n} |f_{m_n}(x) - f(x)| \stackrel{(iv)}{=} \stackrel{(ii)}{=} \left| [f_{m_n}(x) - f_{m_{n+1}}(x)] + \right. \\ & \quad \left. + [f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_{n+2}}(x)] + \dots \right| \leq \\ & \leq |f_{m_{n+1}}(x) - f_{m_n}(x)| + |f_{m_{n+2}}(x) - f_{m_{n+1}}(x)| + \dots \stackrel{(iii)}{<} \\ & \stackrel{(iii)}{<} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x : |f_{m_n}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} \wedge x \in C \right\} \subset D_n \Rightarrow \\ & \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{k, l \in \mathbb{N} \\ l > k \geq n}} \left\{ x : |f_{m_n}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^{k-1}} \wedge x \in C \right\} \subset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \subset \{x: |f_{m_l}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^{l-1}} \wedge x \in C\} \subset D_l \subset D_n \Rightarrow \\
& \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} \bigwedge_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \geq k}} \{x: |f_{m_l}(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in C\} \subset D_n \Rightarrow \\
& \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} \bigwedge_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \geq k}} \mu\{x: |f_{m_l}(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in C\} \ll \\
& \ll \mu(D_n) < \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \geq k}} \mu\{x: |f_{m_l}(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in C\} < \varepsilon \Rightarrow \\
& \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \lim_{l \rightarrow \infty} \mu\{x: |f_{m_l}(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in C\} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow f_{m_n} \xrightarrow{\mu \cdot C} f \xrightarrow[\text{(wz)}]{\mu \cdot A} f_{m_n} \xrightarrow{\mu \cdot A} f
\end{aligned}$$

co kończy dowód części T3.

Dowód T4

Na mocy T3 i założenia o spełnieniu warunku Cauchy'ego według miary na zbiorze A mamy

$$\begin{aligned}
& \bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \mu\{x: |f_{m_n}(x) - f(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in C\} < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \\
& \wedge \mu\{x: |f_n(x) - f_{m_n}(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in C\} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in C\} \ll \\
& \ll \mu\{x: |f_n(x) - f_{m_n}(x)| + |f_{m_n}(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in C\} \ll \\
& \ll \mu\left(\{x: |f_n(x) - f_{m_n}(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in C\} \cup \right. \\
& \left. \cup \{x: |f_{m_n}(x) - f(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in C\}\right) \ll \\
& \ll \mu\{x: |f_n(x) - f_{m_n}(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in C\} +
\end{aligned}$$

$$+ \mu \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in C\} < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu, C} f \xrightarrow{(\mu, 3)} f_n \xrightarrow{\mu, A} f$$

W ten sposób został zakończony dowód części T4 i całej własności (w μ 8).

$$(w\mu 9) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu, A} f$$

$$\text{Dl} \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} f \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{C \in \mathcal{S} \\ C \subset A \\ \mu(A-C) < \varepsilon}} f_n \xrightarrow{j, C} f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{C \in \mathcal{S} \\ C \subset A \\ \mu(A-C) < \varepsilon}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathfrak{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in C} |f_n(x) -$$

$$- f(x)| < \delta \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{C \in \mathcal{S} \\ C \subset A \\ \mu(A-C) < \varepsilon}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathfrak{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} \{x: |f_n(x) -$$

$$- f(x)| \geq \delta \wedge x \in A\} \subset A - C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} \mu \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in A\} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathfrak{R} \\ \delta > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in A\} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu, A} f$$

gdyż z założenia jest $A \in \mathcal{S}$, f, f_1, f_2, \dots są funkcjami mierzalnymi μ na zbiorze A i skończonymi prawie wszędzie na zbiorze A na mocy własności (prj9).

$$(w\mu 10) \quad f_n \xrightarrow{j, A} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu, A} f$$

Dl Wynika z własności (prj10) i (w μ 9).

(w μ 11) Zl 1^o f, f_1, f_2, \dots funkcje mierzalne μ i skończone prawie wszędzie na zbiorze $A \in \mathcal{S}$.

2^o $\mu(A) < \infty$.

$$\text{Tl} \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu, A} f$$

Dl Wynika z własności (prj11) (twierdzenie Jegorowa) i własności (w μ 9).

(w μ 12) Z] 1^o f, f_1, f_2, \dots funkcje mierzalne μ i skończone prawie wszędzie na zbiorze $A \in \mathcal{S}$.

2^o $\mu(A) < \infty$.

$$\text{T]} \quad f_n \xrightarrow{A} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu, A} f$$

D] Wynika z własności (prw9) i (w μ 11).

$$(\text{w}\mu 13) \quad f_n \xrightarrow{\mu, A} f \Rightarrow \bigvee_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} f_{m_n} \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f$$

D] Wynika z części T1 i T2 dowodu własności (w μ 8).

$$(\text{w}\mu 14) \quad f_n \xrightarrow{\mu, A} f \Rightarrow \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} c f_n \xrightarrow{\mu, A} c f$$

D] Dla $c = 0$ implikacja jest oczywista. Dla $c \neq 0$ mamy

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \{x: |c f_n(x) - c f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \wedge x \in A\} = 0 \Rightarrow c f_n \xrightarrow{\mu, A} c f \end{aligned}$$

gdyż z założenia $A \in \mathcal{S}$, $c f$, $c f_1$, $c f_2$, ... są funkcjami mierzalnymi μ na zbiorze A i skończonymi prawie wszędzie na zbiorze A .

$$(\text{w}\mu 15) \quad f_n \xrightarrow{\mu, A} f \wedge g_n \xrightarrow{\mu, A} g \Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{\mu, A} f + g$$

D] Z założenia jest $A \in \mathcal{S}$ i funkcje f, f_1, f_2, \dots oraz g, g_1, g_2, \dots są funkcjami mierzalnymi μ na zbiorze A i skończonymi prawie wszędzie na zbiorze A , skąd na mocy twierdzenia § 187 funkcje $f+g, f_1+g_1, f_2+g_2, \dots$ są mierzalne μ na zbiorze A i skończone prawie wszędzie na tym zbiorze. Następnie

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{\mu, A} f \wedge g_n \xrightarrow{\mu, A} g & \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \mu \{x: |f_n(x) - \\ & - f(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in A\} < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \mu \{x: |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge \\ & \wedge x \in A\} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \mu \{x: |f_n(x) + \\ & + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \geq \delta \wedge x \in A\} < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g_n(x) - f(x) - g(x) | \geq \delta \wedge x \in A \} \ll \mu \{ x : |f_n(x) - f(x)| + \\
& + |g_n(x) - g(x)| \geq \delta \wedge x \in A \} \ll \mu \left(\{ x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge \right. \\
& \left. \wedge x \in A \} \cup \{ x : |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in A \} \right) \leq \\
& \ll \mu \{ x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge x \in A \} + \mu \{ x : |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\delta}{2} \wedge \\
& \wedge x \in A \} < \varepsilon \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \{ x : |f_n(x) + g_n(x) - \\
& - f(x) - g(x)| \geq \delta \wedge x \in A \} = 0 \Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{\mu, A} f + g
\end{aligned}$$

$$(w\mu 16) \quad f_n \xrightarrow{\mu, A} f \wedge g_n \xrightarrow{\mu, A} g \Rightarrow f_n - g_n \xrightarrow{\mu, A} f - g$$

D) Wynika z własności (w\mu 14) i (w\mu 15).

$$\begin{aligned}
(w\mu 17) \quad f_n \xrightarrow{\mu, A} f \wedge g_n \xrightarrow{\mu, A} g \wedge \\
\wedge \left(\bigvee_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A \\ \mu(A-B)=0}} \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in B} |f(x)| < \alpha \wedge |g(x)| < \alpha \right) \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{\mu, A} fg
\end{aligned}$$

D) Z założenia jest $A \in \mathcal{S}$ i funkcje f, f_1, f_2, \dots oraz g, g_1, g_2, \dots są mierzalne μ i skończone prawie wszędzie na zbiorze A , skąd na mocy twierdzenia § 191 funkcje $fg, f_1g_1, f_2g_2, \dots$ są mierzalne μ na zbiorze A i skończone prawie wszędzie na tym zbiorze. Następnie dla dowolnej ustalonej liczby rzeczywistej dodatniej ε mamy

$$\begin{aligned}
& \{ x : |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in B \} = \\
& = \{ x : | [f_n(x) - f(x)] [g_n(x) - g(x)] + f(x) [g_n(x) - g(x)] + \\
& + g(x) [f_n(x) - f(x)] | \geq \varepsilon \wedge x \in B \} \subset \\
& \subset \{ x : |f_n(x) - f(x)| |g_n(x) - g(x)| + |f(x)| |g_n(x) - g(x)| + \\
& + |g(x)| |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in B \} \subset \\
& \subset \left(\{ x : |f_n(x) - f(x)| |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \wedge x \in B \} \cup \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cup \{x: |f(x)| |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \wedge x \in B\} \cup \\
& \cup \{x: |g(x)| |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \wedge x \in B\} \subset \\
& \subset \left(\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \wedge x \in B\} \cup \right. \\
& \cup \{x: |g_n(x) - g(x)| \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \wedge x \in B\} \cup \\
& \cup \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{3\alpha} \wedge x \in B\} \cup \\
& \left. \cup \{x: |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{3\alpha} \wedge x \in B\} \right) = \\
& = \{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in B\} \cup \{x: |g_n(x) - g(x)| \geq \delta \wedge x \in B\} \\
& \text{gdzie}
\end{aligned}$$

$$\delta = \min\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, \frac{\varepsilon}{3\alpha}\right)$$

Wynika stąd, że

$$\begin{aligned}
(*) \quad & \mu\{x: |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in B\} \leq \\
& \leq \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in B\} + \\
& + \mu\{x: |g_n(x) - g(x)| \geq \delta \wedge x \in B\}
\end{aligned}$$

Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned}
& f_n \xrightarrow{\mu.A} f \wedge g_n \xrightarrow{\mu.A} g \xRightarrow{(w\mu_2)} f_n \xrightarrow{\mu.B} f \wedge g_n \xrightarrow{\mu.B} g \Rightarrow \\
& \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in B\} = 0 \wedge \\
& \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x: |g_n(x) - g(x)| \geq \delta \wedge x \in B\} = 0 \xRightarrow{(*)} \\
& \xRightarrow{(*)} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x: |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \geq \varepsilon \wedge x \in B\} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{\mu.B} f g \xRightarrow{(w\mu_3)} f_n g_n \xrightarrow{\mu.A} f g \\
& (w\mu_{18}) \quad f_n \xrightarrow{\mu.A} f \wedge g_n \xrightarrow{\mu.A} g \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{\mu.A} f g
\end{aligned}$$

D] Na mocy definicji zbieżności według miary i twierdzenia § 208

$$\bigvee_{\substack{C \in \mathfrak{S} \\ C \subset A \\ \mu(A-C)=0}} \bigwedge_{x \in C} |f(x)| < \infty \wedge |g(x)| < \infty \wedge \mu(C) < \infty$$

wobec czego funkcje fg , f_1g_1 , f_2g_2 są mierzalne μ i skończone prawie wszędzie na zbiorze $A \in \mathfrak{S}$.

Niech

$$(**) \bigwedge_{r \in \mathfrak{R}} C_r \stackrel{\text{def}}{=} \{x: |f(x)| < r \wedge |g(x)| < r \wedge x \in C\} \in \mathfrak{S}$$

Zatem

$$C = \bigcup_{r=1}^{\infty} C_r$$

Na mocy (**), (wμ2) i (wμ17)

$$\bigwedge_{r \in \mathfrak{R}} f_n g_n \xrightarrow{\mu, C_r} fg$$

i na mocy (wμ7) oraz (wμ3)

$$f_n g_n \xrightarrow{\mu, C} fg \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{\mu, A} fg$$

$$(w\mu19) \quad f_n \xrightarrow{\mu, A} f \wedge \bigvee_{\substack{B \in \mathfrak{S} \\ B \subset A \\ \mu(A-B)=0}} \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathfrak{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in B} |f(x)| < \alpha \Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} f_n^k \xrightarrow{\mu, A} f^k$$

D] Wynika z własności (wμ17).

$$(w\mu20) \quad f_n \xrightarrow{\mu, A} f \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} f_n^k \xrightarrow{\mu, A} f^k$$

D] Wynika z własności (wμ18).

$$(w\mu21) \quad f_n \xrightarrow{\mu, A} f \wedge \left(\bigvee_{\substack{B \in \mathfrak{S} \\ B \subset A \\ \mu(A-B)=0}} \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathfrak{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in B} |f(x)| > \alpha \right) \wedge f_1, f_2, \dots \text{ różne}$$

od zera prawie wszędzie na zbiorze $A \Rightarrow \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\mu, A} \frac{1}{f}$

D] Na mocy twierdzenia § 208

$$\bigvee_{\substack{C \in \mathfrak{S} \\ C \subset A \\ \mu(A-C)=0}} \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathfrak{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in C} |f(x)| > \alpha \wedge \bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} f_n(x) \neq 0$$

skąd

$$\begin{aligned}
 & \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \mu\{x: \left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| \geq \varepsilon \wedge x \in C\} = \\
 & = \mu\{x: \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)||f(x)|} \geq \alpha\varepsilon \wedge x \in C\} \leq \\
 & \leq \mu\{x: \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)|} \geq \alpha\varepsilon \wedge x \in C\} = \\
 & = \mu\{x: \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)|} \geq \alpha\varepsilon \wedge |f_n(x)| > \frac{\alpha}{2} \wedge x \in C\} + \\
 & + \mu\{x: \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)|} \geq \alpha\varepsilon \wedge |f_n(x)| \leq \frac{\alpha}{2} \wedge x \in C\} \leq \\
 & \leq \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha^2}{2} \varepsilon \wedge x \in C\} + \\
 & + \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\alpha}{2} \wedge x \in C\}
 \end{aligned}$$

gdyż

$$|f(x)| > \alpha \wedge |f_n(x)| \leq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| > \frac{\alpha}{2}$$

Ale

$$\begin{aligned}
 & f_n \xrightarrow{\mu, A} f \xRightarrow{(w\mu 2)} f_n \xrightarrow{\mu, C} f \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \alpha, \varepsilon > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha^2}{2} \varepsilon \wedge x \in C\} = 0 \wedge \\
 & \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\alpha}{2} \wedge x \in C\} = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x: \left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| \geq \varepsilon \wedge x \in C\} = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\mu, C} \frac{1}{f} \xRightarrow{(w\mu 3)} \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\mu, A} \frac{1}{f}
 \end{aligned}$$

gdyż z założeń wynika, że $A \in \mathcal{S}$ i funkcje $\frac{1}{f}, \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_2}, \dots$ są mierzalne μ na zbiorze A i skończone prawie wszędzie na tym zbiorze.

(wμ22) $f_n \xrightarrow{\mu \cdot A} f \wedge f, f_1, f_2, \dots$ są różne od zera prawie wszędzie na zbiorze $A \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\mu \cdot A} \frac{1}{f}$

D] Na mocy twierdzenia § 208

$$\bigvee_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A \\ \mu(A-B)=0}} \bigwedge_{x \in B} f(x) \neq 0 \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \neq 0 \wedge \mu(B) < \infty$$

Niech

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} C_m \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : |f(x)| > \frac{1}{m} \right\} \cap B \in \mathcal{S}$$

Zatem

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$$

Na mocy (wμ2) i (wμ21)

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \left(f_n \xrightarrow{\mu \cdot A} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu \cdot C_m} f \Rightarrow \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\mu \cdot C_m} \frac{1}{f} \right) \Rightarrow$$

$$\stackrel{(w\mu 2)}{\Rightarrow} \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\mu \cdot B} \frac{1}{f} \stackrel{(w\mu 3)}{\Rightarrow} \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\mu \cdot A} \frac{1}{f}$$

$$(w\mu 23) \quad f_n \xrightarrow{\mu \cdot A} f \wedge g_n \xrightarrow{\mu \cdot A} g \wedge \left(\bigvee_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A \\ \mu(A-B)=0}} \bigvee_{\substack{\alpha, b \in \mathbb{R} \\ \alpha, b > 0}} \bigwedge_{x \in B} |f(x)| < \alpha \wedge \right.$$

$$\left. \bigwedge |g(x)| > b \right) \wedge g_1, g_2, \dots \text{ różne od zera prawie wszędzie na zbiorze } A \Rightarrow \frac{f_n}{g_n} \xrightarrow{\mu \cdot A} \frac{f}{g}$$

D] Wynika z własności (wμ17) i (wμ21).

$$(w\mu 24) \quad f_n \xrightarrow{\mu \cdot A} f \wedge g_n \xrightarrow{\mu \cdot A} g \wedge g, g_1, g_2, \dots \text{ różne od zera prawie wszędzie na zbiorze } A \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \frac{f_n}{g_n} \xrightarrow{\mu \cdot A} \frac{f}{g}.$$

D] Wynika z własności (wμ18) i (wμ22).

- (wμ25) Z] 1^o f, f_1, f_2, \dots są funkcjami mierzalnymi i skończonymi na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ w przestrzeni z miarą (X, \mathcal{S}, μ) .
 2^o h jest skończoną funkcją rzeczywistą o dziedzinie $H \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na prostej \mathbb{R} , ciągłą na przedziale $(a; b) \subset H$, $a, b \in \mathbb{R}_0$, takim, że $f(A), f_1(A), f_2(A), \dots \subset (a; b)$.
 3^o $\mu(A) = c < \infty$.

$$T] f_n \xrightarrow{\mu, A} f \Rightarrow h(f_n) \xrightarrow{\mu, A} h(f)$$

D] Na mocy twierdzenia § 199 funkcja h jest borelowska na przedziale $\langle a; b \rangle$, a na mocy twierdzenia § 186 funkcje $h(f)$, $h(f_1)$, $h(f_2)$, ... są mierzalne i skończone na zbiorze A . Niech

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in A \wedge f(x) \in \langle a; b \rangle\},$$

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} D_k \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in A \wedge f(x) \in \langle \alpha_k; b_k \rangle\}$$

gdzie

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad \alpha_k \nearrow a, \quad b_k \nearrow b$$

Mamy

$$D_1 \subset D_2 \subset \dots \wedge \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$$

i na mocy własności (m7) miary

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(D_k) = \mu(D) = \mu(A) = c$$

Zatem

$$\bigwedge_{\substack{\alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha > 0}} \bigvee_{\substack{\langle \alpha_m; b_m \rangle \subset \langle a; b \rangle \\ \alpha_m, b_m \in \mathbb{R}}} \mu\{x: x \in A \wedge f(x) \in \langle \alpha_m; b_m \rangle\} > c - \frac{\alpha}{2}$$

a na mocy twierdzenia (A) z § 211 funkcja h jest jedno-
stajnie ciągła na przedziale $\langle \alpha_m; b_m \rangle$ czyli

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{\substack{x \in A \\ f(x) \in \langle \alpha_m; b_m \rangle}} (|f_n(x) - f(x)| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |h(f_n(x)) - h(f(x))| < \varepsilon)$$

Stąd

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \mu\{x: |h(f_n(x)) - h(f(x))| < \varepsilon \wedge x \in A\} \geq \\ \geq \mu\{x: |h(f_n(x)) - h(f(x))| < \varepsilon \wedge x \in A \wedge f(x) \in \langle \alpha_m; b_m \rangle\} \geq \\ \geq \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| < \delta \wedge x \in A \wedge f(x) \in \langle \alpha_m; b_m \rangle\} \geq$$

$$\geq \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| < \delta \wedge x \in A\} - \mu\{x: x \in A \wedge f(x) \notin \langle \alpha_m; b_m \rangle\} \\ \geq \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| < \delta \wedge x \in A\} - \frac{\alpha}{2}$$

a następnie

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \mu\{x: |h(f_n(x)) - h(f(x))| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} = \\ = \mu(A) - \mu\{x: |h(f_n(x)) - h(f(x))| < \varepsilon \wedge x \in A\} \leq \\ \leq \mu(A) - \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| < \delta \wedge x \in A\} + \frac{\alpha}{2} = \\ = \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in A\} + \frac{\alpha}{2}$$

Ale

$$f_n \xrightarrow{\mu A} f \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta, \alpha \in \mathbb{R} \\ \delta, \alpha > 0}} \bigvee_{\substack{n_0 \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \wedge x \in A\} < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon, \alpha \in \mathbb{R} \\ \varepsilon, \alpha > 0}} \bigvee_{\substack{n_0 \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \mu\{x: |h(f_n(x)) - h(f(x))| \geq \varepsilon \wedge x \in A\} < \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow h(f_n) \xrightarrow{\mu A} h(f)$$

§ 215. Twierdzenie Łuzina

- Z 1° \mathcal{L} jest klasą wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n z miarą Lebesgue'a ω , tzn. w przestrzeni z miarą $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \omega)$.
 2° f jest funkcją rzeczywistą skończoną określoną na zbiorze $A \in \mathcal{L}$.
 3° $\omega(A) < \infty$.

- T f jest mierzalna ω na zbiorze $A \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{F \in \mathcal{L} \\ F \subset A \\ \omega(A-F) < \varepsilon}} f \text{ jest ciągła na zbiorze } F$

gdzie \bar{F} oznacza domknięcie zbioru F .

- D Dowód podzielimy na 6 części T1, ..., T6:

- T1 $\bigwedge_{B \in \mathcal{L}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{G \in \mathcal{L}} G \text{ jest zbiorem otwartym} \wedge G \supset B \wedge \omega(G-B) < \varepsilon$