

$D_- f = D^- f = D_+ f = D^+ f < \infty$ prawie wszędzie w przedziale $\langle a; b \rangle$

skąd wynika, że funkcja f ma pochodną prawie wszędzie w przedziale $\langle a; b \rangle$.

Gdy przedział $\langle a; b \rangle$ jest nieograniczony, wtedy

$$\langle a; b \rangle = \bigcup_{j=1}^{\infty} \langle a_j; b_j \rangle$$

gdzie przedziały $\langle a_1; b_1 \rangle$, $\langle a_2; b_2 \rangle$, ... są ograniczone. Funkcja f ma w każdym z tych przedziałów wahanie skończone, a więc na mocy przypadku już udowodnionego ma pochodną prawie wszędzie w każdym z tych przedziałów. Zatem ma również prawie wszędzie pochodną w przedziale $\langle a; b \rangle$.

Gdy funkcja f nie jest funkcją niemalejącą, korzystamy z rozkładu Jordana z twierdzenia (B). Jeśli mianowicie f jest funkcją o wahanu skończonym na przedziale $\langle a; b \rangle$, to jej wahanie górne $v_{f,a}^+(x)$ i dolne $v_{f,a}^-(x)$ są funkcjami niemalejącymi o wahanu skończonym na przedziale $\langle a; b \rangle$ i wobec tego na mocy przypadku już udowodnionego mają pochodną prawie wszędzie w przedziale $\langle a; b \rangle$, skąd wynika, że i funkcja

$$f(x) = f(a) + v_{f,a}^+(x) - v_{f,a}^-(x)$$

ma pochodną prawie wszędzie w przedziale $\langle a; b \rangle$.

W ten sposób dowód twierdzenia (D) został przeprowadzony.

§ 180. Funkcje rzeczywiste bezwzględnie ciągłe

Funkcję rzeczywistą skończoną f określoną na przedziale $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ nazywamy bezwzględnie ciągłą w przedziale $\langle a; b \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{array}{ccccccc} \bigwedge & \bigwedge & \bigvee & \bigwedge & & \sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon \\ \langle a_0; b_0 \rangle \subset \langle a; b \rangle & \varepsilon \in \mathbb{R} & \delta \in \mathbb{R} & \langle a_1; b_1 \rangle, \dots, \langle a_m; b_m \rangle \subset \langle a_0; b_0 \rangle \\ a_0, b_0 \in \mathbb{R} & \varepsilon > 0 & \delta > 0 & \langle a_i; b_i \rangle \cap \langle a_j; b_j \rangle = \emptyset \text{ dla } i \neq j \\ & & & \sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta \end{array}$$

Twierdzenie (A)

Funkcja f bezwzględnie ciągła w przedziale ograniczonym $\langle a; b \rangle$ ma na tym przedziale skończone wahanie.

D) Przeprowadzimy dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. Założmy zatem, że f jest funkcją bezwzględnie ciągłą w przedziale $\langle a; b \rangle$ i ma na tym przedziale nieskończone wahanie. Ponieważ przedział $\langle a; b \rangle$ jest z założenia ograniczony, więc

$$(*) \quad \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{\substack{\langle a_0; b_0 \rangle \subset \langle a; b \rangle \\ b_0 - a_0 < \delta}} v_{f, \langle a_0; b_0 \rangle} = \infty$$

W przeciwnym bowiem przypadku przedział $\langle a; b \rangle$ można by przedstawić jako sumę skończonej liczby przedziałów o długościach mniejszych niż δ , na których funkcja f miałaby skończone wahanie, skąd wynikałoby, że funkcja f również na przedziale $\langle a; b \rangle$ ma skończone wahanie, wbrew założeniu. Równość $(*)$ jest sprzeczna z podaną wyżej definicją funkcji bezwzględnie ciągłej, z której wynika, że

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{\substack{\langle a_0; b_0 \rangle \subset \langle a; b \rangle \\ b_0 - a_0 < \delta}} v_{f, \langle a_0; b_0 \rangle} < \varepsilon$$

Tym samym twierdzenie (A) zostało udowodnione.

Twierdzenie (B)

Funkcja f bezwzględnie ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła w tym przedziale.

D) Na mocy definicji funkcji bezwzględnie ciągłej

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x_0, x \in \langle a; b \rangle} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

co oznacza, że funkcja f jest jednostajnie ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$.

Twierdzenie (C)

Funkcja f bezwzględnie ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ ma pochodną prawie wszędzie w tym przedziale.

D) Jeśli przedział $\langle a; b \rangle$ jest ograniczony, to twierdzenie (C) wynika bezpośrednio z twierdzenia (A) tego paragrafu oraz twierdzenia (D) paragrafu poprzedniego.

Gdy przedział $\langle a; b \rangle$ jest nieograniczony, niech

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} A_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle a; b \rangle \cap \langle -k; k \rangle$$

Ponieważ każdy z przedziałów A_1, A_2, \dots jest ograniczony i funkcja f jest w każdym z nich bezwzględnie ciągła, więc ma w każdym z nich pochodną prawie wszędzie. Niech

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in A_k \wedge \text{funkcja } f \text{ w punkcie } x \text{ nie ma pochodnej}\}$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in \langle a; b \rangle \wedge \text{funkcja } f \text{ w punkcie } x \text{ nie ma pochodnej}\}$$

Wobec tego

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots$$

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \omega(B_k) = 0$$

i na mocy własności (m7) z § 105

$$\omega(B) = 0$$

co oznacza, że funkcja f ma pochodną prawie wszędzie w przedziale $\langle a; b \rangle$. Tym samym twierdzenie (C) zostało udowodnione.

Twierdzenie (D)

Kombinacja liniowa funkcji bezwzględnie ciągłych w przedziale $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ jest funkcją bezwzględnie ciągłą w tym przedziale.

D] Niech

$$f \stackrel{\text{def}}{=} c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$$

gdzie $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ i $c_1, \dots, c_n \neq 0$, a f_1, \dots, f_n są funkcjami bezwzględnie ciągłymi w przedziale $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$. Na mocy definicji

$$\begin{array}{c} \bigwedge \\ \langle a_0; b_0 \rangle \subset \langle a; b \rangle \\ a_0, b_0 \in \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{c} \bigwedge \\ \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \bigwedge \\ k \in \{1, \dots, n\} \end{array} \quad \begin{array}{c} \bigvee \\ \delta_k \in \mathbb{R} \\ \delta_k > 0 \end{array}$$

$$\bigwedge_{\substack{\langle a_i; b_i \rangle, \dots, \langle a_m; b_m \rangle \subset \langle a_0; b_0 \rangle \\ m \in \mathbb{N} \\ \langle a_i; b_i \rangle \cap \langle a_j; b_j \rangle = \emptyset \text{ dla } i \neq j}} \sum_{j=1}^m |f_k(b_j) - f_k(a_j)| < \frac{\varepsilon}{|c_k| \cdot n}$$

$$\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta_k$$

Stąd

$$\begin{aligned}
& \bigwedge_{\langle a_0; b_0 \rangle \subset \langle a; b \rangle} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta = m(\delta_1, \dots, \delta_n)}} \bigwedge_{\substack{\langle a_1; b_1 \rangle, \dots, \langle a_m; b_m \rangle \subset \langle a_0; b_0 \rangle \\ \langle a_i; b_i \rangle \cap \langle a_j; b_j \rangle = \emptyset \text{ dla } i \neq j \\ \sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta}} \sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| = \\
& = \sum_{j=1}^m |c_1(f_1(b_j) - f_1(a_j)) + \dots + c_n(f_n(b_j) - f_n(a_j))| \leq \\
& \leq |c_1| \sum_{j=1}^m |f_1(b_j) - f_1(a_j)| + \dots + |c_n| \sum_{j=1}^m |f_n(b_j) - f_n(a_j)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Zatem funkcja f jest bezwzględnie ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$, co było do wykazania.

Twierdzenie (E)

Iloczyn funkcji bezwzględnie ciągłych w przedziale $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ jest funkcją bezwzględnie ciągłą w tym przedziale.

D] Niech

$$f \stackrel{\text{def}}{=} f_1 f_2$$

gdzie f_1, f_2 są funkcjami bezwzględnie ciągłymi w przedziale $\langle a; b \rangle$. Wobec tego f_1, f_2 są funkcjami skończonymi w przedziale $\langle a; b \rangle$ i tym samym ograniczonymi w każdym przedziale ograniczonym

$$\langle a_0; b_0 \rangle \subset \langle a; b \rangle, \quad a_0, b_0 \in \mathbb{R}$$

Niech N_1 i N_2 będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że

$$\bigwedge_{x \in \langle a_0; b_0 \rangle} |f_1(x)| < N_1 < \infty \wedge |f_2(x)| < N_2 < \infty$$

Z bezwzględnej ciągłości funkcji f_1 i f_2 w przedziale $\langle a_0; b_0 \rangle$ wynika, że

$$\begin{aligned}
& \bigwedge_{\substack{\langle a_0; b_0 \rangle \subset \langle a; b \rangle \\ a_0, b_0 \in \mathbb{R}}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{\substack{\langle a_1; b_1 \rangle, \dots, \langle a_m; b_m \rangle \subset \langle a_0; b_0 \rangle \\ \langle a_i; b_i \rangle \cap \langle a_j; b_j \rangle = \emptyset \text{ dla } i \neq j \\ \sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta}}
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^m |f_1(b_j) - f_1(a_j)| < \frac{\varepsilon}{2N_2} \wedge \sum_{j=1}^m |f_2(b_j) - f_2(a_j)| < \frac{\varepsilon}{2N_1}$$

Stąd

$$\begin{array}{c}
 \bigwedge \\
 \langle \alpha_0; b_0 \rangle \subset \langle \alpha; b \rangle \\
 \alpha_0, b_0 \in \mathbb{R}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \bigwedge \\
 \varepsilon \in \mathbb{R} \\
 \varepsilon > 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \bigvee \\
 \delta \in \mathbb{R} \\
 \delta > 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \bigwedge \\
 \langle \alpha_1; b_1 \rangle, \dots, \langle \alpha_m; b_m \rangle \subset \langle \alpha_0; b_0 \rangle \\
 \langle \alpha_i; b_i \rangle \cap \langle \alpha_j; b_j \rangle = \emptyset \text{ dla } i \neq j \\
 \sum_{j=1}^m (b_j - \alpha_j) < \delta
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| &= \sum_{j=1}^m |f_1(b_j) f_2(b_j) - f_1(a_j) f_2(a_j)| = \\
 &= \sum_{j=1}^m |(f_1(b_j) - f_1(a_j)) f_2(b_j) + f_1(a_j) (f_2(b_j) - f_2(a_j))| \leq \\
 &\leq \sum_{j=1}^m |f_1(b_j) - f_1(a_j)| |f_2(b_j)| + \sum_{j=1}^m |f_1(a_j)| |f_2(b_j) - f_2(a_j)| < \\
 &< N_2 \sum_{j=1}^m |f_1(b_j) - f_1(a_j)| + N_1 \sum_{j=1}^m |f_2(b_j) - f_2(a_j)| < \\
 &< N_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2N_2} + N_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2N_1} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

co znaczy, że funkcja f jest bezwzględnie ciągła w przedziale $\langle \alpha; b \rangle$.

Na mocy powyższego z łatwością dowodzimy przez indukcję, że, jeśli

$$f = f_1 \cdot \dots \cdot f_n$$

gdzie f_1, \dots, f_n są funkcjami bezwzględnie ciągłymi w przedziale $\langle \alpha; b \rangle$, to również funkcja f jest bezwzględnie ciągła w tym przedziale. Tym samym twierdzenie (E) zostało udowodnione.

Twierdzenie (F)

Jeśli funkcja f bezwzględnie ciągła w przedziale $\langle \alpha; b \rangle \subset \mathbb{R}$ ma pochodną równą 0 prawie wszędzie w tym przedziale, to f ma stałą wartość w przedziale $\langle \alpha; b \rangle$.

D] Niech α_0, b_0 będą dowolnymi punktami przedziału $\langle \alpha; b \rangle$, $\alpha_0 \neq b_0$. Funkcja f ma pochodną równą zero prawie wszędzie w przedziale $\langle \alpha_0; b_0 \rangle$.

Niech

$$\mathcal{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in \langle \alpha_0; b_0 \rangle \wedge f'(x) = 0\}$$

Mamy

$$\omega(\langle \alpha_0; b_0 \rangle - z) = 0, \quad z \in \langle \alpha_0; b_0 \rangle$$

Następnie

$$\begin{aligned}
 (**) \quad & \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{x \in Z} \bigvee_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h > 0}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} < \varepsilon \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{x \in Z} \bigvee_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h > 0}} |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon h
 \end{aligned}$$

Otrzymana w ten sposób klasa przedziałów domkniętych $\langle x; x+h \rangle$ pokrywa zbiór Z w sensie Vitaliego i wobec tego na mocy twierdzenia Vitaliego z poprzedniego paragrafu istnieje ciąg przedziałów domkniętych rozłącznych

$$\langle x_1; x_1 + h_1 \rangle, \langle x_2; x_2 + h_2 \rangle, \dots, h_1, h_2, \dots > 0,$$

taki, że

$$\omega(z - \sum_{j=1}^m \langle x_j; x_j + h_j \rangle) = 0$$

gdzie $m \in \mathbb{N} \vee m = \infty$. Wobec tego

$$\begin{aligned}
 \omega(\langle \alpha_0; b_0 \rangle - \sum_{j=1}^m \langle x_j; x_j + h_j \rangle) &= \omega((\langle \alpha_0; b_0 \rangle - z) + \\
 + (z - \sum_{j=1}^m \langle x_j; x_j + h_j \rangle) - (\sum_{j=1}^m \langle x_j; x_j + h_j \rangle - z)) &\leq \omega(\langle \alpha_0; b_0 \rangle - z) + \\
 + \omega(z - \sum_{j=1}^m \langle x_j; x_j + h_j \rangle) &= 0
 \end{aligned}$$

czyli

$$\omega(\langle \alpha_0; b_0 \rangle - \sum_{j=1}^m \langle x_j; x_j + h_j \rangle) = 0$$

Niech $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ będzie liczbą odpowiadającą liczbie już wyżej obranej ε według definicji funkcji bezwzględnie ciągłej. Z ciągu przedziałów $(\langle x_j; x_j + h_j \rangle)$ możemy wziąć tak dużą liczbę N wyrazów, że

$$(***) \quad \omega(\langle a_0; b_0 \rangle) = \sum_{j=1}^N \langle x_j; x_j + h_j \rangle < \delta$$

przy czym możemy założyć, że

$$x_0 + h_0 = a_0 < x_1 < x_1 + h_1 < x_2 < x_2 + h_2 < \dots < x_N + h_N < b_0 = x_{N+1}$$

Wobec tego, niech

$$\rho_0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle a_0; x_1 \rangle, \rho_1 \stackrel{\text{def}}{=} \langle x_1 + h_1; x_2 \rangle, \dots, \rho_{N-1} \stackrel{\text{def}}{=} \langle x_{N-1} + h_{N-1}; x_N \rangle, \rho_N \stackrel{\text{def}}{=} \langle x_N + h_N; b_0 \rangle$$

i na mocy (***)

$$\sum_{j=0}^N \omega(\rho_j) < \delta$$

skąd na mocy definicji funkcji bezwzględnie ciągłej

$$(o) \quad \sum_{j=0}^N |f(x_{j+1}) - f(x_j + h_j)| < \varepsilon$$

Z drugiej strony na mocy (**) mamy

$$(oo) \quad \sum_{j=1}^N |f(x_j + h_j) - f(x_j)| < \varepsilon \sum_{j=1}^N h_j \leq \varepsilon (b_0 - a_0)$$

Na mocy (o) i (oo) otrzymujemy

$$|f(b_0) - f(a_0)| \leq \sum_{j=0}^N |f(x_{j+1}) - f(x_j + h_j)| + \sum_{j=1}^N |f(x_j + h_j) - f(x_j)| < \varepsilon + \varepsilon (b_0 - a_0)$$

a ze względu na dowolność liczby $\varepsilon > 0$

$$f(b_0) = f(a_0)$$

Ponieważ a_0 i b_0 były dowolnymi punktami przedziału $\langle a; b \rangle$, wobec tego funkcja f ma w tym przedziale stałą wartość, co było do wykazania.