

$$\bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m \\ B \in \mathcal{K}_{m+1} * \dots * \mathcal{K}_n}} [(\lambda_1 * \dots * \lambda_m) * (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)] (A \times B) = \\ = (\lambda_1 * \dots * \lambda_m)(A) \cdot (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)(B).$$

W szczególności funkcja produktowa $(\lambda_1 * \dots * \lambda_m) * (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)$ jest nieujemną addytywną funkcją zbioru określoną na ciele produktowym $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$ i taką, że

$$\bigwedge_{A_1 \in \mathcal{K}_1 \wedge \dots \wedge A_n \in \mathcal{K}_n} [(\lambda_1 * \dots * \lambda_m) * (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)] (A_1 \times \dots \times A_n) = \\ = [(\lambda_1 * \dots * \lambda_m) * (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)] [(A_1 \times \dots \times A_m) \times \\ \times (A_{m+1} \times \dots \times A_n)] = (\lambda_1 * \dots * \lambda_m)(A_1 \times \dots \times A_m) \cdot (\lambda_{m+1} * \dots * \lambda_n)(A_{m+1} \times \dots \times A_n) = \\ = \lambda_1(A_1) \cdot \dots \cdot \lambda_m(A_m) \cdot \lambda_{m+1}(A_{m+1}) \cdot \dots \cdot \lambda_n(A_n) = \lambda_1(A_1) \cdot \dots \cdot \lambda_n(A_n)$$

Ale na mocy twierdzenia (A) istnieje tylko jedna funkcja o takich własnościach, skąd wynika teza twierdzenia (B).

§ 178. Miary produktowe

Miara produktową μ miar μ_1, \dots, μ_n , określonych odpowiednio na σ -ciałach $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ w przestrzeniach odpowiednio $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, będziemy nazywać przeliczalnie addytywny produkt miar μ_1, \dots, μ_n taki, że

$$(*) \quad \bigwedge_{A_1 \in \mathcal{S}_1 \wedge \dots \wedge A_n \in \mathcal{S}_n} \mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(A_n)$$

Twierdzenie (A)

Dla danych miar μ_1, \dots, μ_n określonych odpowiednio na σ -ciałach $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ w przestrzeniach odpowiednio $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ istnieje dokładnie jedna miara produktowa μ określona na σ -ciele produktowym $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$ w przestrzeni $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ i spełniająca warunek (*).

D] Dowód podzielimy na 7 części L1, ..., L7, z których ostatnia stanowi właściwy dowód twierdzenia przez indukcję, przedostatnia - dowód w przypadku $n = 2$, a pozostałe mają charakter oddzielnych lematów.

L1 Z 1^0 λ jest nieujemną addytywną funkcją zbioru określoną na ciele zbiorów \mathcal{K} w przestrzeni X

$$2^0 \bigwedge_{\substack{B_1 \supset B_2 \supset \dots \\ B_1, B_2, \dots \in \mathcal{K} \\ \lambda(B_1) < \infty}} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = 0 \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(B_j) = 0 \right)$$

$$3^0 \bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{K} \\ \lambda(A) = \infty}} \left(\bigvee_{\substack{C_1, C_2, \dots \in \mathcal{K} \\ \lambda(C_1), \lambda(C_2), \dots < \infty}} A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \Rightarrow \right. \\ \Rightarrow \bigvee_{\substack{D_1 \subset D_2 \subset \dots \\ D_1, D_2, \dots \in \mathcal{K} \\ \lambda(D_1), \lambda(D_2), \dots < \infty}} A = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \wedge \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(D_j) = \infty \Big)$$

T λ jest przeliczalnie addytywna na ciele zbiorów \mathcal{K} .

D Mamy wykazać, że

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{K} \quad \left(A = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \Rightarrow \lambda(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) \right)$$

Gdy

$$\bigvee_{k \in \mathbb{N}} \lambda(A_k) = \infty$$

wtedy na mocy własności (a5) addytywnych funkcji zbioru (patrz § 95) jest

$$\lambda(A) \geq \lambda(A_k) \Rightarrow \lambda(A) = \infty = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)$$

Wobec tego pozostaje przeprowadzić dowód w przypadku, gdy

$$(i) \quad \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \lambda(A_j) < \infty$$

Jeśli $\lambda(A) < \infty$, to biorąc pod uwagę, że

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j \Rightarrow A - \sum_{j=1}^{\infty} A_j = A - \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 + \dots + A_j) = \\ &= \bigcap_{j=1}^{\infty} [A - (A_1 + \dots + A_j)] = 0 \end{aligned}$$

mamy na mocy założenia 2^0 i własności (a6) addytywnych funkcji zbioru

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda[A - (A_1 + \dots + A_j)] &= \lambda(A) - \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(A_1 + \dots + A_j) = \\ &= \lambda(A) - \lim_{j \rightarrow \infty} [\lambda(A_1) + \dots + \lambda(A_j)] = \lambda(A) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) = 0 \end{aligned}$$

i teza jest udowodniona.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy $\lambda(A) = \infty$. Wobec (i)

$$(ii) \quad A = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \xrightarrow{(3^0)} \bigvee_{\substack{D_1 \subset D_2 \subset \dots \\ D_1, D_2, \dots \in \mathcal{K} \\ \lambda(D_1), \lambda(D_2), \dots < \infty}} A = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \wedge \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(D_j) = \infty$$

Niech

$$E_1 \stackrel{\text{def}}{=} D_1 \wedge \bigwedge_{j \in \{2, 3, \dots\}} E_j \stackrel{\text{def}}{=} D_j - D_{j-1}$$

Wtedy $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{K}$ i

$$\begin{aligned} \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} D_j &= E_1 + \dots + E_j \\ A &= \sum_{j=1}^{\infty} E_j \end{aligned}$$

Ponadto na mocy przypadku już udowodnionego i założenia (i)

$$\bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \lambda(A_j) = \lambda\left[A_j \cap \sum_{k=1}^{\infty} E_k\right] = \lambda\left(\sum_{k=1}^{\infty} (A_j \cap E_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap E_k)$$

i analogicznie

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \lambda(E_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap E_k)$$

ponieważ $\lambda(E_k) \leq \lambda(D_k) < \infty$.

Wobec powyższego mamy na mocy założenia 3⁰.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap E_k) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} [\lambda(E_1) + \dots + \lambda(E_k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(E_1 + \dots + E_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(D_k) \stackrel{(ii)}{=} \infty = \lambda(A) \end{aligned}$$

W ten sposób został zakończony dowód części L1.

L2 Z 1° λ_1, λ_2 są nieujemnymi addytywnymi funkcjami zbioru określonymi odpowiednio na ciałach zbiorów $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ w przestrzeniach odpowiednio X_1, X_2 .

$$2^\circ \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 * \lambda_2.$$

$$3^\circ K_1 \in \mathcal{X}_1 \wedge 0 < \lambda_1(K_1) < \infty.$$

$$4^\circ K_2 \in \mathcal{X}_2 \wedge 0 < \lambda_2(K_2) < \infty.$$

$$5^\circ K \in \mathcal{X}_1 * \mathcal{X}_2 \wedge K \subset K_1 \times K_2 \wedge \lambda(K) \geq \varepsilon > 0.$$

$$6^\circ M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \alpha_1 : \lambda_2(K_{[\alpha_1]}) \geq \frac{\varepsilon}{2 \lambda_1(K_1)} \right\} \text{ gdzie } K_{[\alpha_1]} \text{ oznacza przekrój zbioru } K \text{ przez punkt } \alpha_1 \in X_1 \text{ (patrz § 176).}$$

$$\text{T} \quad \lambda_1(M_1) \geq \frac{\varepsilon}{2 \lambda_2(K_2)}$$

D Na mocy własności (przek7) z § 176

$$K \in \mathcal{X}_1 * \mathcal{X}_2 \Rightarrow \bigwedge_{\alpha_1 \in X_1} K_{[\alpha_1]} \in \mathcal{X}_2$$

i wobec tego dla każdego $\alpha_1 \in X_1$ istnieje liczba $\lambda_2(K_{[\alpha_1]})$.

Na mocy własności (cp4) z § 174

$$K = \sum_{j=1}^m (A_{1j} \times A_{2j})$$

gdzie

$$\bigwedge_{j \in \{1, \dots, m\}} A_{1j} \in \mathcal{X}_1 \wedge A_{2j} \in \mathcal{X}_2$$

a na mocy rozumowania analogicznego do przeprowadzonego w dowodzie twierdzenia (A) w § 177, wzory (vii) i (xiv), możemy przyjąć, że

$$\sum_{j=1}^m A_{1j} = X_1$$

Zbiory A_{21}, \dots, A_{2m} możemy podzielić na dwie klasy. Do pierwszej zaliczymy te zbiory A_{2j} ($j \in \{1, \dots, m\}$), dla których

$$\lambda_2(A_{2j}) < \frac{\varepsilon}{2 \lambda_1(K_1)}$$

do drugiej - pozostałe. Ponieważ numeracja zbiorów jest tu dowolna, przyjmijmy, że

$$j \in \{1, \dots, q\} \quad \lambda_2(A_{2j}) < \frac{\varepsilon}{2 \lambda_1(K_1)}$$

$$j \in \{q+1, \dots, m\} \quad \lambda_2(A_{2j}) \geq \frac{\varepsilon}{2 \lambda_1(K_1)}$$

Wobec tego

$$M_1 = A_{1,q+1} + \dots + A_{1m} \in \mathcal{K}_1$$

Mamy wobec tego

$$\begin{aligned} \lambda_1(M_1) &= \lambda_1(M_1) + \frac{\varepsilon}{2 \lambda_2(K_2)} - \frac{\varepsilon}{2 \lambda_2(K_2)} = \\ &= \frac{1}{2 \lambda_2(K_2)} \left(2 \sum_{j=q+1}^m \lambda_1(A_{1j}) \lambda_2(K_2) + 2 \frac{\varepsilon}{2 \lambda_1(K_1)} \lambda_1(K_1) - \varepsilon \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2 \lambda_2(K_2)} \left(2 \sum_{j=q+1}^m \lambda_1(A_{1j}) \lambda_2(A_{2j}) + 2 \frac{\varepsilon}{2 \lambda_1(K_1)} \cdot \right. \\ &\cdot \sum_{j=1}^q \lambda_1(A_{1j}) - \varepsilon \left. \right) \geq \frac{1}{2 \lambda_2(K_2)} \left(2 \sum_{j=q+1}^m \lambda_1(A_{1j}) \cdot \lambda_2(A_2) + \right. \\ &+ 2 \sum_{j=1}^q \lambda_1(A_{1j}) \cdot \lambda_2(A_{2j}) - \varepsilon \left. \right) = \frac{1}{2 \lambda_2(K_2)} \left(2 \sum_{j=1}^m \lambda_1(A_{1j}) \cdot \right. \\ &\cdot \lambda_2(A_{2j}) - \varepsilon \left. \right) = \frac{1}{2 \lambda_2(K_2)} (2 \lambda(K) - \varepsilon) \geq \frac{\varepsilon}{2 \lambda_2(K_2)} \end{aligned}$$

Część L2 została tym samym udowodniona.

L3 Z 1° λ_1, λ_2 są nieujemnymi przeliczalnie addytywnymi funkcjami zbioru określonymi odpowiednio na ciałach zbiorów \mathcal{K}_1 i \mathcal{K}_2 w przestrzeniach X_1 i X_2 .

$$2^\circ \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 * \lambda_2.$$

$$\text{T] } \bigwedge_{\substack{B_1 \supset B_2 \supset \dots \\ B_1, B_2, \dots \in \mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 \\ \lambda(B_1) < \infty}} \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = 0 \implies \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(B_j) = 0 \right)$$

D Ponieważ $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, więc na mocy własności (a5) addytywnych funkcji zbioru jest $\lambda(B_1) \geq \lambda(B_2) \geq \dots$. Gdyby zatem nie było prawdą, że $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(B_j) = 0$, to istniałaby taka liczba rzeczywista dodatnia ε , że

$$\bigwedge_{j \in \mathfrak{N}} \lambda(B_j) \geq \varepsilon.$$

Gdyby zatem teza nie była prawdziwa, to byłoby

(iii)

$$\bigvee_{\substack{B_1 \supset B_2 \supset \dots \\ B_1, B_2, \dots \in \mathfrak{K}_1 * \mathfrak{K}_2 \\ \lambda_1(B_1) < \infty}} \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = 0 \wedge \bigwedge_{j \in \mathfrak{N}} 0 < \varepsilon \leq \lambda(B_j) < \infty$$

ponieważ na mocy własności (a5) z założenia $\lambda(B_1) < \infty$ wynika, że

$$\dots \leq \lambda(B_2) \leq \lambda(B_1) < \infty$$

Na mocy własności (cp4) z § 174

$$B_1 = \sum_{k=1}^m (A_{1k} \times A_{2k})$$

gdzie

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, m\}} A_{1k} \in \mathfrak{K}_1 \wedge A_{2k} \in \mathfrak{K}_2$$

i – analogicznie jak w dowodzie części L2 dla zbioru K – można przyjąć, że

$$\sum_{k=1}^m A_{1k} = K_1$$

Niech

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \{k: k \in \{1, \dots, m\} \wedge \lambda_1(A_{1k}) > 0 \wedge \lambda_2(A_{2k}) > 0\}$$

$$K_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in W} A_{1k} \in \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \in W} A_{2k} \in \mathfrak{K}_2$$

Ponieważ

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, m\}} \lambda_1(A_{1k}) \cdot \lambda_2(A_{2k}) = \lambda(A_{1k} \times A_{2k}) \leq \lambda(B_1) < \infty$$

więc

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, m\}} \lambda_1(A_{1k}) < \infty \wedge \lambda_2(A_{2k}) < \infty$$

Zatem

$$0 < \lambda_1(K_1) < \infty \wedge 0 < \lambda_2(K_2) < \infty$$

Ponieważ

$$(iv) \quad \bigwedge_{k \notin W} \lambda(A_{1k} \times A_{2k}) = \lambda_1(A_{1k}) \cdot \lambda_2(A_{2k}) = 0$$

więc

$$\begin{aligned} \lambda(B_1) &= \sum_{k \in W} \lambda(A_{1k} \times A_{2k}) = \\ &= \lambda\left(\sum_{k \in W} (A_{1k} \times A_{2k})\right) \stackrel{(a5)}{\leq} \lambda\left(\left(\sum_{k \in W} A_{1k}\right) \times \left(\sum_{k \in W} A_{2k}\right)\right) = \lambda(K_1 \times K_2) \end{aligned}$$

Przy założeniu (iii) otrzymalibyśmy dla $K = K_1 \times K_2$

$$\lambda(K) \geq \varepsilon > 0$$

Wprowadzimy teraz zbiory

$$(v) \quad \bigwedge_{k \in \mathfrak{K}} H_k \stackrel{\text{def}}{=} B_k \cap K$$

Ponieważ

$$B_1 - K = \sum_{k \notin W} (A_{1k} \times A_{2k})$$

i stąd na mocy (iv)

$$\lambda(B_1 - K) = 0$$

więc

$$\bigwedge_{k \in \mathfrak{K}} \left(\lambda(B_k - K) \stackrel{(a5)}{\leq} \lambda(B_1 - K) \Rightarrow \lambda(B_k - K) = 0 \right)$$

W konsekwencji

$$\bigwedge_{k \in \mathfrak{K}} \lambda(B_k) = \lambda(B_k \cap K) + \lambda(B_k - K) = \lambda(B_k \cap K)$$

czyli

$$\bigwedge_{k \in \mathfrak{K}} \lambda(H_k) = \lambda(B_k) \geq \varepsilon > 0$$

Wprowadźmy zbiory

$$(vi) \quad \bigwedge_{k \in \mathfrak{K}} M_{1k} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \alpha_1 : \lambda_2((H_k)_{[\alpha_1]}) \geq \frac{\varepsilon}{2 \lambda_1(K_1)} \right\} \subset X_1$$

Na mocy udowodnionej już części L2 mamy

$$(vii) \quad \bigwedge_{k \in \mathfrak{K}} \lambda_1(M_{1k}) \geq \frac{\varepsilon}{2 \lambda_2(K_2)}$$

Z definicji (v) wynika, że

$$H_1 \supset H_2 \supset \dots$$

ponieważ $B_1 \supset B_2 \supset \dots$. Wobec tego z definicji (vi) wynika, że

$$M_{11} \supset M_{12} \supset \dots$$

a stąd

$$\lambda_1(M_{11}) \geq \lambda_1(M_{12}) \geq \dots$$

i na mocy (vii)

$$(viii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1(M_{1k}) \geq \frac{\varepsilon}{2 \lambda_2(K_2)} > 0$$

Natomiast z definicji (vi) wynika, że $M_{11} \subset K_1$ i stąd

$$\lambda_1(M_{11}) < \infty$$

Gdyby zatem

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} M_{1k} = 0 \in \mathcal{K}_1$$

wtedy na mocy własności (p8) z § 102 mielibyśmy sprzeczność z (viii). Zatem

$$\bigvee_{x_1 \in \mathcal{K}_1} x_1 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} M_{1k}$$

i tym samym

$$\bigvee_{x_1 \in \mathcal{K}_1} \bigwedge_{k \in \mathcal{N}} x_1 \in M_{1k}$$

Wobec tego

$$\bigwedge_{k \in \mathcal{N}} \infty > \lambda_2(K_2) \geq \lambda_2\left(\bigvee_k (H_k) [x_1]\right) \geq \frac{\varepsilon}{2 \lambda_1(K_1)}$$

i analogicznie dowodzimy, że

$$\bigvee_{x_2 \in \mathcal{K}_2} \bigwedge_{k \in \mathcal{N}} x_2 \in (H_k) [x_1]$$

Wynika stąd

$$\bigvee_{\substack{(x_1, x_2) \\ x_1 \in \mathcal{K}_1, x_2 \in \mathcal{K}_2}} \bigwedge_{k \in \mathcal{N}} (x_1, x_2) \in H_k$$

czyli

$$\bigvee_{(x_1, x_2)} \bigwedge_{k \in \mathcal{K}} (x_1, x_2) \in B_k$$

czyli

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \neq \emptyset$$

wbrew (iii). Zatem założenie (iii) prowadzi do sprzeczności, co kończy dowód części L3.

L4 Z 1° λ_1, λ_2 są nieujemnymi przeliczalnie addytywnymi funkcjami zbioru określonymi odpowiednio na σ -ciałach \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 w przestrzeniach odpowiednio \mathcal{X}_1 i \mathcal{X}_2 .

$$2^\circ \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 * \lambda_2.$$

$$3^\circ \mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2.$$

$$\begin{aligned} \text{T]} \quad & \bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{K} \\ \lambda(A) = \infty}} \left(\bigvee_{\substack{C_1, C_2, \dots \in \mathcal{K} \\ \lambda(C_1), \lambda(C_2), \dots < \infty}} A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \Rightarrow \right. \\ & \Rightarrow \bigvee_{\substack{D_1 \subset D_2 \subset \dots \\ D_1, D_2, \dots \in \mathcal{K} \\ \lambda(D_1), \lambda(D_2), \dots < \infty}} A = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \wedge \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(D_j) = \infty \Big) \end{aligned}$$

D] Jeśli istnieje ciąg $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{K}$ taki, że

$$\lambda(C_1), \lambda(C_2), \dots < \infty \wedge A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$$

to na mocy własności (cp3) z § 174 istnieje ciąg

$$A_1 \times B_1, A_2 \times B_2, \dots \in \mathcal{K}, \text{ gdzie } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}_1 \wedge B_1, B_2,$$

$$\dots \in \mathcal{S}_2,$$

taki, że

$$(ix) \quad \lambda(A_1 \times B_1), \lambda(A_2 \times B_2), \dots < \infty \wedge A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \times B_j)$$

Niech

$$\begin{aligned}
U &\stackrel{\text{def}}{=} \{j : j \in \mathfrak{N} \wedge \lambda_1(A_j) = 0\} \\
V &\stackrel{\text{def}}{=} \{j : j \in \mathfrak{N} \wedge \lambda_1(A_j) > 0 \wedge \lambda_2(B_j) = 0\} \\
W &\stackrel{\text{def}}{=} \{j : j \in \mathfrak{N} \wedge \lambda_1(A_j) > 0 \wedge \lambda_2(B_j) > 0\} \\
G_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in U} A_j \in \mathfrak{S}_1, \lambda_1(G_0) \leq \sum_{j \in U} \lambda_1(A_j) = 0 \\
H_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in V} B_j \in \mathfrak{S}_2, \lambda_2(H_0) \leq \sum_{j \in V} \lambda_2(B_j) = 0 \\
\bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} G_k &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{j \in W \\ j \leq k}} A_j \in \mathfrak{S}_1 \wedge H_k \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{j \in W \\ j \leq k}} B_j \in \mathfrak{S}_2
\end{aligned}$$

Mamy wtedy

$$G_0 \times X_2, X_1 \times H_0, G_1 \times H_1, G_2 \times H_2, \dots \in \mathfrak{X}$$

$$(x) \quad A \subset (G_0 \times X_2 \cup X_1 \times H_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \times H_k))$$

$$(xi) \quad G_1 \subset G_2 \subset \dots \wedge H_1 \subset H_2 \subset \dots$$

$$\lambda(G_0 \times X_2) = \lambda_1(G_0) \cdot \lambda_2(X_2) = 0$$

$$\lambda(X_1 \times H_0) = \lambda_1(X_1) \cdot \lambda_2(H_0) = 0$$

$$\bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} \lambda(G_k \times H_k) = \lambda\left(\left(\bigcup_{\substack{i \in W \\ i \leq k}} A_i\right) \times \left(\bigcup_{\substack{j \in W \\ j \leq k}} B_j\right)\right)_{(kar4)}$$

$$\stackrel{(kar4)}{=} \lambda\left(\bigcup_{\substack{i, j \in W \\ i, j \leq k}} (A_i \times B_j)\right) \leq \sum_{\substack{i, j \in W \\ i, j \leq k}} \lambda(A_i \times B_j) < \infty$$

ponieważ na mocy (ix)

$$\bigwedge_{j \in W} \lambda_1(A_j) < \infty \wedge \lambda_2(B_j) < \infty$$

i wobec tego

$$\bigwedge_{i, j \in W} \lambda(A_i \times B_j) = \lambda_1(A_i) \cdot \lambda_2(B_j) < \infty$$

Wprowadźmy zbiory

$$(xii) \quad \bigwedge_{j \in \mathfrak{N}} D_j \stackrel{\text{def}}{=} A \cap (G_0 \times X_2 \cup X_1 \times H_0 \cup G_j \times H_j) \in \mathfrak{X}$$

Na mocy (x) jest

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$$

Z definicji (xii) i własności (xi) wynika, że

$$D_1 \subset D_2 \subset \dots$$

Ponadto

$$\bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \lambda(D_j) \leq \lambda(G_0 \times X_2 \cup X_1 \times H_0 \cup G_j \times H_j) \leq \lambda(G_0 \times X_2) + \lambda(X_1 \times H_0) + \lambda(G_j \times H_j) = \lambda(G_j \times H_j) < \infty$$

Należy jeszcze pokazać, że $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(D_j) = \infty$. Niech

$$A^* \stackrel{\text{def}}{=} A - (G_0 \times X_2 \cup X_1 \times H_0)$$

$$(xiii) \quad A = A^* + A \cap (G_0 \times X_2 \cup X_1 \times H_0)$$

$$\lambda(A) = \lambda(A^*) + \lambda(A \cap (G_0 \times X_2 \cup X_1 \times H_0))$$

Ale

$$\lambda(A \cap (G_0 \times X_2 \cup X_1 \times H_0)) \leq \lambda(G_0 \times X_2 \cup X_1 \times H_0) \leq \lambda(G_0 \times X_2) + \lambda(X_1 \times H_0) = 0$$

skąd

$$(xiv) \quad \lambda(A \cap (G_0 \times X_2 \cup X_1 \times H_0)) = 0$$

a stąd

$$\lambda(A) = \lambda(A^*) = \infty$$

Na mocy (x) jest ponadto

$$(xv) \quad A^* \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \times H_k)$$

a na mocy własności (cp3) z § 174

$$A^* = \bigcup_{q=1}^p (P_q \times R_q)$$

gdzie

$$P_1, \dots, P_p \in \mathcal{S}_1 \wedge R_1, \dots, R_p \in \mathcal{S}_2$$

Ponieważ $\lambda(A^*) = \infty$, więc

$$\bigvee_{t \in \{1, \dots, p\}} \lambda(P_t \times R_t) = \lambda_1(P_t) \cdot \lambda_2(R_t) = \infty$$

Wobec tego

$$(\lambda_1(P_t) = \infty \wedge \lambda_2(R_t) > 0) \vee (\lambda_1(P_t) > 0 \wedge \lambda_2(R_t) = \infty)$$

Ze względu na symetrię rozpatrujemy tylko pierwszy przypadek. Mamy na mocy (xv)

$$(xvi) \quad P_t \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \quad \wedge \quad R_t \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$$

Wprowadźmy zbiory

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} M_k \stackrel{\text{def}}{=} G_k \cap P_t \wedge N_k \stackrel{\text{def}}{=} H_k \cap R_t$$

Z uwagi na (xi) mamy

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots \wedge N_1 \subset N_2 \subset \dots$$

a na mocy (xvi) jest

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = P_t \in \mathcal{S}_1 \wedge \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k = R_t \in \mathcal{S}_2$$

Zatem na mocy własności (p7) z § 102

$$(xvii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1(M_k) = \infty \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_2(N_k) > 0$$

Ale

$$\begin{aligned} \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} D_j &\supset A^* \cap (G_0 \times H_2 \cup H_1 \times G_0 \cup G_j \times H_j) = A^* \cap (G_j \times H_j) \supset \\ &\supset (P_t \times R_t) \cap (G_j \times H_j) \stackrel{(\text{kar2})}{=} (P_t \cap G_j) \times (R_t \cap H_j) = M_j \times N_j \end{aligned}$$

wobec czego

$$\bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \lambda(D_j) \stackrel{(a5)}{\geq} \lambda(M_j \times N_j) = \lambda_1(M_j) \cdot \lambda_2(N_j)$$

i na mocy (xvii)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(D_j) = \infty$$

W ten sposób część L4 została udowodniona.

L5] Z] 1^0 μ_1, μ_2 są miarami określonymi odpowiednio na σ -ciałach \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 w przestrzeniach odpowiednio X_1 i X_2 .

$$2^0 \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1 * \mu_2.$$

$$3^0 \mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2.$$

T] λ jest przeliczalnie addytywna na ciele zbiorów \mathcal{K} .

D] Na mocy L3 i L4 funkcja zbioru λ spełnia założenia lematu L1 i wobec tego jest przeliczalnie addytywna na ciele zbiorów \mathcal{K} .

L6] Dla danych miar μ_1, μ_2 określonych odpowiednio na σ -ciałach \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 w przestrzeniach odpowiednio X_1 i X_2 istnieje dokładnie jedna miara produktowa μ określona na σ -ciele produktowym $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ w przestrzeni $X_1 \times X_2$ i spełniająca warunek

$$(xviii) \quad \bigwedge_{A_1 \in \mathcal{S}_1 \wedge A_2 \in \mathcal{S}_2} \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

D] Funkcja $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1 * \mu_2$ jest na mocy twierdzenia (A) z § 176 jedyną nieujemną addytywną funkcją zbioru określoną na ciele produktowym $\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2$ w przestrzeni $X_1 \times X_2$ i spełniającą warunek (xviii). Na mocy L5 λ jest przeliczalnie addytywna na ciele zbiorów $\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2$. Wobec tego na mocy twierdzenia § 112 istnieje dokładnie jedna miara μ określona na najmniejszym σ -ciele zawierającym ciało zbiorów $\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2$ i taka, że

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2} \mu(A) = \lambda(A)$$

Ponieważ σ -ciało zbiorów jest ciałem zbiorów, więc

$$\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1^{\sigma} \otimes \mathcal{S}_2$$

Wobec tego najmniejszym σ -ciałem zawierającym $\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2$ jest $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$. W ten sposób dowód części L6 został zakończony.

L7] Twierdzenie (A)

D] Na mocy L6 twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 2$. Załóżmy, że jest prawdziwe dla $n = k$. Niech μ^* będzie jedyną miarą produktową określoną na σ -ciele produktowym $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_k$ w przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_k$ i spełniającą warunek

$$(xix) \quad \bigwedge_{A_1 \in \mathcal{S}_1 \dots \wedge A_k \in \mathcal{S}_k} \mu^*(A_1 \times \dots \times A_k) = \mu_1(A_1) \cdot \dots \cdot \mu_k(A_k)$$

Wobec tego istnieje na mocy L6 dokładnie jedna miara produktowa określona na σ -ciele produktowym $(\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_k) \otimes \mathcal{S}_{k+1}$, czyli - na mocy własności ($\sigma p2$) z § 175 - na σ -ciele produktowym $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{k+1}$ w przestrzeni $(X_1 \times \dots \times X_k) \times X_{k+1}$ czyli $X_1 \times \dots \times X_{k+1}$ i spełniającą warunek

$$(xx) \quad \bigwedge_{A \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_k} \bigwedge_{A_{k+1} \in \mathcal{S}_{k+1}} \mu(A \times A_{k+1}) = \mu^*(A) \cdot \mu_{k+1}(A_{k+1})$$

Ze wzorów (xix) i (xx) wynika, że μ jest miarą spełniającą warunek

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{A_1 \in \mathcal{S}_1 \wedge \dots \wedge A_{k+1} \in \mathcal{S}_{k+1}} \mu(A_1 \times \dots \times A_{k+1}) = \\ & = \mu_1(A_1) \cdot \dots \cdot \mu_{k+1}(A_{k+1}) \end{aligned}$$

Jednoznaczność miary produktowej μ wynika z faktu, że funkcja ta ograniczona do ciała zbiorów $\mathcal{S}_1 * \dots * \mathcal{S}_{k+1}$ jest na mocy twierdzenia (A) z § 177 jednoznacznie określona i przeliczalnie addytywna na tym ciecie zbiorów, wobec czego twierdzenie § 112 gwarantuje jej jednoznaczność na σ -ciele produktowym $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{k+1}$. W ten sposób został zakończony krok indukcyjny i dowód całego twierdzenia.

Miarę produktową μ będziemy również pisać w postaci $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$.

Twierdzenie (B)

$$(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_m) \otimes (\mu_{m+1} \otimes \dots \otimes \mu_n) = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$$

D] Analogiczny do dowodu twierdzenia (B) z § 177.

Twierdzenie (C)

Dla danych miar μ_1, \dots, μ_n określonych odpowiednio na σ -ciach $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ w przestrzeniach odpowiednio X_1, \dots, X_n miara produktowa μ jest dana wzorem

$$\begin{aligned} (141) \quad & \bigwedge_{A \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n} \mu(A) = \\ & = \bigcup_{\substack{k=1 \\ A_{1k} \in \mathcal{S}_1 \wedge \dots \wedge A_{nk} \in \mathcal{S}_n}}^{\infty} \inf (A_{1k} \times \dots \times A_{nk}) \supset A \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_{1k}) \cdot \dots \cdot \mu_n(A_{nk}) \end{aligned}$$

D] Z dowodu twierdzenia § 112 wynika, że

$$\mu(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \inf_{B_k \supset A} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k)$$

$$B_1, B_2, \dots \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$$

gdzie $\lambda = \mu_1 * \dots * \mu_n$. Na mocy własności (cp4) z § 174 można ciąg zbiorów B_1, B_2, \dots zastąpić ciągiem zbiorów $A_{11} \times \dots \times A_{n1}, A_{12} \times \dots \times A_{n2}, \dots$ takim, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_{1k} \times \dots \times A_{nk}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_{1k}) \cdot \dots \cdot \mu_n(A_{nk})$$

Twierdzenie (D)

Z] 1° μ jest miarą produktową miar μ_1, \dots, μ_n określonych odpowiednio na σ -ciałach $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ w przestrzeniach odpowiednio X_1, \dots, X_n .

2° $A \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$.

T] A jest zbiorem miary μ półskończonej \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \bigvee_{A_{1k} \in \mathcal{S}_1 \wedge \dots \wedge A_{nk} \in \mathcal{S}_n} \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{1k} \times \dots \times A_{nk}) \supset A \wedge \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(A_{1k}) \cdot \dots \cdot \mu_n(A_{nk}) < \infty$$

D] Z twierdzenia § 112 wynika, że

A jest zbiorem miary półskończonej \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \bigvee_{B_1, B_2, \dots \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A \wedge \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \lambda(B_k) < \infty$$

gdzie $\lambda = \mu_1 * \dots * \mu_n$. Na mocy własności (cp4) z § 174 można ciąg zbiorów B_1, B_2, \dots zastąpić ciągiem zbiorów $A_{11} \times \dots \times A_{n1}, A_{12} \times \dots \times A_{n2}, \dots$ takim, że

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \lambda(A_{1k} \times \dots \times A_{nk}) = \mu_1(A_{1k}) \cdot \dots \cdot \mu_n(A_{nk}) < \infty$$

Twierdzenie (E)

Z] 1^0 $\omega_1, \dots, \omega_n$ są miarami Lebesgue'a ograniczonymi do σ -ciał zbiorów borelowskich $\mathcal{B}_{p_1}, \dots, \mathcal{B}_{p_n}$ w przestrzeniach euklidesowych odpowiednio $\mathbb{R}^{p_1}, \dots, \mathbb{R}^{p_n}$.

2^0 $\omega = \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n$.

T] ω jest miarą Lebesgue'a ograniczoną do σ -ciała zbiorów borelowskich $\mathcal{B}_{p_1 + \dots + p_n}$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{p_1 + \dots + p_n}$.

D] Na mocy własności ($\sigma p 3$) z § 175 jest $\mathcal{B}_{p_1 + \dots + p_n} = \mathcal{B}_{p_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{p_n}$.

Jak wynika z warunku 2^0 miara ω pokrywa się z miarą Lebesgue'a na zbiorze wszystkich przedziałów. Jeśli A i B są przedziałami, to $A \cap B$ też jest przedziałem. Ponieważ w przypadku, gdy $\omega(B) < \infty$, mamy na mocy własności (m9) miary

$$\omega(A \cup B) = \omega(A) + \omega(B - A) = \omega(A) + \omega(B) - \omega(A \cap B),$$

a w przypadku $\omega(B) = \infty$ jest $\omega(A \cup B) = \infty$ i analogiczne wzory mamy dla miary Lebesgue'a, wobec tego miara ω pokrywa się z miarą Lebesgue'a w klasie skończonych sum przedziałów. Ponieważ

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \cup \dots \cup A_k) \wedge A_1 \subset (A_1 \cup A_2) \subset (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \subset \dots$$

więc - na mocy własności (m7) miary - miara ω pokrywa się z miarą Lebesgue'a również w klasie przeliczalnych sum przedziałów, skąd na mocy twierdzenia § 92 również w klasie wszystkich zbiorów otwartych, a na mocy własności (m8) miary, także w klasie ograniczonych zbiorów typu G_δ . Niech

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} P_k = \left((-k, \dots, -k); (k, \dots, k) \right)$$

i niech H będzie dowolnym zbiorem typu G_δ nieograniczonym. Niech $M_k = H \cap P_k$ dla $k = 1, 2, \dots$. Zbiory M_1, M_2, \dots są wszystkie zbiorami typu G_δ ograniczonymi, a ponadto

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} M_k = H$$

Wobec tego na mocy własności (m7) miara ω pokrywa się z miarą Lebesgue'a w klasie wszystkich zbiorów typu G_δ .

Na mocy twierdzenia (A) z § 171 dla każdego zbioru A miary

Lebesgue'a zero istnieje taki zbiór H typu G_δ , że $A \subset H$ i H ma miarę Lebesgue'a zero. Wykazaliśmy, że również $\omega(H) = 0$. Wobec tego dla każdego zbioru borelowskiego B o mierze Lebesgue'a zero jest również $\omega(B) = 0$.

Na mocy tegoż twierdzenia (A) z § 171 dla każdego zbioru borelowskiego A istnieje taki zbiór B , że $A + B = H$, gdzie B ma miarę Lebesgue'a zero, a zbiór H jest typu G_δ , a więc borelowski. Zbiór B jest wtedy też borelowski, gdyż $B = H - A$. Ponieważ

$$\omega(A) + \omega(B) = \omega(H) \Rightarrow \omega(A) = \omega(H) - \omega(B) = \omega(H)$$

więc miara ω pokrywa się z miarą Lebesgue'a w klasie wszystkich zbiorów borelowskich, co było do dowiedzenia.

§ 179. Wahanie funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej

Niech f będzie funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej, skończoną, określoną w przedziale $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$. Niech x_0, \dots, x_n będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych takim, że

$$(*) \quad a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

Niech

$$U^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{j : j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \wedge f(x_{j+1}) \geq f(x_j)\}$$

$$U^- \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots, n-1\} - U^+ = \{j : j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \wedge f(x_{j+1}) < f(x_j)\}$$

Wahaniem górnym funkcji f na przedziale $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ nazywamy liczbę

$$v_{f, \langle a; b \rangle}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b} \sum_{j \in U^+} (f(x_{j+1}) - f(x_j))$$

Wahaniem dolnym funkcji f na przedziale $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ nazywamy liczbę

$$v_{f, \langle a; b \rangle}^- \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b} \sum_{j \in U^-} (f(x_j) - f(x_{j+1}))$$

Wahaniem bezwzględnym funkcji f na przedziale $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ nazywamy liczbę