

POLSKA AKADEMIA NAUK
CENTRUM OBLICZENIOWE

MIECZYŚLAW WARMUS

WYKŁADY Z PROBABILISTYKI

Tom II

WARSZAWA 1973
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

POLSKA AKADEMIA NAUK
CENTRUM OB LICZENIOWE

MIECZYSLAW WARMUS

WYKLADY Z PROBABILISTYKI

Tom II



WARSZAWA 1973
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Celem opracowania, które ukaże się w kilku tomach, jest podanie podstaw teoretycznych rachunku prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych w formie na tyle rozbudowanej, aby całość mogła być przyswojona nie tylko przez matematyków, ale również przez wszystkich praktyków, którzy ze względu na liczne zastosowania probabilistyki chcieliby opanować ich teoretyczne podstawy.

Tom II opracowania zamiera materiał przedstawiony przez autora na wykładach, które odbywały się w Centrum Obliczeniowym PAN w latach 1971 i 1972. Początkowo rachunek prawdopodobieństwa miał być zawarty w dwu tomach, jednak ze względu na dużą objętość materiału został on rozdzielony na 5 tomów, z których ostatni ukaże się później.

Adres autora:

prof. dr Mieczysław Warmus
ul. Darwina 18 m. 93
03-488 Warszawa

Nr inv. 19472

REDAKTOR WYDAWNICZY
CENTRUM OBLICZENIOWEGO PAN

Jan Lipski

Printed in Poland

Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Oddział w Łodzi 1973

Wydanie I. Nakład 1000 + 120 egz. Ark. wyd. 19,00. Ark. druk. 28,00.
Papier offset. kl. III. 80 g. 70 × 100. Podpisano do druku 7.XII. 1973 r.
Druk ukończono w grudniu 1973 r. Zam. 68. T-5. Cena zł 60,-

Zakład Graficzny Wydawnictw Naukowych
Łódź, ul. Żwirki 162

IV. UZUPEŁNIENIA TEORETYCZNE

§ 160. Twierdzenie

- Z] 1° \mathcal{K} jest ciałem zbiorów ustalonej przestrzeni X
 2° \mathcal{S} jest najmniejszą klasą zbiorów przestrzeni X spełniającą warunki:

$$(*) \quad \mathcal{K} \subset \mathcal{S}$$

$$(**) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S} \wedge A_1 \subset A_2 \subset \dots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$$

$$(***) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S} \wedge A_1 \supset A_2 \supset \dots \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$$

T] \mathcal{S} jest najmniejszym σ -ciałem zawierającym ciało zbiorów \mathcal{K} .

D] Wykażemy najpierw, że istnieje najmniejsza klasa zbiorów spełniająca warunki $(*)$ – $(***)$. W tym celu oznaczmy przez Ω zbiór wszystkich klas $|\mathcal{T}|$ spełniających te warunki. Klasa ta nie jest pusta, gdyż zawiera klasę wszystkich podzbiorów przestrzeni X . Wykażemy, że klasa

$$(i) \quad \mathcal{T}^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\mathcal{T} \in \Omega} \mathcal{T}$$

też spełnia te warunki. Istotnie,

$$\bigwedge_{\mathcal{T} \in \Omega} \mathcal{K} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{K} \subset \bigcap_{\mathcal{T} \in \Omega} \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{K} \subset \mathcal{T}^*$$

Jeśli $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{T}^* \wedge A_1 \subset A_2 \subset \dots$, to

$$\begin{aligned} \left(\bigwedge_{\mathcal{T} \in \Omega} A_1, A_2, \dots \in \mathcal{T} \wedge A_1 \subset A_2 \subset \dots \right) &\Rightarrow \bigwedge_{\mathcal{T} \in \Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{T} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \bigcap_{\mathcal{T} \in \Omega} \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{T}^* \end{aligned}$$

Analogicznie wykazujemy, że klasa \mathcal{T}^* spełnia warunek $(***)$. Wzór (i) gwarantuje, że \mathcal{T}^* jest najmniejszą klasą spełniającą warunki $(*)$, $(**)$, $(***)$. Zatem $\mathcal{S} = \mathcal{T}^*$.

Niech dla dowolnego zbioru $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$

$$(ii) \quad \mathcal{M}(\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A : A, A^c, A \cup B, A \cup B^c, A^c \cup B, A^c \cup B^c \in \mathcal{S}\}$$

Z definicji wynika, że

$$\bigwedge_{B \in \mathcal{K}} \mathcal{K} \subset \mathcal{M}(B)$$

a także na mocy (**) i (***)

$$(iii) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}(B) \wedge A_1 \subset A_2 \subset \dots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}(B)$$

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}(B) \wedge A_1 \supset A_2 \supset \dots \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}(B)$$

wobec czego klasa $\mathcal{M}(B)$ dla $B \in \mathcal{K}$ spełnia warunki (*), (**), (***) i

$$(iv) \quad \bigwedge_{B \in \mathcal{K}} \mathcal{S} \subset \mathcal{M}(B).$$

Ale z definicji (ii) wynika, że dla $B \in \mathcal{K}$

$$A \in \mathcal{M}(B) \Rightarrow B \in \mathcal{M}(A)$$

wobec czego

$$A \in \mathcal{S} \wedge B \in \mathcal{K} \xRightarrow{(iv)} A \in \mathcal{M}(B) \Rightarrow B \in \mathcal{M}(A)$$

czyli

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{S}} (B \in \mathcal{K} \Rightarrow B \in \mathcal{M}(A))$$

skąd

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{S}} \mathcal{K} \subset \mathcal{M}(A) \xRightarrow{(iii)} \bigwedge_{A \in \mathcal{S}} \mathcal{S} \subset \mathcal{M}(A)$$

Ponieważ z definicji jest

$$\mathcal{M}(A) \subset \mathcal{S}$$

więc otrzymujemy

$$(v) \quad \bigwedge_{A \in \mathcal{S}} \mathcal{S} = \mathcal{M}(A)$$

Wykażemy teraz, że klasa \mathcal{S} jest ciałem zbiorów. Warunek (*) implikuje, że klasa \mathcal{S} spełnia warunek (x1) dla ciał zbiorów. Dla dowolnego zbioru $B \in \mathcal{S}$ mamy dalej

$$A \in \mathcal{S} \xRightarrow{(v)} A \in \mathcal{M}(B) \xRightarrow{(iv)} A^c \in \mathcal{M}(B) \xRightarrow{(v)} A^c \in \mathcal{S}$$

Klasa \mathcal{S} spełnia zatem warunek ($\kappa 2$) dla ciał zbiorów. Mamy wreszcie na mocy (v).

$$\bigwedge_{A, B \in \mathcal{S}} A \in \mathcal{K}(B) \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \bigwedge_{A, B \in \mathcal{S}} A \cup B \in \mathcal{S}$$

czyli klasa \mathcal{S} spełnia również warunek ($\kappa 3$) i jest ciałem zbiorów.

Niech teraz $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$. Ponieważ

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \cup \dots \cup A_k)$$

a na mocy tego, że \mathcal{S} jest ciałem zbiorów, mamy

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} A_1 \cup \dots \cup A_k \in \mathcal{S} \wedge A_1 \subset (A_1 \cup A_2) \subset (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \subset \dots$$

więc na mocy (**)

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$$

Klasa \mathcal{S} spełnia tym samym warunek ($\sigma 3$) dla σ -ciał. Ponieważ warunek ($\sigma 1$) jest identyczny z warunkiem ($\kappa 1$), a warunek ($\sigma 2$) z warunkiem ($\kappa 2$), więc \mathcal{S} jest σ -ciałem, zawierającym ciało zbiorów \mathcal{K} .

Jeśli symbolem \mathcal{S}^* oznaczmy najmniejsze σ -ciało zawierające klasę \mathcal{K} , to

$$(vi) \quad \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$$

Ale na mocy własności ($\sigma 3$) i (s6) σ -ciała \mathcal{S}^* jest klasą zbiorów spełniającą warunki (*), (**), (***), wobec czego

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^*$$

skąd uwzględniając (vi) mamy

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$$

co oznacza prawdziwość dowodzonego twierdzenia.

§ 161. Twierdzenie

G jest zbiorem otwartym niepustym przestrzeni metrycznej $X \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{x_0 \in G \neq \emptyset} \bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \{x : |x - x_0| < \varepsilon\} \subset G$$

D) Wykażemy najpierw, że

G jest zbiorem otwartym niepustym $\Rightarrow \bigwedge_{x_0 \in G} \bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \{x : |x - x_0| < \varepsilon\} \subset G$.

Gdyby tak nie było, to byłoby

$$\text{czyli } \bigvee_{x_0 \in G} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{x \in X} |x - x_0| < \varepsilon \wedge x \in G^c$$

$$\bigvee_{x_0 \in G} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{x_n \in X} |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge x_n \in G^c$$

Byłoby wtedy

$$x_n \rightarrow x_0$$

a ponieważ zbiór G^c jest na mocy twierdzenia § 55 domknięty, więc byłoby $x_0 \in G^c$, co jest sprzeczne z faktem, że $x_0 \in G$.

Wykażemy teraz implikację odwrotną. Niech

$$(*) \quad \bigwedge_{x_0 \in G \neq \emptyset} \bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \{x : |x - x_0| < \varepsilon\} \subset G$$

Gdyby zbiór G nie był otwarty, to na mocy twierdzenia § 56 zbiór G^c nie byłby domknięty. Wobec tego istniałby ciąg (x_n) taki, że

$$\left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n \in G^c \right) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \wedge x_0 \in G$$

czyli

$$\bigvee_{x_0 \in G} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{x_n \in X} (|x_n - x_0| < \varepsilon \wedge x_n \in G^c)$$

co byłoby zaprzeczeniem założenia (*). Wobec tego zbiór G musi być otwarty.

§ 162. Twierdzenie

- Z] 1° X jest przestrzenią metryczną.
 2° $B \subset X \wedge B \neq \emptyset$.
 3° \mathcal{F} jest klasą wszystkich zbiorów domkniętych przestrzeni X .
 4° \mathcal{F}_B jest klasą wszystkich zbiorów domkniętych przestrzeni B .
 5° \mathcal{G} jest klasą wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni X .
 6° \mathcal{G}_B jest klasą wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni B .
T] $\mathcal{F}|B = \mathcal{F}_B$, $\mathcal{G}|B = \mathcal{G}_B$ (patrz § 25).

D] Wykażemy najpierw, że

$$\mathcal{F} \upharpoonright B \subset \mathcal{F}_B$$

Niech $A \in \mathcal{F} \upharpoonright B$, czyli

$$\bigvee_{F \in \mathcal{F}} A = F \cap B$$

Ponieważ $A \subset F$, więc

$$(*) \quad \bigwedge_{x_1, x_2, \dots \in A} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \Rightarrow x \in F \right).$$

Jeśli $x \notin B$, to ciąg (x_k) z definicji nie jest zbieżny w przestrzeni B . Jeśli natomiast $x \in B$, to wobec $(*)$ jest $x \in F \cap B$, czyli $x \in A$, co dowodzi, że zbiór A jest domknięty w przestrzeni B , czyli $A \in \mathcal{F}_B$. Ze względu na dowolność zbioru A otrzymujemy stąd

$$(**) \quad \mathcal{F} \upharpoonright B \subset \mathcal{F}_B$$

Wykażemy teraz, że

$$\mathcal{F}_B \subset \mathcal{F} \upharpoonright B$$

Niech $A \in \mathcal{F}_B$, czyli

$$(***) \quad A = \left\{ x : \bigvee_{x_1, x_2, \dots \in A} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \in B \right\}$$

Jeśli przez \bar{A} oznaczymy domknięcie zbioru A w przestrzeni X , to

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left\{ x : \bigvee_{x_1, x_2, \dots \in A} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \right\} = \\ &= \left\{ x : \bigvee_{x_1, x_2, \dots \in A} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \in B \right\} + \\ &+ \left\{ x : \bigvee_{x_1, x_2, \dots \in A} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \notin B \right\} \stackrel{(***)}{=} A + D \end{aligned}$$

gdzie

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : \bigvee_{x_1, x_2, \dots \in A} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \notin B \right\}, D \cap B = \emptyset$$

Wobec tego

$$\bar{A} \cap B = A \cap B + D \cap B = A \cap B = A$$

Ponieważ \bar{A} jest zbiorem domkniętym przestrzeni X , a A był dowolnym zbiorem klasy \mathcal{F}_B , więc każdy zbiór klasy \mathcal{F}_B jest zbiorem postaci $F \cap B$, gdzie $F \in \mathcal{F}$, czyli należy do klasy \mathcal{F}_B , skąd

$$\mathcal{F}_B \subset \mathcal{F} \mid B$$

i na mocy (***) teza pierwsza dowodzonego twierdzenia.

Wykażemy teraz, że

$$(o) \quad \mathcal{G} \mid B \subset \mathcal{G}_B$$

Niech $A \in \mathcal{G} \mid B$ czyli

$$\bigvee_{G \in \mathcal{G}} A = G \cap B$$

Wtedy

$$B - A = B - G \cap B = B - G = B \cap G^c$$

Ponieważ G^c jest zbiorem domkniętym przestrzeni X , więc na mocy tezy pierwszej, już udowodnionej, zbiór $B \cap G^c$, czyli zbiór $B - A$ jest domknięty w przestrzeni B , a na mocy twierdzenia § 56 zbiór A jest zbiorem otwartym przestrzeni B , czyli $A \in \mathcal{G}_B$. Ze względu na dowolność zbioru $A \in \mathcal{G} \mid B$ otrzymujemy (o).

Wykażemy teraz, że - odwrotnie -

$$(oo) \quad \mathcal{G}_B \subset \mathcal{G} \mid B$$

Niech $A \in \mathcal{G}_B$. Wobec tego $B - A$ jest zbiorem domkniętym przestrzeni B i na mocy części już udowodnionej istnieje taki zbiór domknięty F przestrzeni X , że

$$B - A = F \cap B$$

skąd

$$A = B - (B - A) = B - F \cap B = B - F = B \cap F^c$$

Ponieważ F^c jest zbiorem otwartym przestrzeni X , więc $A \in \mathcal{G} \mid B$. Ze względu na dowolność zbioru $A \in \mathcal{G}_B$ otrzymujemy (oo) a następnie na mocy (o) tezę drugą dowodzonego twierdzenia. W ten sposób dowód został zakończony.

§ 163. Twierdzenie

- [Z] 1^o Dana jest przestrzeń metryczna X .
 2^o \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni X .
 3^o $D \in \mathcal{B} \wedge D \neq \emptyset$.
 4^o \mathcal{D} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni D .
 [T] $\mathcal{B} \mid D = \mathcal{D}$.

D] Na mocy twierdzenia § 26 $\mathcal{B}|D$ jest σ -ciałem przestrzeni D .

Ponieważ \mathcal{B} zawiera wszystkie zbiory otwarte przestrzeni X , więc na mocy twierdzenia § 162 klasa $\mathcal{B}|D$ zawiera wszystkie zbiory otwarte przestrzeni D . Ponieważ z definicji \mathcal{D} jest najmniejszym σ -ciałem przestrzeni D zawierającym wszystkie jej zbiory otwarte, więc

$$(*) \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{B}|D$$

Niech \mathcal{K} będzie klasą wszystkich takich zbiorów $A \subset X$, że $A \cap D \in \mathcal{D}$. Wykażemy, że \mathcal{K} jest σ -ciałem przestrzeni X . Klasa \mathcal{K} nie jest pusta, gdyż D jako cała przestrzeń jest swym zbiorem borelowskim (patrz § 65) i wobec tego

$$D \cap D = D \in \mathcal{D} \Rightarrow D \in \mathcal{K}$$

Tym samym klasa \mathcal{K} spełnia warunek (61) dla σ -ciała.

Jeśli $A \in \mathcal{K}$, czyli $A \cap D \in \mathcal{D}$, to biorąc pod uwagę, że \mathcal{D} jest σ -ciałem przestrzeni D , mamy

$$A^c \cap D = D - A = D - A \cap D \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{K}$$

Zatem klasa \mathcal{K} spełnia także warunek (62) dla σ -ciała.

Jeśli $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{K}$, czyli $A_1 \cap D, A_2 \cap D, \dots \in \mathcal{D}$, to

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \cap D = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap D) \in \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{K}$$

Klasa \mathcal{K} spełnia zatem również warunek (63) i jest σ -ciałem przestrzeni X .

Klasa \mathcal{K} zawiera wszystkie zbiory otwarte przestrzeni X , ponieważ dla każdego zbioru G otwartego w przestrzeni X zbiór $G \cap D$ jest na mocy twierdzenia § 162 zbiorem otwartym przestrzeni D , a więc $G \cap D \in \mathcal{D}$. Zatem na mocy definicji σ -ciała zbiorów borelowskich przestrzeni X

$$(**) \quad \mathcal{B} \subset \mathcal{K}$$

Ale z definicji

$$\mathcal{K}|D \subset \mathcal{D}$$

i wobec (**)

$$\mathcal{B}|D \subset \mathcal{D}$$

skąd na mocy (*) otrzymujemy tezę twierdzenia.

§ 164. Twierdzenie

- Z] 1^o Dana jest przestrzeń metryczna X .
 2^o \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni X .
 3^o $D \in \mathcal{B} \wedge D \neq \emptyset$.
 4^o \mathcal{D} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni D .
T] \mathcal{D} jest klasą wszystkich zbiorów borelowskich przestrzeni X zawartych w D .
D] Jeśli $A \in \mathcal{D}$, to na mocy twierdzenia § 163 istnieje taki zbiór B borelowski w przestrzeni X , że $A = B \cap D$, skąd $A \in \mathcal{B} \wedge A \subset D$.
 Jeśli - odwrotnie - $A \in \mathcal{B} \wedge A \subset D$, to z uwagi na równość $A = A \cap D$ jest $A \in \mathcal{B}/D = \mathcal{D}$.

§ 165. Obrazy i przeciwobrazy zbiorów i ich klas

W niniejszym paragrafie uściślimy pojęcia obrazów i przeciwobrazów podane w § 7.

Niech będą dane dwie przestrzenie X i Y oraz funkcja τ o dziedzinie $T \subset X$ i przeciwdziedzinie $U \subset Y$.

Obrazem dowolnego zbioru $A \subset T$ nazwalimy zbiór

$$(100) \quad \tau(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{y : y = \tau(x) \wedge x \in A\} \subset U$$

Z tej definicji wynika, że

$$(101) \quad x \in A \Rightarrow \tau(x) \in \tau(A)$$

ale nie zawsze jest na odwrót, gdyż może się zdarzyć, że na przykład

$$(102) \quad \bigvee_{A_1, A_2 \subset T} \tau(A_1) = \tau(A_2) \wedge A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$$

jak w przypadku funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej $c(x) = x^2$ dla $A_1 = \langle -2; -1 \rangle$ i $A_2 = \langle 1; 2 \rangle$.

Ze wzoru (100) wynika, że

$$U = \tau(T)$$

Zgodnie z powyższą symboliką funkcję τ można traktować jako funkcję zbioru, której dziedziną jest klasa \mathcal{T} wszystkich podzbiorów zbioru T , a przeciwdziedziną klasa \mathcal{U} wszystkich podzbiorów zbioru U , z założeniem, że obrazem zbioru jednoelementowego jest zawsze zbiór jednoelementowy i umową, że