

W ten sposób otrzymujemy na przykład wzory

$$(229) \quad \zeta_m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}, \quad \zeta_m^4 = \frac{m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)}{30}$$

Postępując podobnie jak poprzednio z wariancją  $\mu_2$  obliczamy dla naszego rozkładu

$$\mu_3 = 0, \quad \mu_4 = \frac{h^4}{240} (m^2-1)(3m^2-7)$$

skąd na mocy wzorów (206) i (207) współczynniki asymetrii i spłaszczenia są równe

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = -\frac{6(m^2+1)}{5(m^2-1)}$$

Funkcja charakterystyczna ma postać

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{m} \left( e^{ix_1 t} + e^{i(x_1+h)t} + \dots + e^{i(x_1+(m-1)h)t} \right) = \\ &= \frac{1}{m} e^{ix_1 t} \left( 1 + e^{iht} + (e^{iht})^2 + \dots + (e^{iht})^{m-1} \right) = \\ &= \frac{1}{m} e^{ix_1 t} \frac{1 - e^{imht}}{1 - e^{iht}} \end{aligned}$$

Entropia jako entropia rozkładu równomiernego jest równa  $\log_2 m$ .

## § 242. Rozkład binomialny, czyli Bernoulliego

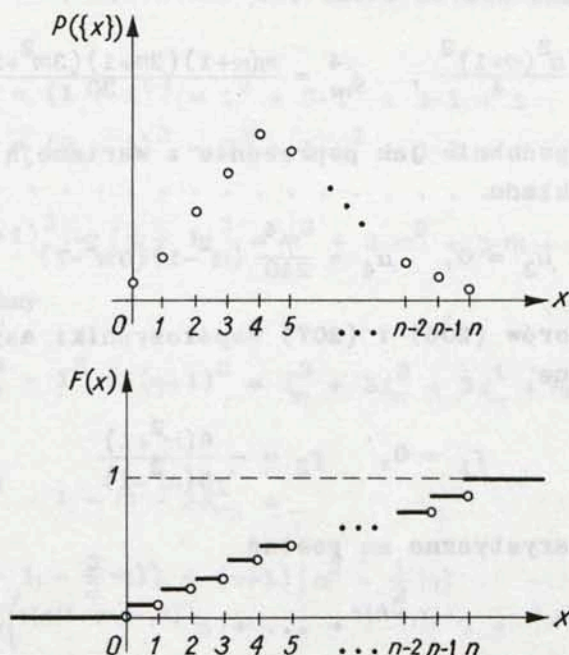
Rozkładem binomialnym albo rozkładem Bernoulliego, nazywamy rozkład dyskretny, dla którego

$$x_k = k \wedge p_k = P(\{x_k\}) = b(k; n, p) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

gdzie  $0 < p < 1$ . (Por. schemat Bernoulliego, § 154).

Dystrybuanta takiego rozkładu jest równa

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \sum_{k=1}^m \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{dla } m < x \leq m+1, \quad m = 0, 1, \dots, n-1 \\ 1 & \text{dla } x > n \end{cases}$$



Obliczymy wartość średnią rozkładu binomialnego

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{n!}{k! (n-k)!} \rho^k (1-\rho)^{n-k} = \\
 &= \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n!}{k! (n-k)!} \rho^k (1-\rho)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! (n-k)!} \rho^k (1-\rho)^{n-k} = \\
 &= n\rho \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} \rho^{k-1} (1-\rho)^{n-k} \quad r = k-1 \\
 &= n\rho \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \rho^r (1-\rho)^{(n-1)-r} = n\rho
 \end{aligned}$$

ponieważ z dwumianu Newtona jest

$$\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \rho^r (1-\rho)^{(n-1)-r} = [\rho + (1-\rho)]^{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \geq 1 \\ 0 & \text{dla } n = 0 \end{cases}$$



Obliczymy teraz wariancję rozkładu binomialnego.

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &= \sum_{k=0}^n (k - np)^2 \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} = \sum_{k=0}^n (k^2 - 2knp + n^2 \rho^2) \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} = \\
 &= \sum_{k=0}^n \left[ k(k-1) - (2np-1)k + n^2 \rho^2 \right] \frac{n!}{k! (n-k)!} \rho^k (1-\rho)^{n-k} = \\
 &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \frac{n!}{k! (n-k)!} \rho^k (1-\rho)^{n-k} - \\
 &\quad - (2np-1) \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k! (n-k)!} \rho^k (1-\rho)^{n-k} + \\
 &\quad + n^2 \rho^2 \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \rho^k (1-\rho)^{n-k} = \\
 &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{n(n-1) \cdot (n-2)!}{k(k-1) \cdot (k-2)! (n-k)!} \rho^k (1-\rho)^{n-k} \\
 &\quad - (2np-1) \sum_{k=1}^n k \frac{n \cdot (n-1)!}{k(k-1)! (n-k)!} \rho^k (1-\rho)^{n-k} + \\
 &\quad + n^2 \rho^2 \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \rho^k (1-\rho)^{n-k} \quad \begin{matrix} r=k-2 \\ t=k-1 \end{matrix} \\
 &= n(n-1) \rho^2 \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n-2}{r} \rho^r (1-\rho)^{(n-2)-r} - \\
 &\quad - (2np-1) np \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} \rho^t (1-\rho)^{(n-1)-t} + n^2 \rho^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} =
 \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} n(n-1)\rho^2 - (2np-1)n\rho + n^2\rho^2 & \text{dla } n \geq 2 \\ -(2np-1)n\rho + n^2\rho^2 = n\rho(1-n\rho) & \text{dla } n = 1 \\ n^2\rho^2 & \text{dla } n = 0 \end{array} \right\} = n\rho(1-\rho)$$

ponieważ

$$\sum_{r=0}^{n-2} \binom{n-2}{r} \rho^r (1-\rho)^{(n-2)-r} = [\rho + (1-\rho)]^{n-2} = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \geq 2 \\ 0 & \text{dla } n < 2 \end{cases}$$

$$\sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} \rho^t (1-\rho)^{(n-1)-t} = [\rho + (1-\rho)]^{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \geq 1 \\ 0 & \text{dla } n = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} = [\rho + (1-\rho)]^n = 1$$

Analogicznie obliczamy

$$\mu_3 = n\rho(1-\rho)(1-2\rho)$$

$$\mu_4 = n\rho(1-\rho) [3n\rho(1-\rho) + 1-6\rho+6\rho^2]$$

skąd współczynniki asymetrii i spłaszczenia

$$\gamma_1 = \frac{1-2\rho}{\sqrt{n\rho(1-\rho)}}, \gamma_2 = \frac{1-6\rho+6\rho^2}{n\rho(1-\rho)}$$

Zbadajmy teraz, dla jakich wartości  $k$  prawdopodobieństwo  $p_k$  w rozkładzie binomialnym osiąga największą wartość. W tym celu rozpatrzmy iloraz

$$\begin{aligned} \frac{p_{k+1}}{p_k} &= \frac{\binom{n}{k+1} \rho^{k+1} (1-\rho)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \rho^{k+1} (1-\rho)^{n-k-1}}{\frac{n!}{k!(n-k)!} \rho^k (1-\rho)^{n-k}} = \\ &= \frac{(n-k)\rho}{(k+1)(1-\rho)} = 1 + \frac{n\rho - (1-\rho) - k}{(k+1)(1-\rho)} \end{aligned}$$



Wobec tego

$$\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} > 1 \quad \text{dla} \quad k < np - (1-\rho)$$

$$\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} < 1 \quad \text{dla} \quad k > np - (1-\rho)$$

Jeśli liczba  $np - (1-\rho)$  jest całkowita, wtedy dla  $k = np - (1-\rho)$  jest  $\rho_{k+1} = \rho_k$  i są w ten sposób dwie równe sobie największe wartości prawdopodobieństw

$$\rho_{np-1+\rho} = \rho_{np+\rho} = \binom{n}{np+\rho} \rho^{np+\rho} (1-\rho)^{n-np-\rho}$$

Jeśli liczba  $np - (1-\rho)$  nie jest całkowita, to największą wartość osiąga to prawdopodobieństwo  $\rho_k$ , dla którego

$$np - (1-\rho) < k < np + \rho$$

Jak widać z powyższego, największą wartość osiąga to prawdopodobieństwo  $\rho_k$ , dla którego  $k \approx \bar{x} = np$ . Jeśli zatem  $\rho < \frac{1}{2}$ , to wierzchołek wykresu  $P(\{x\})$  leży na lewo od środka przedziału  $\langle 0; n \rangle$ , a współczynnik asymetrii jest wtedy dodatni. Jeśli natomiast  $\rho > \frac{1}{2}$ , to wierzchołek wykresu  $P(\{x\})$  leży na prawo od środka przedziału  $\langle 0; n \rangle$ , a współczynnik asymetrii jest wtedy ujemny. Jeśli wreszcie  $\rho = \frac{1}{2}$ , to w przypadku  $n$  nieparzystego dwie największe wartości  $\rho_k$  są osiągane dla  $k = \frac{n-1}{2}$ ;  $k = \frac{n+1}{2}$ , dla  $n$  parzystego dla  $k = \frac{n}{2}$ , a współczynnik asymetrii jest równy 0. Jak łatwo zauważyć, wykres  $P(\{x\})$  jest wtedy symetryczny względem punktu  $\bar{x} = np = \frac{n}{2}$ .

Funkcja charakterystyczna rozkładu binomialnego ma postać:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n e^{ikt} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\rho e^{it})^k (1-\rho)^{n-k} =$$

$$= (1-\rho + \rho e^{it})^n$$

a entropia jest równa

$$\mathcal{E} = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} \left( \log_2 \binom{n}{k} + k \log_2 \rho + (n-k) \log_2 (1-\rho) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=0}^n \log_2 \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} - \log_2 \rho \cdot \bar{x} - n \log_2 (1-\rho) + \\
&+ \log_2 (1-\rho) \cdot \bar{x} = - \sum_{k=0}^n \log_2 \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} - \\
&- n \rho \log_2 \rho - n(1-\rho) \log_2 (1-\rho)
\end{aligned}$$

Na zakończenie zwróćmy uwagę, że można było obliczyć momenty  $m_1 = \bar{x}$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ ,  $\mu_4$  nie bezpośrednim rachunkiem, lecz wykorzystując własność (fchar5) funkcji charakterystycznej  $\varphi$ . Mamy bowiem dla  $n \geq 4$

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= i n \rho e^{it} (1-\rho + \rho e^{it})^{n-1} \\
\varphi''(t) &= i^2 n \rho e^{it} (1-\rho + \rho e^{it})^{n-1} + i^2 n(n-1) \rho^2 e^{2it} (1-\rho + \rho e^{it})^{n-2} \\
\varphi'''(t) &= i^3 n \rho e^{it} (1-\rho + \rho e^{it})^{n-1} + 3 i^3 n(n-1) \rho^2 e^{2it} (1-\rho + \rho e^{it})^{n-2} + \\
&+ i^3 n(n-1)(n-2) \rho^3 e^{3it} (1-\rho + \rho e^{it})^{n-3} \\
\varphi^{IV}(t) &= i^4 n \rho e^{it} (1-\rho + \rho e^{it})^{n-1} + 7 i^4 n(n-1) \rho^2 e^{2it} (1-\rho + \rho e^{it})^{n-2} + \\
&+ 6 i^4 n(n-1)(n-2) \rho^3 e^{3it} (1-\rho + \rho e^{it})^{n-3} + \\
&+ i^4 n(n-1)(n-2)(n-3) \rho^4 e^{4it} (1-\rho + \rho e^{it})^{n-4}
\end{aligned}$$

skąd na mocy (fchar5)

$$m_1 = n\rho$$

$$m_2 = n\rho + n(n-1)\rho^2$$

$$m_3 = n\rho + 3n(n-1)\rho^2 + n(n-1)(n-2)\rho^3$$

$$m_4 = n\rho + 7n(n-1)\rho^2 + 6n(n-1)(n-2)\rho^3 + n(n-1)(n-2)(n-3)\rho^4$$

Dla  $n = 3$  wzory na pochodne  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\varphi'''$  zachowują się, ale

$$\begin{aligned}
\varphi^{IV}(t) &= i^4 n \rho e^{it} (1-\rho + \rho e^{it})^{n-1} + 7 i^4 n(n-1) \rho^2 e^{2it} (1-\rho + \rho e^{it})^{n-2} + \\
&+ 6 i^4 n(n-1)(n-2) \rho^3 e^{3it}
\end{aligned}$$

Mimo to wszystkie wzory na  $m_1, \dots, m_4$  zachowują się. Sprawdzamy analogicznie, że dla  $n = 2$ ,  $n = 1$ ,  $n = 0$  wzory na pochodne  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,



$\varphi'''$ ,  $\varphi''''$  ulegają zmianie, ale mimo to wzory na  $m_1, m_2, m_3, m_4$  pozostają prawdziwe.

Na mocy wzorów (201), (208) i (209) mamy

$$\mu_2 = np + n(n-1)\rho^2 - (np)^2 = np - np^2 = np(1-\rho)$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= np + 3n(n-1)\rho^2 + n(n-1)(n-2)\rho^3 - 3np[ np + n(n-1)\rho^2 ] + (np)^3 = \\ &= np(1-\rho)(1-2\rho) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= np + 7n(n-1)\rho^2 + 6n(n-1)(n-2)\rho^3 + n(n-1)(n-2)(n-3)\rho^4 - \\ &- 4np[ np + 3n(n-1)\rho^2 + n(n-1)(n-2)\rho^3 ] + \\ &+ 6(np)^2[ np + n(n-1)\rho^2 ] - 3(np)^4 = np(1-\rho) [ 3np(1-\rho) + 1-6\rho+6\rho^2 ] \end{aligned}$$

jak poprzednio.

### § 243. Rozkład Poissona

Rozkładem Poissona nazywamy rozkład dyskretny, dla którego

$$x_k = k \wedge p_k = p(k; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \wedge \quad \lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda > 0$$

Dystrybucją tego rozkładu jest

$$F(x) \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} & \text{dla } n < x \leq n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Funkcją charakterystyczną jest

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$$

Mamy

$$\varphi'(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)} \cdot i\lambda e^{it} = i\lambda e^{it} \varphi(t)$$

$$\varphi''(t) = i^2 \lambda e^{it} \varphi(t) + i\lambda e^{it} \varphi'(t) = i\lambda e^{it} (i\varphi(t) + \varphi'(t))$$

$$\begin{aligned}\varphi'''(t) &= i^2 \lambda e^{it} (i \varphi(t) + \varphi'(t)) + i \lambda e^{it} (i \varphi'(t) + \varphi''(t)) = \\ &= i \lambda e^{it} (i^2 \varphi(t) + 2i \varphi'(t) + \varphi''(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{IV}(t) &= i^2 \lambda e^{it} (i^2 \varphi(t) + 2i \varphi'(t) + \varphi''(t)) + \\ &+ i \lambda e^{it} (i^2 \varphi'(t) + 2i \varphi''(t) + \varphi'''(t)) = \\ &= i \lambda e^{it} (i^3 \varphi(t) + 3i^2 \varphi'(t) + 3i \varphi''(t) + \varphi'''(t))\end{aligned}$$

skąd

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = i\lambda, \quad \varphi''(0) = i^2 \lambda(1 + \lambda),$$

$$\varphi'''(0) = i^3 \lambda(1 + 3\lambda + \lambda^2)$$

$$\varphi^{IV}(0) = i^4 \lambda(1 + 7\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3)$$

a następnie na mocy własności (fchar5) funkcji charakterystycznej

$$m_1 = \lambda, \quad m_2 = \lambda + \lambda^2, \quad m_3 = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3, \quad m_4 = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4$$

Mamy zatem

$$\bar{x} = m_1 = \lambda$$

a na mocy wzorów (201), (208) i (209)

$$\mu_2 = \lambda, \quad \mu_3 = \lambda, \quad \mu_4 = \lambda + 3\lambda^2$$

Zatem wariancja rozkładu Poissona jest równa wartości średniej i równa parametrowi  $\lambda$ .

Na mocy (206) i (207) współczynniki asymetrii i spłaszczenia są równe

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\lambda}$$

Zbadajmy teraz, dla jakich wartości  $k$  prawdopodobieństwo  $\rho_k$  w rozkładzie Poissona osiąga największą wartość. W tym celu - analogicznie jak dla rozkładu binomialnego - rozpatrujemy iloraz



$$\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}} = \frac{\lambda}{k+1}$$

Zatem

$$\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} > 1 \quad \text{dla} \quad k < \lambda - 1$$

$$\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} < 1 \quad \text{dla} \quad k > \lambda - 1$$

Wynika stąd, że w przypadku, gdy  $0 < \lambda < 1$ , kolejne prawdopodobieństwa  $\rho_k$  stale maleją, a największym jest  $\rho_0 = e^{-\lambda}$ . W przypadku  $\lambda = 1$  jest  $\rho_0 = \rho_1 = \frac{1}{e}$ , a następnie prawdopodobieństwa  $\rho_k$  maleją, a w przypadku  $\lambda > 1$  prawdopodobieństwa  $\rho_k$  początkowo wzrastają, by później już stale maleć; gdy  $\lambda$  jest przy tym liczbą całkowitą, to największą wartość mają prawdopodobieństwa  $\rho_{\lambda-1} = \rho$ ; gdy natomiast  $\lambda$  nie jest liczbą całkowitą, to największą wartość ma prawdopodobieństwo  $\rho_{k_0}$ , gdzie

$$\lambda - 1 < k_0 < \lambda$$

Widzimy, że we wszystkich przypadkach największe prawdopodobieństwo  $\rho_k$  jest dla  $k \approx \bar{x} = \lambda$ .

Entropia rozkładu Poissona jest równa

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (-\lambda + k \log_2 \lambda - \log_2 k!) = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - \log_2 \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \log_2 k! e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \\ &= \lambda - \log_2 \lambda \cdot \bar{x} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log_2 k!}{k!} \lambda^k = \\ &= \lambda - \lambda \log_2 \lambda + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log_2 k!}{k!} \lambda^k \end{aligned}$$

Rozkład Poissona można traktować jako graniczny przypadek rozkładu binomialnego, gdy  $n \rightarrow \infty$ , a prawdopodobieństwo  $p = p(n)$  zmienia się z  $n$  w ten sposób, że

$$n \cdot p = np(n) = \lambda = \text{const}$$

Istotnie mamy wtedy

$$\begin{aligned} b(k; n, p) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1) p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{1}{k!} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (np)^k (1-p)^{-k} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n \xrightarrow[np=\lambda]{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Oparliśmy się tu na znanym fakcie z analizy matematycznej, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

Zauważmy, że momenty  $m_1, m_2, m_3, m_4$  jak również  $\mu_2, \mu_3, \mu_4$  i współczynniki asymetrii i spłaszczenia dla rozkładu Poissona można było otrzymać przechodząc w wyżej opisany sposób do granicy z odpowiednimi momentami czy współczynnikami rozkładu binomialnego.

#### § 244. Inne rozkłady dyskretne

Rozkłady dyskretne omówione w poprzednich paragrafach należą do najważniejszych i najczęściej spotykanych. W paragrafie niniejszym wymienimy kilka rozkładów dyskretnych o mniejszym znaczeniu, nie omawiając już ich szczegółowo.

Rozkładem hipergeometrycznym nazywamy rozkład określony dla  $k = 0, 1, \dots, n$  wzorem

$$p_k = \frac{\binom{n}{k} \binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}} = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

gdzie  $N, K \in \mathcal{N}$ ,  $K \leq N$ ,  $n \leq N$  (por. § 156).



Rozkładem binomialnym ujemnym nazywamy rozkład określony dla  $k = 0, 1, 2, \dots$  wzorem

$$p_k = \binom{\alpha + k - 1}{k} \frac{\beta_k}{(1 + \beta)^{\alpha + k}}$$

gdzie  $\alpha \geq 1$ ,  $\beta > 0$ .

Rozkładem logarytmicznym nazywamy rozkład określony dla  $k = 1, 2, \dots$  wzorem

$$p_k = \frac{1}{-\log(1 - \alpha)} \frac{\alpha^k}{k}$$

gdzie  $0 < \alpha < 1$ .

Rozkładem geometrycznym nazywamy rozkład określony dla  $k = 0, 1, 2, \dots$  wzorem

$$p_k = (1 - \rho) \rho^k$$

gdzie  $0 < \rho < 1$ .

Rozkładem Pólya'i nazywamy rozkład określony dla  $k = 0, 1, \dots, n$  wzorem

$$p_k = \binom{n}{k} \frac{\rho(\rho + \gamma) \dots (\rho + (k-1)\gamma) \cdot q(q + \gamma) \dots (q + (n-k-1)\gamma)}{(1 + \gamma)(1 + 2\gamma) \dots (1 + (n-1)\gamma)}$$

gdzie  $0 < \rho < 1$ ,  $q = 1 - \rho$ ,  $\gamma \geq 0$ .

Dla  $\gamma = 0$  rozkład Pólya'i staje się rozkładem binomialnym.

Rozkładem Borela-Tannera nazywamy rozkład określony dla  $k = 0, 1, 2, \dots$  wzorem

$$p_0 = 0, \bigwedge_{k \in \mathcal{N}} p_k = \frac{(\alpha k)^{k-1}}{k!} e^{-\alpha k}$$

gdzie  $0 \leq \alpha < 1$  i dla  $\alpha = 0$  przyjmujemy  $p_1 = 1$ .

We wszystkich wymienionych rozkładach  $x_k = k$  i  $P(\{x_k\}) = p_k$ .

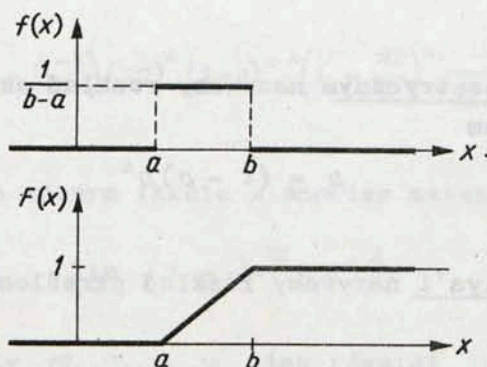
## § 245. Rozkład prostokątny

Rozkładem prostokątnym nazywamy rozkład ciągły o gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{dla } a < x < b \\ 0 & \text{dla } x > b \end{cases}$$

Dystrybuantą rozkładu prostokątnego jest

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a < x < b \\ 1 & \text{dla } x \geq b \end{cases}$$



Wartością średnią jest

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

a momenty centralne wyrażają się wzorem

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^k f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^k dx = \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k dt}{\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a}}$$

$$= (b-a)^k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^k dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{k+1} \left(\frac{b-a}{2}\right)^k & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}$$

W szczególności wariancją rozkładu prostokątnego jest



$$\mu_2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

a

$$\mu_3 = 0, \quad \mu_4 = \frac{(b-a)^4}{80}$$

skąd współczynniki asymetrii i spłaszczenia

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = -\frac{6}{5}$$

Funkcją charakterystyczną jest

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{ixt} dx = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{(b-a)it}$$

Entropia jest równa

$$\mathcal{E} = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log_2 f(x) dx = - \int_a^b \frac{1}{b-a} \log_2 \frac{1}{b-a} dx = \log_2(b-a)$$

#### § 246. Rozkład normalny

Rozkład normalny jest bezspornie najważniejszym rozkładem w teorii prawdopodobieństwa, co znalazło swój wyraz już w samej nazwie. Jest to rozkład ciągły o gęstości prawdopodobieństwa

$$(230) \quad f(x) = N(x; a, s) = N(a, s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}$$

gdzie  $a, s \in \mathcal{R} \wedge s > 0$ .

Gdy  $a = 0$  i  $s = 1$ , tzn.

$$(231) \quad f(x) = N(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

rozkład będziemy nazywać standardowym rozkładem normalnym. Symbolem  $\Phi$  będziemy oznaczać dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego, tzn.