

Moment $\mu_{|1|}$ nazywamy średnim odchyleniem bezwzględnym rozkładu P . Mamy na mocy (210)

$$(211) \quad \mu_{|1|} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{x}| dP(x)$$

Jak wynika z definicji (210), momenty $\mu_{|k|}$ zawsze istnieją, gdy istnieje wartość średnia \bar{x} , i są nieujemne.

Ponadto, jak łatwo zauważyć,

$$(212) \quad \mu_{|k|} = \mu_k \quad \text{dla } k \text{ parzystych}$$

§ 236. Kwantyle

Kwantylem rzędu p , gdzie $p \in (0;1)$, rozkładu prawdopodobieństwa P na prostej nazywamy każdą taką liczbę z_p , że

$$(213) \quad F(z_p) \leq p \leq F(z_p+)$$

gdzie F jest dystrybuantą rozkładu P . Innymi słowy, na mocy wzoru (81) z § 138, kwantylem rzędu p nazywamy każdą taką liczbę z_p , że

$$(214) \quad P(< -\infty; z_p) \leq p \leq P(< -\infty; z_p >)$$

Gdy rozkład P jest ciągły, wtedy na mocy definicji (213) kwantylem rzędu p nazywamy każdą taką liczbę z_p , że

$$(215) \quad F(z_p) = p = P(< -\infty; z_p)$$

Medianą nazywamy kwantyl rzędu $\frac{1}{2}$. Będziemy ją oznaczać symbolem \bar{m} .

Kwantyle dowolnego rzędu p ($p \in (0;1)$) i w szczególności mediana istnieją zawsze dla dowolnego rozkładu P , ale na ogół nie są określone jednoznacznie. Na mocy wzoru (213) kwantyle są zawsze skończone, tzn. $|z_k| < \infty$.

Mediana \bar{m} rozkładu P ma następującą własność:

$$(216) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{m}| dP(x) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \alpha| dP(x)$$

Istotnie, gdy $\alpha \geq \bar{m}$, to

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \alpha| dP(x) &= \int_{-\infty}^{\alpha} (\alpha - x) dP(x) + \int_{\alpha}^{+\infty} (x - \alpha) dP(x) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\bar{m}+} (\alpha - x) dP(x) + \int_{\bar{m}+}^{\alpha} (\alpha - x) dP(x) + \int_{\bar{m}+}^{+\infty} (x - \alpha) dP(x) \\
 &- \int_{\bar{m}+}^{\alpha} (x - \alpha) dP(x) = \int_{-\infty}^{\bar{m}+} (\bar{m} - x) dP(x) + \int_{-\infty}^{\bar{m}+} (\alpha - \bar{m}) dP(x) + \\
 &+ 2 \int_{\bar{m}+}^{\alpha} (\alpha - x) dP(x) + \int_{\bar{m}+}^{+\infty} (x - \bar{m}) dP(x) - \int_{\bar{m}+}^{+\infty} (\alpha - \bar{m}) dP(x) = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{m}| dP(x) + 2 \int_{\bar{m}+}^{\alpha} (\alpha - x) dP(x) + (\alpha - \bar{m}) \left(\int_{-\infty}^{\bar{m}+} dP(x) - \int_{\bar{m}+}^{+\infty} dP(x) \right)
 \end{aligned}$$

Ale \bar{m} jest taką liczbą, że

$$\int_{-\infty}^{\bar{m}+} dP(x) = F(\bar{m}+) \geq \frac{1}{2}$$

$$\int_{\bar{m}+}^{+\infty} dP(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dP(x) - \int_{-\infty}^{\bar{m}+} dP(x) = 1 - F(\bar{m}+) \leq \frac{1}{2}$$

skąd

$$2 \int_{\bar{m}+}^{\alpha} (\alpha - x) dP(x) + (\alpha - \bar{m}) \left(\int_{-\infty}^{\bar{m}+} dP(x) - \int_{\bar{m}+}^{+\infty} dP(x) \right) \geq 0$$

i całka $\int_{-\infty}^{+\infty} |x - \alpha| dP(x)$ przybiera najmniejszą wartość dla $\alpha = \bar{m}$.

Gdy $\alpha \leq \bar{m}$, to

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |x - \alpha| d\rho(x) &= \int_{-\infty}^{\alpha} (\alpha - x) d\rho(x) + \int_{\alpha}^{+\infty} (x - \alpha) d\rho(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{\bar{m}} (\alpha - x) d\rho(x) - \int_{\alpha}^{\bar{m}} (\alpha - x) d\rho(x) + \int_{\bar{m}}^{+\infty} (x - \alpha) d\rho(x) + \int_{\alpha}^{\bar{m}} (x - \alpha) d\rho(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{\bar{m}} (\bar{m} - x) d\rho(x) + \int_{-\infty}^{\bar{m}} (\alpha - \bar{m}) d\rho(x) + 2 \int_{\alpha}^{\bar{m}} (x - \alpha) d\rho(x) + \\
&+ \int_{\bar{m}}^{+\infty} (x - \bar{m}) d\rho(x) + \int_{\bar{m}}^{+\infty} (\bar{m} - \alpha) d\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{m}| d\rho(x) + 2 \int_{\alpha}^{\bar{m}} (x - \alpha) d\rho(x) + \\
&+ (\bar{m} - \alpha) \left(\int_{\bar{m}}^{+\infty} d\rho(x) - \int_{-\infty}^{\bar{m}} d\rho(x) \right)
\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\int_{\bar{m}}^{+\infty} d\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho(x) - \int_{-\infty}^{\bar{m}} d\rho(x) = 1 - F(\bar{m}) \geq \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\bar{m}} d\rho(x) = F(\bar{m}) \leq \frac{1}{2}$$

więc

$$2 \int_{-\infty}^{\bar{m}} (x - \alpha) d\rho(x) + (\bar{m} - \alpha) \left(\int_{\bar{m}}^{+\infty} d\rho(x) - \int_{-\infty}^{\bar{m}} d\rho(x) \right) \geq 0$$

i całka $\int_{-\infty}^{+\infty} |x - \alpha| d\rho(x)$ również przyjmuje najmniejszą wartość dla $\alpha = \bar{m}$. Tym samym własność (216) została udowodniona.

§ 237. Funkcja charakterystyczna rozkładu prawdopodobieństwa na prostej

Funkcją charakterystyczną rozkładu prawdopodobieństwa ρ na prostej albo krócej funkcją charakterystyczną rozkładu ρ nazywamy

wartość średnią funkcji e^{itx} ze względu na rozkład prawdopodobieństwa ρ o dystrybuancie $F(x)$, tzn. funkcję zespoloną

$$(217) \quad \varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) \quad (t \in \mathbb{R})$$

Funkcja charakterystyczna istnieje dla każdego rozkładu ρ na mocy własności (c24) całek Lebesgue'a, ponieważ

$$(218) \quad |e^{itx}| = |\cos(tx) + i \sin(tx)| = 1 \wedge \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| d\rho(x) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho(x) = 1$$

Dla rozkładów dyskretnych ρ funkcję charakterystyczną można na mocy (180) wyrazić wzorem

$$(219) \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^m e^{itx_k} \cdot p_k, \quad m \in \mathbb{N} \vee m = \infty$$

ponieważ na mocy (218)

$$\sum_{k=1}^m |e^{itx_k}| p_k = \sum_{k=1}^m p_k = 1$$

i warunek (183) jest zawsze spełniony.

Dla rozkładów ciągłych mamy na mocy (184)

$$(220) \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx$$

i całka ta na mocy (218) zawsze istnieje.

Funkcje charakterystyczne są wygodnym narzędziem w dowodach wielu twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa i odgrywają w tym rachunku ważną rolę.

Podstawowym faktem w teorii funkcji charakterystycznych jest wzajemnie jednoznaczność między rozkładami prawdopodobieństwa ρ na prostej a funkcjami charakterystycznymi. Wzór (217) gwarantuje, że każdemu rozkładowi ρ odpowiada dokładnie jedna funkcja charakterystyczna φ . To, że - odwrotnie - każdej funkcji charakterystycznej φ odpowiada dokładnie jeden rozkład prawdopodobieństwa ρ , gwarantuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie (A)

Z] 1^o $\varphi(t)$ jest funkcją charakterystyczną rozkładu ρ o dystrybuancie $F(x)$.

2^o $x, a \in \mathbb{R}$ są punktami ciągłości dystrybuanty F .

$$\text{T]} \quad F(x) - F(a) = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{+c} \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \varphi(t) dt$$

D] Zanim przystąpimy do właściwego dowodu, udowodnimy potrzebny później lemat.

Lemat

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin yt}{t} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } y > 0 \\ 0 & \text{dla } y = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{dla } y < 0 \end{cases}$$

Dowód lematu

Wystarczy wykazać, że:

$$(i) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

ponieważ dla $y = 0$ lemat jest oczywisty, a dla $y \neq 0$ mamy podstawiając $|y|t = x$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin yt}{t} dt &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{\sin yt}{t} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^{|c||y|} \operatorname{sgn} y \cdot \frac{\sin x}{x} dx = \\ &= \operatorname{sgn} y \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

Aby wykazać (i), obierzmy dwie liczby

$$h = \frac{\pi}{k} \quad \text{i} \quad c = m\pi, \quad \text{gdzie} \quad k, m \in \mathbb{N}$$

i rozpatrzmy równość

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nh}{n} = \left(\int_0^c \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{n=1}^{km-1} \frac{\sin nh}{n} \right) +$$

$$+ \int_c^\infty \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{n=km}^\infty \frac{\sin nh}{n}$$

Mamy na mocy definicji całki Riemanna

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{k_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > k_0}} \left| \int_0^c \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{n=1}^{km-1} \frac{\sin nh}{n} \right| =$$

$$= \left| \int_0^c \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{n=1}^{\frac{c-h}{h}} \frac{\sin nh}{nh} \cdot h \right| < \varepsilon$$

Następnie

$$\left| \int_c^\infty \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \int_{m\pi}^\infty \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \sum_{j=0}^\infty \int_{(m+j)\pi}^{(m+j+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=0}^\infty (-1)^{m+j} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u + (m+j)\pi} du \right| = \sum_{j=0}^\infty \int_0^\pi \sin u \left(\frac{1}{u + (m+2j)\pi} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{u + (m+2j+1)\pi} \right) du = \pi \sum_{j=0}^\infty \int_0^\pi \frac{\sin u}{[u + (m+2j)\pi][u + (m+2j+1)\pi]} du <$$

$$< \pi \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{du}{(m+2j)\pi(m+2j+1)\pi} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(m+2j)(m+2j+1)} <$$

$$< \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(m+j)(m+j+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+j} - \frac{1}{m+j+1} \right) = \frac{1}{m}$$

co dowodzi zbieżności całki (i). Ponadto

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=km}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} \right| &= \left| \sum_{n=km}^{km+k-1} \frac{\sin nh}{n} + \sum_{n=k(m+1)}^{km+2k-1} \frac{\sin nh}{n} + \dots \right| = \\ &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=k(m+j)}^{k(m+j)+k-1} \frac{\sin nh}{n} \right| \stackrel{n=l+k(m+j)}{=} \left| \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{m+j} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\sin lh}{l+k(m+j)} \right| = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \sin lh \left(\frac{1}{l+k(m+2j)} - \frac{1}{l+k(m+2j+1)} \right) = \\ &= k \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\sin lh}{[l+k(m+2j)][l+k(m+2j+1)]} < \\ &< k \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{k(m+2j)k(m+2j+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(m+2j)(m+2j+1)} < \\ &< \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)(m+j+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+j} - \frac{1}{m+j+1} \right) = \frac{1}{m} \end{aligned}$$

co dowodzi zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n}$, jednostajnej względem h . Wobec powyższych oszacowań

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{k_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > k_0}} \left| \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} \right| < \frac{2}{m} + \varepsilon$$

skąd ze względu na dowolność liczby m

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{k_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > k_0}} \left| \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} \right| < \varepsilon$$

a dla $h \rightarrow 0$, czyli $k \rightarrow \infty$

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \left| \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx - \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} \right| < \varepsilon$$

skąd ze względu na dowolność liczby ε

$$(ii) \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n}$$

Rozwińmy teraz funkcję

$$(iii) \quad y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \arctg \frac{x \sin h}{1 - x \cosh}$$

w szereg Maclaurina

$$(iv) \quad y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$

gdzie

$$\alpha_0 = y(0) = 0 \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

Mamy

$$y'(x) = \frac{\sin h}{1 - 2x \cosh + x^2}$$

czyli

$$(1 - 2x \cosh + x^2) y'(x) = \sin h \quad y'(0) = \sin h$$

Różniczkując tę równość otrzymujemy kolejno

$$2(x - \cosh h)y'(x) + (1 - 2x \cosh h + x^2)y''(x) = 0, \quad -2\cosh h y'(0) + y''(0) = 0$$

$$2y'(x) + 4(x - \cosh h)y''(x) + (1 - 2x \cosh h + x^2)y'''(x) = 0$$

$$6y''(x) + 6(x - \cosh h)y'''(x) + (1 - 2x \cosh h + x^2)y^{(4)}(x) = 0$$

.....

i przez indukcję dowodzimy, że

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} n(n+1)y^{(n)}(x) + 2(n+1)(x - \cosh h)y^{(n+1)}(x) +$$

$$+ (1 - 2x \cosh h + x^2)y^{(n+2)}(x) = 0$$

skąd

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} n(n+1)y^{(n)}(0) - 2(n+1)\cosh h y^{(n+1)}(0) + y^{(n+2)}(0) = 0$$

a następnie

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} n(n+1)n! \alpha_n - 2(n+1)(n+1)! \cosh h \alpha_{n+1} + (n+2)! \alpha_{n+2} = 0$$

i po skróceniu przez $(n+1)!$

$$(v) \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} n\alpha_n - 2(n+1)\cosh h \alpha_{n+1} + (n+2)\alpha_{n+2} = 0$$

Ze wzoru tego można sukcesywnie obliczać współczynniki $\alpha_3, \alpha_4, \dots$, gdy są znane współczynniki

$$\alpha_1 = \frac{y'(0)}{1!} = \sinh h, \quad \alpha_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{2\sinh h \cosh h}{2} = \frac{\sinh 2h}{2}$$

Ale można z łatwością sprawdzić, że wzór (v) jest spełniony dla

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \frac{\sinh nh}{n}$$

Ponieważ wzór (v) określa współczynniki $\alpha_3, \alpha_4, \dots$ jednoznacznie, otrzymaliśmy wzór na wszystkie te współczynniki i na mocy (iv)

$$\operatorname{arctg} \frac{x \sinh h}{1-x \cosh h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} x^n$$

Jak już wykazaliśmy, szereg powyższy jest zbieżny dla $x = 1$ a więc i dla wszystkich $|x| < 1$. Dla $x = 1$ otrzymujemy

$$\operatorname{arctg} \frac{\sinh h}{1-\cosh h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n}$$

czyli

$$\operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{h}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n}$$

czyli

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{h}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n}$$

czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{h}{2}$$

i wobec tego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} = \frac{\pi}{2}$$

skąd na mocy (ii) otrzymujemy (i), a stąd tezę lematu. W ten sposób lemat został udowodniony.

Dowód twierdzenia (A) wystarczy przeprowadzić w przypadku $\alpha < x$. Dla $\alpha = x$ teza jest oczywista, a dla $\alpha > x$ wystarczy zamienić w tezie α i x . Niech

$$\mathcal{I}_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \varphi(t) dt$$

Mamy

$$\left| \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \varphi(t) \right| = \left| e^{-ita} \right| \cdot \left| \frac{1 - e^{-it(x-a)}}{it} \right| \cdot \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} dF(u) \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \frac{1-e^{-it(x-a)}}{t} \right| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} dF(u) \right| = \left| \frac{1-e^{-it(x-a)}}{t} \right| = \\
&= \frac{|1-\cos[t(x-a)] + i \sin[t(x-a)]|}{|t|} = \\
&= \sqrt{\frac{(1-\cos[t(x-a)])^2 + \sin^2[t(x-a)]}{t^2}} = \\
&= \sqrt{2 \frac{1-\cos[t(x-a)]}{t^2}} = \sqrt{2(x-a)^2 \frac{1-\cos[t(x-a)]}{t^2(x-a)^2}}
\end{aligned}$$

Ponieważ funkcja $\frac{t^2}{2} - 1 + \cos t$ osiąga minimum równe 0 dla $t = 0$ i wobec tego $\frac{t^2}{2} \geq 1 - \cos t$, czyli $\frac{2(1-\cos t)}{t^2} \leq 1$, więc otrzymujemy

$$\left| \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \varphi(t) \right| \leq \sqrt{(x-a)^2} = x-a$$

Z powyższego wyniku na mocy własności (c30) całek Lebesgue'a, że funkcja

$$\frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \varphi(t)$$

jest całkowalna w każdym przedziale $(-c; c)$ i na mocy twierdzenia Fubniego, tzn. własności (c61) mamy

$$\begin{aligned}
J_c &= \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \left(\frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} dF(u) \right) dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-c}^c \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} e^{itu} dt \right) dF(u)
\end{aligned}$$

Ale

$$\int_{-c}^c \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} e^{itu} dt = \int_{-c}^c \frac{e^{it(u-a)} - e^{it(u-x)}}{it} dt =$$

$$= \int_{-c}^c \frac{\cos[t(u-a)] - \cos[t(u-x)]}{it} dt + \int_{-c}^c \frac{\sin[t(u-a)] - \sin[t(u-x)]}{t} dt$$

Ponieważ pierwsza z tych całek jako całka w przedziale symetrycznym względem zera z funkcji ograniczonej nieparzystej jest równa zero, więc uwzględniając parzystość drugiej funkcji podcałkowej mamy

$$\int_{-c}^c \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} e^{itu} dt = 2 \int_0^c \left(\frac{\sin[t(u-a)]}{t} - \frac{\sin[t(u-x)]}{t} \right) dt$$

Na mocy udowodnionego wyżej lematu mamy

$$\bigwedge_{y \in \mathfrak{R}} \bigvee_{\substack{c_0 \in \mathfrak{R} \\ c_0 > 0}} \bigwedge_{\substack{c \in \mathfrak{R} \\ c > c_0}} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{\sin yt}{t} dt \right| < 1$$

Wobec tego dla wystarczająco dużych c jest

$$\begin{aligned} \left| \int_{-c}^c \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} e^{itu} dt \right| &= 2 \left| \int_0^c \left(\frac{\sin[t(u-a)]}{t} - \frac{\sin[t(u-x)]}{t} \right) dt \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \int_0^c \frac{\sin[t(u-a)]}{t} dt \right| + 2 \left| \int_0^c \frac{\sin[t(u-x)]}{t} dt \right| \leq 4\pi \end{aligned}$$

i na mocy własności (c46) całek Lebesgue'a

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \mathcal{I}_c &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^c \left(\frac{\sin[t(u-a)]}{t} - \frac{\sin[t(u-x)]}{t} \right) dt \right) dF(u) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{\sin[t(u-a)]}{t} dt - \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{\sin[t(u-x)]}{t} dt \right) dF(u) \end{aligned}$$

Ale na mocy udowodnionego wyżej lematu

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{\sin yt}{t} dt = dt \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } y > 0 \\ 0 & \text{dla } y = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{dla } y < 0 \end{cases}$$

wobec czego

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{\sin[t(u-a)]}{t} dt - \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{\sin[t(u-x)]}{t} dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } u > x \\ \frac{1}{2} & \text{dla } u = x \\ 1 & \text{dla } a < u < x \\ \frac{1}{2} & \text{dla } u = a \\ 0 & \text{dla } u < a \end{cases}$$

i w konsekwencji na mocy (166)

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} I_c &= \frac{1}{2} \int_a^{a^+} dF(u) + \int_{a^+}^x dF(u) + \frac{1}{2} \int_x^{x^+} dF(u) = \\ &= \frac{1}{2} F(a^+) - \frac{1}{2} F(a) + F(x) - F(a^+) + \frac{1}{2} F(x^+) - \frac{1}{2} F(x) = \\ &= \frac{1}{2} (F(x^+) + F(x)) - \frac{1}{2} (F(a^+) + F(a)) \end{aligned}$$

Gdy a i x są punktami ciągłości dystrybuanty F , wtedy

$$F(x^+) = F(x) \wedge F(a^+) = F(a)$$

i

$$\lim_{c \rightarrow \infty} I_c = F(x) - F(a)$$

co było do dowiedzenia.

Niech teraz (a_k) będzie dowolnym ciągiem punktów ciągłości dystrybuanty F takim, że

$$a_k \searrow -\infty$$

Na mocy twierdzenia § 217 ciąg taki zawsze istnieje. Na mocy własności (148) z § 216 jest

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(a_k) = 0$$

i wobec tego na mocy twierdzenia (A) dla każdego punktu ciągłości x dystrybuanty F mamy

$$(*) \quad F(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{e^{-ita_k} - e^{-itx}}{it} \varphi(t) dt$$

Granica powyższa zawsze istnieje, ponieważ na mocy twierdzenia (A) ciąg

$$\left(\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{e^{ita_k} - e^{-itx}}{it} \varphi(t) dt \right) = (F(x) - F(a_k))$$

jest niemalejący i ograniczony od góry liczbą $F(\infty) - F(-\infty) = 1$.

Wzór (*) zapewnia jednoznaczność dystrybuanty w punktach ciągłości. Z lewostronnej ciągłości dystrybuanty F wynika wtedy jednoznaczność dystrybuanty dla danej funkcji charakterystycznej φ , a na mocy twierdzenia § 115 jednoznaczność rozkładu prawdopodobieństwa.

Twierdzenie (B)

Z 1° φ jest funkcją charakterystyczną rozkładu P o dystrybuancie F .
2°

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt < \infty$$

T Rozkład P jest ciągły, a funkcja

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

jest jego gęstością prawdopodobieństwa jednostajnie ciągłą i ograniczoną na całej prostej.

D Mamy analogicznie jak w dowodzie twierdzenia (A)

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \right| = \left| e^{-ita} \right| \left| \frac{1 - e^{-it(x-a)}}{it} \right| = \left| \frac{1 - e^{-it(x-a)}}{t} \right| = \\
& = \left| \frac{1 - \cos[t(x-a)] + i \sin[t(x-a)]}{t} \right| = \\
& = \sqrt{\frac{(1 - \cos[t(x-a)])^2 + \sin^2[t(x-a)]}{t^2}} = \\
& = \sqrt{\frac{(x-a)^2 + \frac{1 - \cos[t(x-a)]}{t^2(x-a)^2}}{t^2(x-a)^2}} \leq \sqrt{(x-a)^2} = |x-a|
\end{aligned}$$

i wobec tego

$$(**) \quad \left| \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \varphi(x) \right| \leq |x-a| |\varphi(t)|$$

Na mocy własności (c37) całek Lebesgue'a oraz założenia 2^o funkcja

$$\frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \varphi(t)$$

jest całkowalna w przedziale $-\infty < t < \infty$, czyli na całej prostej i istnieje funkcja skończona

$$(***) \quad \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \varphi(t) dt + F(a)$$

gdzie a jest dowolnym punktem ciągłości dystrybuanty F . Na mocy twierdzenia (A) jest

$$F(x) = \psi(x)$$

dla każdego punktu ciągłości x dystrybuanty F . Ponadto na mocy (**)

$$\bigwedge_{x, x_0 \in \mathbb{R}} \left| \frac{\frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \varphi(t) - \frac{e^{-ita} - e^{-itx_0}}{it} \varphi(t)}{x - x_0} \right| =$$

$$= \left| \frac{e^{-itx_0} - e^{-itx}}{it(x-x_0)} \varphi(t) \right| \leq |\varphi(t)|$$

Na mocy własności (c59) całek Lebesgue'a i wzoru (***) dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje pochodna

$$f(x) = \psi'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \right)' \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

i jest ograniczona, ponieważ na mocy założenia 2°

$$|f(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-itx}| |\varphi(t)| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt < \infty$$

Ponadto funkcja $f(x)$ jest jednostajnie ciągła na całej prostej, gdyż

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-itx_1} - e^{-itx_2}) \varphi(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-itx_1} - e^{-itx_2}| |\varphi(t)| dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\cos tx_1 - \cos tx_2 - i \sin tx_1 + i \sin tx_2| |\varphi(t)| dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{(\cos tx_1 - \cos tx_2)^2 + (\sin tx_1 - \sin tx_2)^2} |\varphi(t)| dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2 - 2(\cos tx_1 \cos tx_2 + \sin tx_1 \sin tx_2)} |\varphi(t)| dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1 - \cos[t(x_1 - x_2)]}{2}} |\varphi(t)| dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sin \frac{t(x_1 - x_2)}{2} \right| |\varphi(t)| dt = \nu(x_1 - x_2)$$

Ponieważ $\sin \left| \frac{t(x_1 - x_2)}{2} \right| |\varphi(t)| \leq |\varphi(t)|$, więc na mocy założenia 2^0 i własności (c47) $\lim_{u \rightarrow 0} \nu(u) = 0$, czyli

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \in \mathfrak{R}}} \bigvee_{\substack{\delta > 0 \\ \delta \in \mathfrak{R}}} \bigwedge_{x_1, x_2 \in \mathfrak{R}} |x_1 - x_2| < \delta \implies \nu(x_1 - x_2) < \varepsilon$$

skąd

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \in \mathfrak{R}}} \bigvee_{\substack{\delta > 0 \\ \delta \in \mathfrak{R}}} \bigwedge_{x_1, x_2 \in \mathfrak{R}} |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

co oznacza jednostajną ciągłość funkcji f na całej prostej.

Z istnienia pochodnej funkcji ψ wynika, że funkcja ta jest ciągła na całej prostej $-\infty < x < +\infty$. Wobec tego na mocy lewostronnej ciągłości dystrybucy F mamy

$$\bigwedge_{x \in \mathfrak{R}} F(x) = \psi(x)$$

skąd

$$\bigwedge_{x \in \mathfrak{R}} F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt = f(x)$$

i dystrybuanta F jest funkcją ciągłą.

Funkcja f na mocy twierdzenia § 199 i własności (c28) całek Lebesgue'a jest całkowalna na każdym przedziale $\langle a; x \rangle$, $a, x \in \mathfrak{R}$ i na mocy twierdzenia Fubini'ego, tzn. własności (c61)

$$\int_a^x f(u) du = \int_a^x \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu} \varphi(t) dt \right) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \int_a^x e^{-itu} du dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itx}}{it} \varphi(t) dt$$

skąd na mocy twierdzenia (A)

$$\bigwedge_{a \in \mathbb{R}} \int_a^x f(u) du = F(x) - F(a)$$

Przechodząc do granicy z $a \rightarrow -\infty$ otrzymujemy

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

co oznacza, że rozkład P jest ciągły, a funkcja f jest jego gęstością prawdopodobieństwa ciągłą i ograniczoną na całej prostej.

Tym samym twierdzenie (B) zostało udowodnione.

Funkcja charakterystyczna φ rozkładu P ma następujące własności:

$$(fchar1) \bigwedge_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| \leq 1$$

$$\underline{D} \quad |\varphi(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dP(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| dP(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dP(x) = 1$$

$$(fchar2) \varphi(0) = 1$$

$$\underline{D} \quad \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dP(x) = 1$$

$$(fchar3) \varphi(-t) = (\varphi(t))^*$$

gdzie symbolem z^* oznaczamy liczbę sprzężoną z liczbą zespoloną z

$$\underline{D} \quad \varphi(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} dP(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(tx) - i \sin(tx)) dP(x) =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(tx) + i \sin(tx)) dP(x) \right)^* = (\varphi(t))^*$$

(fchar4) $\varphi(t)$ jest jednostajnie ciągła na całej prostej.

D Analogiczny do dowodu, że $f(x)$ jest jednostajnie ciągła na całej prostej, przeprowadzonego w twierdzeniu (B).

(fchar5) Jeśli istnieje skończony k -ty moment rozkładu P o funkcji charakterystycznej $\varphi(t)$, to funkcja charakterystyczna ma k -tą pochodną i

$$m_k = \frac{1}{i^k} \left(\frac{d^k \varphi(t)}{dt^k} \right)_{t=0}$$

D Rozpatrzmy funkcje

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}} h_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx} dP(x), \quad k \in \mathbb{N} \quad \vee \quad k = 0$$

Mamy

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{x, t, t_0 \in \mathbb{R}} \left| \frac{(ix)^k e^{itx} - (ix)^k e^{it_0x}}{t - t_0} \right| = \\ &= |x|^{k+1} \left| \frac{\cos tx + i \sin tx - \cos t_0x - i \sin t_0x}{x(t - t_0)} \right| = \\ &= |x|^{k+1} \frac{\sqrt{(\cos tx - \cos t_0x)^2 + (\sin tx - \sin t_0x)^2}}{|x(t - t_0)|} = \\ &= |x|^{k+1} \frac{\sqrt{2 - 2 \cos tx \cdot \cos t_0x - 2 \sin tx \cdot \sin t_0x}}{|x(t - t_0)|} = \\ &= |x|^{k+1} \frac{\sqrt{2 - 2 \cos[x(t - t_0)]}}{|x(t - t_0)|} = |x|^{k+1} \left| \frac{\sin x \frac{t-t_0}{2}}{x \frac{t-t_0}{2}} \right| \leq |x|^{k+1} \end{aligned}$$

Założmy, że istnieje $(k+1)$ -szy moment rozkładu P

$$m_{k+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1} dP(x), \quad |m_{k+1}| < \infty$$

Oznacza to, że funkcja x^{k+1} , a z nią i funkcja $|x|^{k+1}$ są całkowalne na całej prostej. Wobec tego na mocy własności (c59) całek Lebesgue'a, w której kładziemy

$$A = B = (-\infty; +\infty), \quad x = \mathbb{R}, \quad S = \mathcal{B}, \quad \mu = P$$

$$y = t, \quad f(x, y) = (ix)^k e^{itx}, \quad h = h_k$$

funkcja h_k jest różniczkowalna na całej prostej i

$$h'_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^{k+1} e^{itx} dP(x) = h_{k+1}(t)$$

Ale z całkowalności funkcji $|x|^{k+1}$ wynika całkowalność funkcji $|x|^j$ dla $j = 1, \dots, k$, ponieważ
 1° z całkowalności funkcji $|x|^{k+1}$ wynika całkowalność funkcji

$$g_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |x| \leq 1 \\ |x|^{k+1} & \text{dla } |x| \geq 1 \end{cases}$$

gdych

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_k(x)| dP(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(x) dP(x) = P(<-1; 1) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-1} |x|^{k+1} dP(x) + \int_1^{+\infty} |x|^{k+1} dP(x) < 1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{k+1} dP(x) < \infty$$

2° z całkowalności funkcji $g_k(x)$ wynika na mocy własności (c29) całkowalność funkcji $|x|^j$, gdyż

$$|x|^j \leq g_k(x)$$

Wobec powyższego z istnienia momentu skończonego m_{k+1} wynika istnienie skończonych momentów m_1, \dots, m_k i

$$(221) \quad h_k(t) = \frac{d^k h_0(t)}{dt^k} = \frac{d^k \varphi(t)}{dt^k} = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx} dP(x)$$

Ponieważ z definicji

$$h_k(0) = i^k m_k$$

wynika stąd żądana własność.

§ 238. Informacja i entropia

Teoria informacji wywodzi się z zagadnień praktycznych telekomunikacji. Jest to obecnie dział matematyki zyskujący stale na znaczeniu i mający duże powiązania z rachunkiem prawdopodobieństwa i statystyką matematyczną. Wprowadzenie teorii informacji do probabilistyki przyniosło nie tylko nowe spojrzenie na znane zagadnienia, ale spowodowało wykrycie nowych praw i konstrukcje nowych metod. Z tego względu jest pożądanym, by współczesny wykład probabilistyki obejmował również elementy teorii informacji.

W teorii informacji za jednostkę informacji przyjmuje się bit, czyli cyfrę binarną (skrót nazwy angielskiej "binary digit"). Jest to naturalne, ponieważ za elementarną informację można uważać odpowiedź na jedno pytanie, wyrażoną słowami "tak" lub "nie", którym to słowom można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować cyfry binarne 0 lub 1. Jeśli przyjąć, że alfabet języka polskiego zawiera 32 znaki, to każdy z tych znaków może być wzajemnie jednoznacznie przyporządkowany jednej z liczb od 0 do 31 zapisanych w systemie binarnym 5 bitami od 00000 do 11111. W ten sposób informacja przesyłana jednym znakiem alfabetu może być traktowana jako informacja złożona z 5 kolejnych bitów. Za pośrednictwem znaków alfabetu każdy tekst może być traktowany jako informacja zło-