

D] Na mocy twierdzeń § 185, § 188 i § 192 dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  funkcja

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} x |f| + y |g|$$

jak również funkcja  $\tau^2$  są mierzalne i skończone na zbiorze  $A$ , a ponadto

$$\bigwedge_{x, y \in \mathbb{R}} \int_A \tau^2 d\mu \geq 0$$

a stąd

$$\begin{aligned} \bigwedge_{x, y \in \mathbb{R}} \int_A (x |f| + y |g|)^2 d\mu &= x^2 \int_A |f|^2 d\mu + \\ &+ 2xy \int_A |fg| d\mu + y^2 \int_A |g|^2 d\mu \geq 0 \end{aligned}$$

Wyróżnik tego trójmianu kwadratowego musi być niedodatni, tzn.

$$4 \left( \int_A |fg| d\mu \right)^2 - 4 \int_A |f|^2 d\mu \cdot \int_A |g|^2 d\mu \leq 0$$

czyli

$$\left( \int_A |fg| d\mu \right)^2 \leq \int_A |f|^2 d\mu \int_A |g|^2 d\mu$$

Ponieważ na mocy (c22) jest

$$\left| \int_A fg d\mu \right| \leq \int_A |fg| d\mu$$

otrzymujemy stąd żadaną własność.

Uwaga: W przypadku funkcji  $f$  i  $g$  rzeczywistych własność (c62) można napisać w postaci

$$\left( \int_A fg d\mu \right)^2 \leq \int_A f^2 d\mu \int_A g^2 d\mu$$

## § 226. Całka Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej

Całka Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^n$  jest szczególnym przypadkiem całki Lebesgue'a określonej w § 224, gdy mianowicie  $x = \mathbb{R}^n$ . Niech  $\mathcal{L}_n$  oznacza - zgodnie z § 118 - klasę zbiorów

mierzalnych w sensie Lebesgue'a w przestrzeni  $\mathfrak{R}^n$ , a  $\mathcal{B}_n$  klasę zbiorów borelowskich w tej przestrzeni. Na mocy twierdzenia § 119 jest  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{L}_n$ . Na mocy § 118 i § 93 klasy  $\mathcal{L}_n$  i  $\mathcal{B}_n$  są  $\sigma$ -ciałami przestrzeni  $\mathfrak{R}^n$ . Niech  $\omega$  oznacza miarę Lebesgue'a w przestrzeni  $\mathfrak{R}^n$ . Symbolem  $\mu$  będziemy oznaczać dowolną miarę określoną na dowolnym  $\sigma$ -ciele  $\mathcal{S}$  przestrzeni  $\mathfrak{R}^n$ .

W przypadku gdy całka jest określona w przestrzeni z miarą  $(\mathfrak{R}^n, \mathcal{S}, \mu)$  i  $A = \langle a; b \rangle$ , gdzie  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathfrak{R}_0^n$ , będziemy tę całkę oznaczać

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_A f(x) d\mu(x) = \int_a^b f(x) d\mu(x) = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Gdy ponadto  $\mu$  jest miarą produktową  $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ , będziemy również pisać

$$\int_A f d\mu = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_1(x_1) \cdot \dots \cdot d\mu_n(x_n)$$

zgodnie z twierdzeniem Fubiniego (c60). Gdy miara  $\mu$  dopuszcza przypadki, że przedziały  $\langle a; b \rangle$ ,  $(a; b)$ ,  $(a; b >$ ,  $\langle a; b >$  mogą mieć różne miary, będziemy pisać

$$\begin{aligned} \int_{(a; b)} f d\mu &= \int_{a^+}^b f(x) d\mu(x), & \int_{(a; b >} d\mu &= \int_{a^+}^{b^+} f(x) d\mu(x), \\ \int_{\langle a; b \rangle} f d\mu &= \int_a^{b^+} f(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

Przyjmujemy ponadto umowę, że

$$(164) \quad \int_b^a f(x) d\mu(x) = - \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

W przypadku gdy całka jest określona w przestrzeni z miarą  $(\mathfrak{R}^n, \mathcal{L}_n, \omega)$  będziemy ją oznaczać symbolami

$$\begin{aligned} \int_A f(x) dx &= \int_A \dots \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \int_A f(x) d\omega(x) \end{aligned}$$

Gdy ponadto  $A$  jest przedziałem o końcach  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_0^n$ ,  $a \leq b$ , piszemy

$$\int_A f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$$

W szczególności będziemy mieli do czynienia z całkami

$$\int_{-\infty}^b f(x) d\mu(x), \int_a^{\infty} f(x) d\mu(x)$$

lub

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu(x)$$

które będziemy rozpatrywać jako całki właściwe Lebesgue'a. Całki niewłaściwe Lebesgue'a wprowadzimy w § 229.

W przypadku gdy całka jest określona w przestrzeni z miarą  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \nu)$ , gdzie  $\nu$  jest miarą unormowaną, wtedy na mocy twierdzenia § 115 miara  $\nu$  jednoznacznie określa dystrybuantę  $F$  tej miary i, odwrotnie, każda dystrybuanta  $F$  jednoznacznie określa miarę  $\nu$ , której jest dystrybuantą. Wobec tej wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości całkę będziemy wtedy również oznaczać symbolami

$$\int_A f dF = \int_A f(x) dF(x) = \int_A f(x_1, \dots, x_n) dF(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f d\nu$$

a w przypadku, gdy  $A = \langle a; b \rangle$ , gdzie  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_0^n$ ,

$$\int_A f d\nu = \int_a^b f dF = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dF(x_1, \dots, x_n)$$

Symbol

$$\int_A f(x) dF(x)$$

jest w istocie używany na oznaczenie tzw. całki Lebesgue'a-Stieltjesa, która w przypadku, gdy  $F$  jest dystrybuantą miary  $\nu$ , jest równa całce Lebesgue'a względem miary  $\nu$ . Fakt ten pozwala w niniejszym opracowaniu pominąć w ogóle teorię całek Lebesgue'a-Stieltjesa, a symbole



$$\int_A f(x) dF(x) \text{ i } \int_A f(x) d\nu(x)$$

traktować jako równoznaczne.

### § 227. Własności całki Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej

Ponieważ całka Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^n$  jest szczególnym przypadkiem całki Lebesgue'a określonej w § 224, więc ma wszystkie własności (c1)–(c62) z § 225. Ponadto ma jeszcze inne własności, które podamy niżej.

(c63)  $I$  jest całką Riemanna funkcji  $f$  po obszarze ograniczonym i domkniętym  $A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{istnieje całka Lebesgue'a } \int_A f dx \wedge \int_A f dx = I$$

D] Dla uniknięcia nieporozumień symbolu  $\int$  będziemy używać tylko dla całki Lebesgue'a.

Założmy najpierw, że  $A$  jest przedziałem domkniętym

$$A = \langle a; b \rangle, \quad a, b \in \mathbb{R}^n, \quad a \leq b$$

Na mocy (10) z § 76

$$(*) \quad A = \langle a; b \rangle + \bigcup_{j=1}^n P_j^+$$

gdzie  $P_1^+, \dots, P_n^+$  są ścianami prawostronnymi przedziału  $A$ . Zgodnie z § 83 dokonajmy dla każdej liczby naturalnej  $m$  podziału normalnego przedziału  $\langle a; b \rangle$  na  $2^{mn}$  przystających przedziałów lewostronnie domkniętych  $A_1^{(m)}, \dots, A_{2^{mn}}^{(m)}$  poprzez przyjęcie, że podział  $(*)$  w § 83 jest podziałem na  $2^m$  równych części. Mamy

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \langle a; b \rangle = \sum_{i=1}^{2^{mn}} A_i^{(m)} \wedge \bigwedge_{i \in \{1, \dots, 2^{mn}\}} \text{vol}(\bar{A}_i^{(m)}) = \\ = \frac{1}{2^{mn}} \text{vol}(A)$$

gdzie  $\bar{A}_i^{(m)}$  oznacza domknięcie przedziału  $A_i^{(m)}$ . Niech

$$c_i^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in A_i^{(m)}} f(x) \wedge d_i^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \bar{A}_i^{(m)}} f(x)$$

a następnie

$$\bigwedge_{m \in \mathcal{N}} S_m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{2^{mn}} c_i^{(m)} \cdot \frac{1}{2^{mn}} \text{vol}(A) \wedge$$

$$\wedge S_m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{2^{mn}} d_i^{(m)} \cdot \frac{1}{2^{mn}} \text{vol}(A)$$

Z definicji całki Riemanna wynika, że

$$I = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m, \quad |I| < \infty$$

Wprowadźmy teraz funkcje

$$i \in \{1, \dots, 2^{mn}\} \} g_m \stackrel{A_i^{(m)}}{=} c_i^{(m)} \wedge h_m \stackrel{A_i^{(m)}}{=} d_i^{(m)}$$

czyli

$$g_m = \sum_{i=1}^{2^{mn}} c_i^{(m)} \chi_{A_i^{(m)}} \wedge h_m = \sum_{i=1}^{2^{mn}} d_i^{(m)} \chi_{A_i^{(m)}}$$

Funkcje  $g_m$  i  $h_m$  są zatem funkcjami mierzalnymi na zbiorze  $\langle a; b \rangle$  a ponadto na mocy ich definicji

$$(**) \bigwedge_{x \in \langle a; b \rangle} g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots \leq f(x) \leq \dots \leq h_2(x) \leq h_1(x)$$

Ciąg  $(g_m)$  jest zatem niemalejącym ciągiem funkcji mierzalnych na zbiorze  $\langle a; b \rangle$ , a ciąg  $(h_m)$  nierosnącym ciągiem funkcji mierzalnych na zbiorze  $\langle a; b \rangle$ . Jako monotoniczne oba ciągi są zbieżne na zbiorze  $\langle a; b \rangle$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m \stackrel{\langle a; b \rangle}{=} g \wedge \lim_{m \rightarrow \infty} h_m \stackrel{\langle a; b \rangle}{=} h$$

a na mocy twierdzenia § 198 funkcji  $g$  i  $h$  są mierzalne na zbiorze  $\langle a; b \rangle$ . Ponadto na tym zbiorze na mocy  $(**)$  jest

$$(***) \quad g \leq f \leq h$$

Zauważmy teraz, że na mocy twierdzenia § 120

$$\bigwedge_{m \in \mathcal{N}} \bigwedge_{i \in \{1, \dots, 2^{mn}\}} \omega(A_i^{(m)}) = \text{vol}(\bar{A}_i^{(m)}) = \frac{1}{2^{mn}} \text{vol}(A)$$

i wobec tego na mocy własności (c23)

$$\begin{aligned} \bigwedge_{m \in \mathcal{N}} \int_{\langle a; b \rangle} g_m dx &= \sum_{i=1}^{2^{mn}} c_i^{(m)} \omega(A_i^{(m)}) = \\ &= \sum_{i=1}^{2^{mn}} c_i^{(m)} \frac{1}{2^{mn}} \text{vol}(A) = S_m \wedge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \wedge \int_{\langle a; b \rangle} h_m dx &= \sum_{i=1}^{2^{mn}} d_i^{(m)} \omega(A_i^{(m)}) = \\ &= \sum_{i=1}^{2^{mn}} d_i^{(m)} \frac{1}{2^{mn}} \text{vol}(A) = S_m \end{aligned}$$

Na mocy własności (c40) i (c41) jest zatem

$$\int_{\langle a; b \rangle} g dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\langle a; b \rangle} g_m dx = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = I$$

$$\int_{\langle a; b \rangle} h dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\langle a; b \rangle} h_m dx = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = I$$

Ale na mocy (\*\*\*) i własności (c18)

$$I = \int_{\langle a; b \rangle} g dx \leq \int_{\langle a; b \rangle} f dx \leq \int_{\langle a; b \rangle} h dx = I$$

skąd

$$\int_{\langle a; b \rangle} f dx = I$$



Ponieważ na mocy § 120

$$\omega \left( \bigcup_{j=1}^n \rho_j^+ \right) = 0$$

wobec tego na mocy własności (c8) i (\*)

$$\int_A f \, dx = I$$

Założmy teraz, że  $A$  jest dowolnym obszarem ograniczonym i domkniętym w przestrzeni  $\mathcal{R}^n$  i dla funkcji  $f$  jest określona całka Riemanna po obszarze  $A$  równa  $I$ . Wobec tego obierzmy dowolny przedział domknięty  $B$  taki, że  $A \subset B$  i wprowadźmy funkcję

$$f_0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f & \text{na zbiorze } A \\ 0 & \text{na zbiorze } B - A \end{cases}$$

Całka Riemanna funkcji  $f_0$  po zbiorze  $B$  jest sumą całki Riemanna funkcji  $f$  po zbiorze  $A$ , a więc całki równej  $I$ , oraz całki Riemanna funkcji równej zeru po zbiorze  $B - A$ , a więc całki równej 0, i wobec tego całka Riemanna funkcji  $f_0$  po zbiorze  $B$  jest równa  $I$ .

Z drugiej strony mamy całkę Lebesgue'a, którą na mocy udowodnionego już przypadku możemy napisać jako

$$(\text{****}) \quad \int_B f_0 \, dx = I$$

Ale zbiór  $A$  jako domknięty jest borelowski, a więc  $A \in \mathcal{B}$ , podobnie  $B \in \mathcal{B}$ , a więc i  $B - A \in \mathcal{B}$ . Na mocy własności (c2) jest zatem

$$\int_B f_0 \, dx = \int_A f_0 \, dx + \int_{B-A} f_0 \, dx = \int_A f \, dx$$

a stąd i ze wzoru (\*\*\*\*)

$$\int_A f \, dx = I$$

co było do dowiedzenia.

(c64)  $I$  jest całką niewłaściwą Riemanna funkcji  $f$  na przedziale  $A \subset \mathbb{R}^n$  i istnieje całka niewłaściwa Riemanna funkcji  $|f|$  na tymże przedziale  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_A f(x) \, dx = I$$

D] Niech  $J$  oznacza całkę niewłaściwą Riemanna funkcji  $|f|$  na przedziale  $A$ . Zatem

$$J = \lim_{k \rightarrow \infty} J_k$$

gdzie  $J_k$  oznacza całkę właściwą Riemanna funkcji  $|f|$  na przedziale  $A_k \subset A$ , z tym, że

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \wedge A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Na mocy własności (c63) i (c43)

$$\int_A |f(x)| \, dx = J < \infty$$

Funkcja  $|f|$  jest zatem prawie całkowalna na przedziale  $A$  i na mocy własności (c25) funkcja  $f$  jest również prawie całkowalna na przedziale  $A$ , czyli istnieje skończona całka

$$\int_A f(x) \, dx$$

Ponieważ  $I = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k$ , gdzie  $I_k$  oznacza całkę właściwą Riemanna na przedziale  $A_k$ , więc na mocy własności (c63) i (c43) otrzymujemy własność żadaną.



(c65) Całkowanie przez podstawienie w przestrzeni euklidesowej.

Z] 1<sup>o</sup>  $A, B, G, H \in \mathcal{L}$  w przestrzeni z miarą  $(\mathcal{R}^n, \mathcal{L}, \omega)$ , gdzie  $\mathcal{L}$  jest  $\sigma$ -ciałem zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, a  $\omega$  miarą Lebesgue'a w przestrzeni  $\mathcal{R}^n$ .

2<sup>o</sup> Dane jest odwzorowanie jedno-jednoznaczne  $\tau$  takie, że

$$H = \tau(G) \wedge B = \tau(A)$$

3<sup>o</sup>  $H$  jest zbiorem otwartym niepustym.

4<sup>o</sup>  $B \subset H$

5<sup>o</sup>  $\tau(x) = (\tau_1(x), \dots, \tau_n(x))$ , gdzie  $\bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} \tau_k(x) = \tau_k(x_1, \dots, x_n)$  jest funkcją rzeczywistą skończoną ciągłą na zbiorze  $G$  i posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na zbiorze  $G$ .

6<sup>o</sup> Jakobian

$$\bigwedge_{x \in G} D(x) = D(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \tau_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial \tau_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

7<sup>o</sup> Istnieje całka

$$\int_B f(y) dy$$

gdzie  $f$  jest funkcją mierzalną  $\omega$  na zbiorze  $B$ .

$$\text{T]} \int_B f(y) dy = \int_A f(\tau(x)) \cdot |D(x)| dx$$

D] Na mocy twierdzenia § 169 zbiór  $G$  jest otwarty i niepusty, a na mocy wzoru (120)  $A \subset G$ .

W rachunku różniczkowym i całkowym dowodzi się, że funkcja  $\tau^{-1}$  jest przy danych założeniach ciągłą na zbiorze  $H$ .

Niech  $\mathcal{L}_G$  oznacza klasę wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a i zawartych w zbiorze  $G$ . Klasa  $\mathcal{L}_G$  jest  $\sigma$ -ciałem przestrzeni  $G$ , ponieważ

- $1^0$  spełnia warunek  $(\sigma 1)$  dla  $\sigma$ -ciał, gdyż  $G \in \mathcal{L}_G$  (300)  
 $2^0$  spełnia warunek  $(\sigma 2)$  dla  $\sigma$ -ciał, gdyż dla każdego zbioru  $C$  mierzalnego w sensie Lebesgue'a i zawartego w zbiorze  $G$  zbiór  $G - C$  jest również mierzalny w sensie Lebesgue'a i zawarty w zbiorze  $G$ ,  
 $3^0$  spełnia warunek  $(\sigma 3)$  dla  $\sigma$ -ciał, gdyż dla każdego ciągu  $C_1, C_2, \dots$  funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a i zawartych w zbiorze  $G$  zbiór  $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$  jest również mierzalny w sensie Lebesgue'a i zawarty w zbiorze  $G$ .

Niech

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \tau(\mathcal{L}_G)$$

Na mocy (135) jest też

$$\mathcal{L}_G = \tau^{-1}(\mathcal{N})$$

Wykażemy, że  $\mathcal{N}$  jest  $\sigma$ -ciałem przestrzeni  $H$ .

Ponieważ  $G \in \mathcal{L}_G$  i  $H = \tau(G)$ , więc  $H \in \mathcal{N}$  i klasa  $\mathcal{N}$  spełnia warunek  $(\sigma 1)$  dla  $\sigma$ -ciał.

Jeśli  $D \in \mathcal{N}$ , czyli istnieje taki zbiór  $C \in \mathcal{L}_G$ , że  $D = \tau(C)$ , to na mocy (137)

$$H - D = \tau(G) - \tau(C) = \tau(G - C) \wedge G - C \in \mathcal{L}_G$$

skąd  $H - D \in \mathcal{N}$ . Zatem klasa  $\mathcal{N}$  spełnia warunek  $(\sigma 2)$  dla  $\sigma$ -ciał. Analogicznie wykazujemy, że na mocy (122) klasa  $\mathcal{N}$  spełnia także warunek  $(\sigma 3)$ . Zatem klasa  $\mathcal{N}$  jest, istotnie,  $\sigma$ -ciałem przestrzeni  $H$ . Na mocy twierdzenia § 170 jest  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{N}$  gdzie  $\mathcal{B}_n$  oznacza  $\sigma$ -ciało zbiorów borelowskich przestrzeni  $\mathcal{R}^n$ .

Wprowadźmy teraz funkcję rzeczywistą

$$(i) \quad \bigwedge_{B \in \mathcal{N}} \mu(B) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau^{-1}(B)} |D(x)| dx$$

Na mocy własności (c 54)  $\mu$  jest miarą określoną na  $\sigma$ -ciele  $\mathcal{N}$ . Wykażemy, że miara  $\mu$  pokrywa się z miarą Lebesgue'a  $\omega$  w klasie zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a i zawartych w zbiorze  $H$ .



W rachunku całkowym dowodzi się, że dla każdego przedziału ograniczonego domkniętego  $P \subset H$

$$\text{vol}(P) = \int_{\tau^{-1}(P)} |D(x)| dx$$

Zatem na mocy twierdzenia § 120 miara  $\mu$  pokrywa się z miarą  $\omega$  w klasie wszystkich przedziałów ograniczonych domkniętych, zawartych w zbiorze  $H$ .

Zauważmy teraz, że dla  $B \in \mathcal{N}$

$$(ii) \quad \mu(B) = 0 \iff \omega(\tau^{-1}(B)) = 0$$

Istotnie, jeśli  $\omega(\tau^{-1}(B)) = 0$ , to na mocy (ci)  $\mu(B) = 0$ . Jeśli natomiast  $\mu(B) = 0$ , to na mocy (ci3) i założenia 6<sup>o</sup>, z którego wynika, że  $|D(x)| > 0$  na zbiorze  $G$ , musi być  $\omega(\tau^{-1}(B)) = 0$ .

Na mocy (ii) miary  $\mu$  i  $\omega$  pokrywają się w klasie wszystkich ścian przedziałów ograniczonych zawartych w zbiorze  $H$ . Wobec tego pokrywają się w klasie wszystkich przedziałów ograniczonych zawartych w zbiorze  $H$ .

Ponieważ dla przedziałów  $C$  i  $D$  iloczyn  $C \cap D$  też jest przedziałem, a  $C \cup D \subset H \Rightarrow C \subset H \wedge D \subset H$ , więc dla każdego  $C \cup D \subset H$

$$\mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D - C) = \mu(C) + \mu(D) - \mu(C \cap D)$$

i analogiczne wzory zachodzą dla miary Lebesgue'a  $\omega$ . Wobec tego miary  $\mu$  i  $\omega$  pokrywają się w klasie skończonych sum przedziałów ograniczonych, jeśli sumy te są zawarte w zbiorze  $H$ .

Ponieważ

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (C_1 \cup \dots \cup C_k) \wedge C_1 \subset (C_1 \cup C_2) \subset (C_1 \cup C_2 \cup C_3) \subset \dots$$

oraz

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \subset H \Rightarrow C_1, C_2, \dots \subset H \wedge C_1, (C_1 \cup C_2), (C_1 \cup C_2 \cup C_3), \dots \subset H$$



więc na mocy własności (m7) miary - miary  $\mu$  i  $\omega$  pokrywają się również w klasie przeliczalnych sum przedziałów ograniczonych, jeśli sumy te są zawarte w zbiorze  $H$ . Z twierdzenia § 92 wynika, że miary  $\mu$  i  $\omega$  pokrywają się w klasie wszystkich zbiorów otwartych zawartych w zbiorze  $H$ .

Niech teraz  $F$  będzie dowolnym zbiorem typu  $G_\delta$  zawartym w zbiorze  $H$ . Istnieją zatem zbiory otwarte  $G_1, G_2, \dots$  takie, że

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

Wynika stąd, że

$$F = F \cap H = \bigcap_{k=1}^{\infty} (G_1 \cap \dots \cap G_k \cap H)$$

gdzie na mocy twierdzenia § 60 zbiory  $G_1 \cap \dots \cap G_k \cap H$  są otwarte. Są one ponadto zawarte w zbiorze  $H$ . Jeśli  $\mu(F) < \infty$  i  $\omega(F) < \infty$ , to - na mocy własności (m8) miar - jest  $\mu(F) = \omega(F)$ . Zatem miary  $\mu$  i  $\omega$  pokrywają się w klasie wszystkich zbiorów typu  $G_\delta$ , jeśli są one ograniczone i zawarte w zbiorze  $H$ .

Niech

$$\bigwedge_{k \in \mathcal{N}} p_k \stackrel{\text{def}}{=} ((-k, \dots, -k); (k, \dots, k))$$

Jeśli  $F$  jest zbiorem typu  $G_\delta$  i  $F \subset H$ , to

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$$

gdzie

$$\bigwedge_{k \in \mathcal{N}} M_k \stackrel{\text{def}}{=} F \cap p_k \wedge M_1 \subset M_2 \subset \dots$$

Ponieważ

$$\bigwedge_{k \in \mathcal{N}} \mu(M_k) \leq \mu(p_k) < \infty \wedge \omega(M_k) \leq \omega(p_k) < \infty$$

a zbiory  $M_k$  są typu  $G_\delta$ , więc - na mocy własności (m7) miary  $\mu$  i  $\omega$  pokrywają się w klasie wszystkich zbiorów typu  $G_\delta$ .

Wykażemy teraz, że miary  $\mu$  i  $\omega$  pokrywają się w klasie wszystkich takich zbiorów  $Z \in \mathcal{L}_n$ ,  $Z \subset H$ , że  $\omega(Z) = 0$ . Dla każdego takiego zbioru istnieje zbiór  $Z_0$  typu  $G_\delta$ , który na mocy twierdzenia (A) z § 171 spełnia warunki

$$Z \subset Z_0 \wedge \omega(Z_0) = 0$$

Ponieważ zbiór  $Z^* \stackrel{\text{def}}{=} Z_0 \cap H$  jest też typu  $G_\delta$  i  $Z \subset Z^* \subset Z_0$  oraz w konsekwencji  $\omega(Z^*) = 0$ , więc dla każdego zbioru  $Z$  spełniającego warunki

$$(iii) \quad Z \in \mathcal{L}_n \wedge Z \subset H \wedge \omega(Z) = 0$$

istnieje zbiór  $Z^*$  typu  $G_\delta$  spełniający warunki

$$(iv) \quad Z \subset Z^* \wedge Z^* \subset H \wedge \omega(Z^*) = \mu(Z^*) = 0$$

Ponieważ

$$\mu(Z^*) = \int_{\tau^{-1}(Z^*)} |D(x)| dx = 0$$

więc na mocy (c13) i założenia 6<sup>o</sup>

$$\tau^{-1}(Z^*) = 0$$

Ponieważ dalej na mocy (iv) i (126)

$$\tau^{-1}(Z) \subset \tau^{-1}(Z^*)$$

więc zbiór  $\tau^{-1}(Z)$  ma miarę zewnętrzną Lebesgue'a zero i na mocy twierdzenia Carathéodory'ego z § 111

$$\tau^{-1}(Z) \in \mathcal{L}_G \wedge \omega(\tau^{-1}(Z)) = 0$$

Wobec tego każdy zbiór  $Z$  spełniający warunki (iii) należy do klasy  $\mathcal{N}'$ .

Niech teraz  $B$  będzie dowolnym zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a. Na mocy twierdzenia (A) z § 171 istnieją takie zbiory  $C$  i  $Z$ , że



$B + Z = C \wedge \omega(Z) = 0 \wedge C$  jest zbiorem typu  $G_\delta$

Jeśli  $B \subset H$ , to  $B \cap H = B$  i

$$B + Z \cap H = C \cap H$$

gdzie  $Z \cap H = H \wedge \omega(Z \cap H) = 0 \wedge C \cap H \subset H$  jest zbiorem typu  $G_\delta$ . Ponieważ wykazaliśmy już, że zbiory  $Z \cap H$  i  $C \cap H$  należą do klasy  $\mathcal{N}$  i  $\mu(Z \cap H) = \omega(Z \cap H)$  oraz  $\mu(C \cap H) = \omega(C \cap H)$ , więc

$$\mathcal{L}_H \subset \mathcal{N} \wedge \bigwedge_{B \in \mathcal{L}_H} \mu(B) = \omega(B)$$

gdzie  $\mathcal{L}_H$  jest klasą wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a i zawartych w zbiorze  $H$ . Przez analogię z klasą  $\mathcal{L}_G$ ,  $\mathcal{L}_H$  jest  $\sigma$ -ciałem przestrzeni  $H$ . Mamy zatem

$$(v) \quad \bigwedge_{B \in \mathcal{L}_H} \omega(B) = \int_{\tau^{-1}(B)} |D(x)| dx$$

gdzie na mocy twierdzenia § 199 funkcja  $|D(x)|$  jest mierzalna na zbiorze  $G$  względem  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{B}_n$ , a więc tym bardziej względem  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{L}$ , a tym samym jest mierzalna na zbiorze  $G$  względem  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{L}_G$ .

Wobec powyższego własność dowodzona wynika z własności (c53), gdzie należy przyjąć  $X = G$ ,  $S = \mathcal{L}_G$ ,  $\mu = \omega$ ,  $Y = H$ ,  $T = \mathcal{L}_H$ ,  $\nu = \omega$ ,  $q(x) = |D(x)|$ .

## § 228. Całka Lebesgue'a na prostej

Całka Lebesgue'a na prostej jest szczególnym przypadkiem całki Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej. Niech  $\mathcal{L}$  oznacza klasę wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a na prostej,  $\mathcal{B}$  klasę wszystkich zbiorów borelowskich na prostej, a  $\omega$  miarę Lebesgue'a na prostej. Symbolem  $\mu$  będziemy oznaczać dowolną miarę określoną na dowolnym  $\sigma$ -ciele  $S$  prostej  $\mathbb{R}$ .

Całka Lebesgue'a na prostej ma wszystkie własności całek Lebesgue'a (c1)-(c62) z § 225 oraz własności całek Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej (c63)-(c65) z § 227. Ponadto ma jeszcze inne własności, które podamy niżej.