

skąd

$$h_n(x) \stackrel{A}{=} f_n(x)$$

i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{A}{=} g_m(x)$$

W drugim przypadku z faktu, że ciąg (g_m) jest niemalejący na zbiorze A wynika, że

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{x \in A} g_m(x) < \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \bigwedge_{x \in A} \bigvee_{n_x \in A} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_x}} g_m(x) < f_n(x) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \bigwedge_{x \in A} \bigvee_{n_x \in A} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_x}} h_n(x) = g_m(x) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \stackrel{A}{=} g_m$$

Ale z nierówności $h_n \leq f_n$ wynika, że

$$\int_A h_n d\mu \leq \int_A f_n d\mu$$

skąd na mocy T2 i dowolności wskaźnika m

$$\bigwedge_{m \in \mathfrak{N}} \int_A g_m d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

Z uwagi na symetrię funkcji f_1, f_2, \dots i g_1, g_2, \dots otrzymujemy również nierówność odwrotną, a stąd też dowodzonego twierdzenia.

§ 224. Definicja całki Lebesgue'a

Niech będzie dana przestrzeń z miarą (X, \mathcal{S}, μ) , zbiór $A \in \mathcal{S}$ i dowolna funkcja mierzalna nieujemna na zbiorze A . Na mocy twierdzenia § 203 istnieje ciąg (f_n) niemalejący funkcji prostych mierzalnych na zbiorze A taki, że

$$(153) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{A}{=} f$$

Całką Lebesgue'a funkcji mierzalnej nieujemnej na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ nazywamy liczbę

$$(154) \quad \int_A f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

Twierdzenie § 223 gwarantuje nam jednoznaczność tego określenia. Zauważmy, że całka (154) dla funkcji mierzalnej i nieujemnej na zbiorze A zawsze istnieje (choć może przybierać wartość ∞) i jest zawsze nieujemna.

Niech teraz f będzie dowolną funkcją mierzalną na zbiorze A , a więc niekoniecznie nieujemną. Wprowadzamy funkcje

$$f^+ \stackrel{\text{def}}{=} \max(f, 0), \quad f^- \stackrel{\text{def}}{=} \max(-f, 0)$$

Funkcję f^+ będziemy nazywać częścią dodatnią, a f^- częścią ujemną funkcji f (niektórzy autorzy nazywają f^+ częścią nieujemną, a f^- częścią niedodatnią funkcji f). Zarówno f^+ jak i f^- są na mocy twierdzenia § 197 funkcjami mierzalnymi nieujemnymi na zbiorze A , a więc istnieją dla nich całki

$$(155) \quad \int_A f^+ d\mu, \quad \int_A f^- d\mu$$

określone wzorami

$$(156) \quad \begin{aligned} \int_A f^+ d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu, \text{ gdzie } f^+ \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \\ \int_A f^- d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A h_n d\mu, \text{ gdzie } f^- \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \end{aligned}$$

a (g_n) i (h_n) są ciągami niemalejącymi funkcji prostych mierzalnych na zbiorze A , określonymi wzorami

$$(157) \quad g_n = \sum_{k=1}^{p_n} c_{nk} \chi_{C_{nk}}, \quad h_n = \sum_{l=1}^{q_n} d_{nl} \chi_{D_{nl}}$$

gdzie

$$\begin{aligned} c_{n1}, \dots, c_{np_n}; d_{n1}, \dots, d_{nq_n} \in \mathbb{R} \wedge c_{n1}, \dots, c_{np_n}; d_{n1}, \dots, \\ \dots, d_{nq_n} \geq 0 \wedge c_{ni} \neq c_{nj} \text{ dla } i \neq j \wedge d_{ni} \neq d_{nj} \text{ dla } i \neq j \end{aligned}$$

$$c_{n1} + \dots + c_{np_n} = X \wedge d_{n1} + \dots + d_{nq_n} = X$$

$$A \cap C_{n1}, \dots, A \cap C_{np_n} \in \mathcal{S} \wedge A \cap D_{n1}, \dots, A \cap D_{nq_n} \in \mathcal{S}$$

Ponadto

$$(158) \quad \int_A g_n d\mu = \sum_{k=1}^{p_n} c_{nk} \mu(C_{nk} \cap A) \wedge$$

$$\wedge \int_A h_n d\mu = \sum_{l=1}^{q_n} d_{nl} \mu(D_{nl} \cap A)$$

Z definicji funkcji f^+ i f^- wynika, że

$$(159) \quad f = f^+ - f^-$$

Całką Lebesgue'a funkcji f mierzalnej na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ nazywamy liczbę

$$(160) \quad \int_A f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

Jak wynika z definicji, całka (160) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jednak z całek (155) jest skończona.

Funkcję f mierzalną na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ będziemy nazywać funkcją całkowaną w sensie Lebesgue'a na zbiorze A albo krócej funkcją całkowaną na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy obie całki (155) są skończone. Całka (160) w takim przypadku zawsze istnieje i jest skończona. Gdy ponadto $A = X$, funkcję f będziemy nazywać po prostu funkcją całkowaną w sensie Lebesgue'a lub krócej funkcją całkowaną.

Gdy będzie nam zależać na wskazaniu symbolu x elementów należących do zbioru A , będziemy całkę (160) oznaczać również symbolem

$$\int_A f(x) d\mu(x).$$

Wartość całki (160) nie ulega zmianie, gdy zbiór A zastąpimy takim zbiorem B , że

$$B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0$$

Istotnie, funkcje f , f^+ , f^- , g_1 , g_2 , ... oraz h_1 , h_2 , ... są mierzalne również na zbiorze B , ponadto

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \in \{1, \dots, p_n\}} B \cap C_{nk} = B \cap (A \cap C_{nk}) \in \mathcal{S} \wedge$$

$$\wedge (A-B) \cap C_{nk} = A \cap C_{nk} - B \cap C_{nk} \in \mathcal{S}$$

oraz

$$\bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{k \in \{1, \dots, p_n\}} \mu [C_{nk} \cap (A-B)] \leq \mu(A-B) = 0$$

skąd

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{k \in \{1, \dots, p_n\}} \mu(C_{nk} \cap A) = \mu(C_{nk} \cap B) + \mu[C_{nk} \cap (A-B)] = \\ & = \mu(C_{nk} \cap B) \stackrel{(158)}{=} \\ & \stackrel{(158)}{\Rightarrow} \bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} \int_A g_n d\mu = \sum_{k=1}^{p_n} c_{nk} \mu(C_{nk} \cap A) = \\ & = \sum_{k=1}^{p_n} c_{nk} \mu(C_{nk} \cap B) = \int_B g_n d\mu \stackrel{(156)}{=} \\ & \stackrel{(156)}{\Rightarrow} \int_A f^+ d\mu = \int_B f^+ d\mu \end{aligned}$$

Analogicznie wykazujemy, że

$$\int_A f^- d\mu = \int_B f^- d\mu$$

Wobec tego na mocy (160)

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu$$

Opierając się na powyższej własności całki Lebesgue'a uogólnimy teraz pojęcie tej całki na dowolne funkcje mierzalne μ na zbiorze.

Całką Lebesgue'a funkcji f mierzalnej μ na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ będziemy nazywać liczbę

$$(161) \quad \int_A f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_B f d\mu$$

gdzie B jest takim zbiorem, że

$$(162) \quad B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge f \text{ jest funkcją mierzalną na zbiorze } B$$

Powyższa definicja jest jednoznaczna, ponieważ

$$\bigwedge_{j=1,2} \bigvee_{B_j \in \mathcal{S}} B_j \subset A \wedge \mu(A-B_j) = 0 \wedge f$$

jest funkcją mierzalną na zbiorze $B_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \mathcal{S} \wedge B_1 \cup B_2 \subset A \wedge \mu[A - (B_1 \cup B_2)] \leq \mu(A-B_1) = 0 \wedge$$

$$\begin{aligned} \wedge \mu(B_1 \cup B_2 - B_1) &= \mu[(A - B_1) - (A - (B_1 \cup B_2))] \leq \mu(A - B_1) = 0 \wedge \\ \wedge \mu(B_1 \cup B_2 - B_2) &= 0 \wedge f \text{ jest funkcją mierzalną na zbiorze } B_1 \cup B_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{B_1} f^+ d\mu &= \int_{B_1 \cup B_2} f^+ d\mu = \int_{B_2} f^+ d\mu \wedge \\ \wedge \int_{B_1} f^- d\mu &= \int_{B_1 \cup B_2} f^- d\mu = \int_{B_2} f^- d\mu \Rightarrow \int_{B_1} f d\mu = \int_{B_2} f d\mu. \end{aligned}$$

Jak wynika z definicji, całka (161) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z całek

$$(163) \quad \int_B f^+ d\mu, \quad \int_B f^- d\mu$$

jest skończona.

Jeśli są spełnione warunki (162), to funkcję f całkowalną w sensie Lebesgue'a na zbiorze B będziemy nazywać funkcją prawie całkowalną w sensie Lebesgue'a na zbiorze A albo krócej funkcją prawie całkowalną na zbiorze A . Gdy ponadto $A = X$, to funkcję nazywamy funkcją prawie całkowalną w sensie Lebesgue'a albo po prostu funkcją prawie całkowalną. Funkcja całkowalna na zbiorze A jest oczywiście również funkcją prawie całkowalną na zbiorze A .

§ 225. Własności całki Lebesgue'a

W całym niniejszym rozdziale zakładamy, że mamy do czynienia z przestrzenią z miarą (X, \mathcal{S}, μ) .

$$(c1) \quad \mu(A) = 0 \wedge f \text{ jest funkcją rzeczywistą o dziedzinie będącej podzbiorem przestrzeni } X \Rightarrow \int_A f d\mu \text{ istnieje} \wedge \int_A f d\mu = 0$$

D] Jak wynika z definicji, każda funkcja rzeczywista jest mierzalna na zbiorze pustym. Wobec tego na mocy założenia $\mu(A) = 0$ każda funkcja rzeczywista o dziedzinie z przestrzeni X jest mierzalna μ na zbiorze A i

$$(*) \quad \int_A f d\mu = \int_Q f d\mu$$

gdzie Q jest zbiorem pustym.

Z definicji całka każdej funkcji prostej na zbiorze pustym jest równa zeru, skąd wynika, że całka każdej funkcji