

Lebesgue'a zero istnieje taki zbiór  $H$  typu  $G_\delta$ , że  $A \subset H$  i  $H$  ma miarę Lebesgue'a zero. Wykazaliśmy, że również  $\omega(H) = 0$ . Wobec tego dla każdego zbioru borelowskiego  $B$  o mierze Lebesgue'a zero jest również  $\omega(B) = 0$ .

Na mocy tegoż twierdzenia (A) z § 171 dla każdego zbioru borelowskiego  $A$  istnieje taki zbiór  $B$ , że  $A + B = H$ , gdzie  $B$  ma miarę Lebesgue'a zero, a zbiór  $H$  jest typu  $G_\delta$ , a więc borelowski. Zbiór  $B$  jest wtedy też borelowski, gdyż  $B = H - A$ . Ponieważ

$$\omega(A) + \omega(B) = \omega(H) \Rightarrow \omega(A) = \omega(H) - \omega(B) = \omega(H)$$

więc miara  $\omega$  pokrywa się z miarą Lebesgue'a w klasie wszystkich zbiorów borelowskich, co było do dowiedzenia.

### § 179. Wahanie funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej

Niech  $f$  będzie funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej, skończoną, określoną w przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ . Niech  $x_0, \dots, x_n$  będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych takim, że

$$(*) \quad a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

Niech

$$U^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{j : j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \wedge f(x_{j+1}) \geq f(x_j)\}$$

$$U^- \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots, n-1\} - U^+ = \{j : j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \wedge f(x_{j+1}) < f(x_j)\}$$

Wahaniem górnym funkcji  $f$  na przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$  nazywamy liczbę

$$v_{f, \langle a; b \rangle}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b} \sum_{j \in U^+} (f(x_{j+1}) - f(x_j))$$

Wahaniem dolnym funkcji  $f$  na przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$  nazywamy liczbę

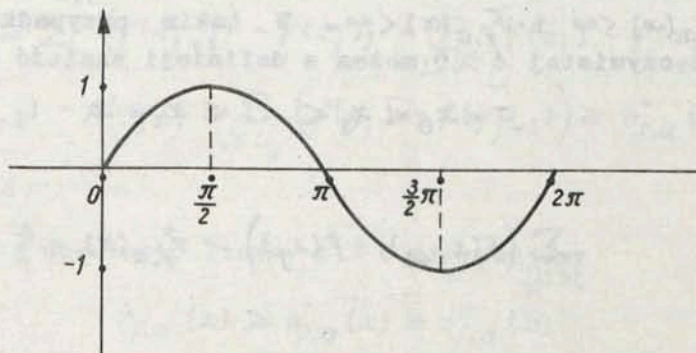
$$v_{f, \langle a; b \rangle}^- \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b} \sum_{j \in U^-} (f(x_j) - f(x_{j+1}))$$

Wahaniem bezwzględnym funkcji  $f$  na przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$  nazywamy liczbę

$$v_f, <a; b> \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\alpha = x_0 \ll x_1 \ll \dots \ll x_n = b} \sum_{j=1}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$$

Na przykład, wahanie górne funkcji  $\sin x$  na przedziale  $<0; 2\pi>$  jest równe 2 i uzyskujemy je jako sumę

$$(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) + (\sin 2\pi - \sin \frac{3}{2}\pi) = 2$$



Wahanie dolne jest równe 2 i uzyskujemy je jako

$$\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3}{2}\pi = 2$$

Wahanie bezwzględne jest w podanym przykładzie równe 4 i uzyskujemy je jako sumę

$$|\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0| + |\sin \frac{3}{2}\pi - \sin \frac{\pi}{2}| + |\sin 2\pi - \sin \frac{3}{2}\pi| = 4$$

Wahania górne, dolne i bezwzględne funkcji  $f$  można rozpatrywać jako funkcje prawego końca przedziału

$$v_{f,\alpha}^+(x) \stackrel{\text{def}}{=} v_{f, <a;x>}^+$$

$$v_{f,\alpha}^-(x) \stackrel{\text{def}}{=} v_{f, <a;x>}^-$$

$$v_{f,\alpha}(x) \stackrel{\text{def}}{=} v_{f, <a;x>} \quad \text{dla } x \in <a;b>$$

Funkcję  $f$  nazywamy funkcją o wahanu skończonym na przedziale  $<a;b>$  wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja  $v_{f,\alpha}(x)$  jest skończona, a funkcją o wahanu ograniczonym na przedziale  $<a;b>$  wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja  $v_{f,\alpha}(x)$  jest ograniczona.



## Twierdzenie (A)

$$v_{f,\alpha}(x) = v_{f,\alpha}^+(x) + v_{f,\alpha}^-(x)$$

D] Jeśli  $v_{f,\alpha}^+(x) = \infty$  albo  $v_{f,\alpha}^-(x) = \infty$ , to z definicji wynika, że  $v_{f,\alpha}(x) = \infty$  i powyższa równość jest spełniona.

Jeśli  $v_{f,\alpha}(x) = \infty$ , to z definicji jest  $v_{f,\alpha}^+(x) = \infty$  albo  $v_{f,\alpha}^-(x) = \infty$  i powyższa równość jest też spełniona.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy  $v_{f,\alpha}(x) < \infty$ , a zatem także  $v_{f,\alpha}^+(x) < \infty$  i  $v_{f,\alpha}^-(x) < \infty$ . W takim przypadku dla każdej liczby rzeczywistej  $\varepsilon > 0$  można z definicji znaleźć taki ciąg

$$\alpha = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = x$$

że

$$\sum_{j \in U_x^+} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) > v_{f,\alpha}^+(x) - \frac{\varepsilon}{2}$$

gdzie

$$U_x^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{j : j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \wedge f(x_{j+1}) \geq f(x_j)\}$$

Można również znaleźć taki ciąg

$$\alpha = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_m = x$$

że

$$\sum_{j \in U_y^-} (f(y_j) - f(y_{j+1})) > v_{f,\alpha}^-(x) - \frac{\varepsilon}{2}$$

gdzie

$$U_y^- \stackrel{\text{def}}{=} \{j : j \in \{0, 1, \dots, m-1\} \wedge f(y_{j+1}) < f(y_j)\}$$

Utwórzmy ciąg

$$\alpha = z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_p = x$$

przez nałożenie na siebie ciągów  $x_0, x_1, \dots, x_n$  i  $y_0, y_1, \dots, y_m$ , tzn.

$$\begin{array}{ll} \bigwedge_{j \in \{0, 1, \dots, n\}} & \bigvee_{k \in \{0, 1, \dots, p\}} & x_j = z_k, \\ \bigwedge_{j \in \{0, 1, \dots, m\}} & \bigvee_{k \in \{0, 1, \dots, p\}} & y_j = z_k, \end{array}$$

$$\bigwedge_{k \in \{0,1,\dots,p\}} \left( \bigvee_{j \in \{0,1,\dots,n\}} z_k = x_j \right) \vee \left( \bigvee_{j \in \{0,1,\dots,m\}} z_k = y_j \right)$$

i niech

$$U^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{j: j \in \{0, 1, \dots, p-1\} \wedge f(z_{j+1}) \geq f(z_j)\}$$

$$U^- \stackrel{\text{def}}{=} \{j: j \in \{0, 1, \dots, p-1\} \wedge f(z_{j+1}) < f(z_j)\}$$

Mamy

$$\begin{aligned} v_{f,\alpha}(x) &\geq \sum_{j \in U^+} (f(z_{j+1}) - f(z_j)) + \sum_{j \in U^-} (f(z_j) - f(z_{j+1})) \geq \\ &\geq \sum_{j \in U_x^+} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) + \sum_{j \in U_y^-} (f(y_j) - f(y_{j+1})) \geq v_{f,\alpha}^+(x) + \\ &+ v_{f,\alpha}^-(x) - \varepsilon \end{aligned}$$

Ze względu na dowolność liczby  $\varepsilon > 0$  otrzymujemy

$$v_{f,\alpha}(x) \geq v_{f,\alpha}^+(x) + v_{f,\alpha}^-(x)$$

Ponieważ z samych definicji wynika, że

$$v_{f,\alpha}(x) \leq v_{f,\alpha}^+(x) + v_{f,\alpha}^-(x)$$

więc otrzymujemy stąd tezę dowodzonego twierdzenia.

**Twierdzenie (B)**

**Z]** Funkcja  $f$  ma skończone wahanie na przedziale  $\langle a; b \rangle$ .

**T]**  $f(x) = f(a) + v_{f,\alpha}^+(x) - v_{f,\alpha}^-(x)$  (tzw. rozkład Jordana).

**D]** Z definicji wynika, że

$$\bigwedge_{x \in \langle a; b \rangle} v_{f,\alpha}(x) < \infty \wedge v_{f,\alpha}^+(x) < \infty \wedge v_{f,\alpha}^-(x) < \infty$$

Niech będzie dany dowolny ciąg  $(*)$ . Mamy wtedy

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{j \in U^+} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) + \sum_{j \in U^-} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) \leq \\ &\leq f(a) + v_{f,\alpha}^+(x) - \sum_{j \in U^-} (f(x_j) - f(x_{j+1})) \end{aligned}$$

Biorąc kres górny ostatniej sumy ze względu na wszystkie możliwe ciągi  $(*)$ , otrzymujemy

$$(**) \quad f(x) \leq f(a) + v_{f,\alpha}^+(x) - v_{f,\alpha}^-(x)$$



Ale mamy również

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{j \in U^+} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) - \sum_{j \in U^-} (f(x_j) - f(x_{j+1})) \geq \\ &\geq f(a) + \sum_{j \in U^+} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) - \bar{v}_{f,a}^-(x) \end{aligned}$$

Biorąc kres górny ostatniej sumy ze względu na wszystkie możliwe ciągi (\*), mamy

$$f(x) \geq f(a) + v_{f,a}^+(x) - \bar{v}_{f,a}^-(x)$$

skąd w połączeniu z (\*\*) otrzymujemy tezę dowodzonego twierdzenia.

**Twierdzenie (C)**

- Z]  $f$  jest funkcją o wahanu skończonym na przedziale  $\langle a; b \rangle$ .  
T]  $f$  lewostronnie ciągła w punkcie  $x_0 \in (a; b) \Rightarrow v_{f,a}^-, v_{f,a}^+$  lewostronnie ciągłe w punkcie  $x_0$ ;  
 $f$  prawostronnie ciągła w punkcie  $x_0 \in \langle a; b) \Rightarrow v_{f,a}^-, v_{f,a}^+$  prawostronnie ciągłe w punkcie  $x_0$ ;  
 $f$  ciągła w przedziale  $\langle a; b \rangle \Rightarrow v_{f,a}^-, v_{f,a}^+, \bar{v}_{f,a}^-$  ciągłe w przedziale  $\langle a; b \rangle$ .  
D] Załóżmy, że funkcja  $f$  jest lewostronnie ciągła w punkcie  $x_0 \in (a; b)$ , a funkcja  $v_{f,a}^-$  nie jest lewostronnie ciągła w tym punkcie. Ponieważ  $v_{f,a}^-$  jest funkcją niemalejącą, więc

$$(i) \quad \bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{a \leq x \leq x_0} v_{f,a}^-(x_0) - v_{f,a}^-(x) \geq \varepsilon$$

Natomiast z lewostronnej ciągłości funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  wynika, że

$$(ii) \quad \bigvee_{\substack{x_1 \in \mathbb{R} \\ x_1 < x_0}} \bigwedge_{x_1 \leq x \leq x_0} |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Z nierówności (i) wynika istnienie takiego ciągu

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{m_1} < x_0$$

że

$$\sum_{j=2}^{m_1} |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(x_{m_1}) - f(x_0)| > \frac{2}{3} \varepsilon$$

skąd na mocy (ii)

$$\sum_{j=2}^{m_1} |f(x_j) - f(x_{j-1})| > \frac{\varepsilon}{3}$$

Ale na mocy (i)

$$\bigwedge_{x_{m_1} \leq x < x_0} v_{f,\alpha}(x_0) - v_{f,\alpha}(x) \geq \varepsilon$$

skąd wynika istnienie takiego ciągu

$$x_{m_1} < x_{m_1+1} < \dots < x_{m_2} < x_0$$

że

$$\sum_{j=m_1+1}^{m_2} |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(x_{m_2}) - f(x_0)| > \frac{2}{3} \varepsilon$$

skąd na mocy (ii)

$$\sum_{j=m_1+1}^{m_2} |f(x_j) - f(x_{j-1})| > \frac{\varepsilon}{3}$$

Postępując dalej analogicznie otrzymujemy nieskończony ciąg rosnący  $x_1, x_2, \dots$  oraz ciąg rosnący liczb naturalnych  $m_1, m_2, \dots$  takie, że

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=m_n+1}^{m_{n+1}} |f(x_j) - f(x_{j-1})| > \frac{\varepsilon}{3}$$

skąd

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{m_n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| > n \cdot \frac{\varepsilon}{3}$$

a w konsekwencji  $v_{f,\alpha}(x_0) = \infty$  wbrew założeniu. Zatem jeśli funkcja  $f$  jest lewostronnie ciągła w punkcie  $x_0 \in (a; b)$ , to funkcja  $v_{f,\alpha}$  też jest lewostronnie ciągła w tym punkcie.

Z twierdzeń (A) i (B) wynika, że

$$v_{f,\alpha}^+(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(\alpha) + v_{f,\alpha}(x)),$$

$$v_{f,\alpha}^-(x) = \frac{1}{2} (f(\alpha) - f(x) + v_{f,\alpha}(x))$$

a stąd, że jeżeli funkcja  $f$  jest lewostronnie ciągła w punkcie  $x_0 \in (a; b)$  i wobec tego - jak już wykazaliśmy - funkcja  $v_{f,\alpha}$  jest również lewostronnie ciągła w tym punkcie, to funkcje  $v_{f,\alpha}^+$  i  $v_{f,\alpha}^-$  są także lewostronnie ciągłe w punkcie  $x_0$ .



Analogicznie dowodzimy, że jeżeli funkcja  $f$  jest prawostronnie ciągła w punkcie  $x_0 \in \langle \alpha; b \rangle$ , to funkcje  $v_{f,\alpha}^-$ ,  $v_{f,\alpha}^+$ ,  $v_{f,\alpha}^-$  są także prawostronnie ciągłe w punkcie  $x_0$ .

Ponieważ ciągłość w przedziale  $(\alpha; b)$  jest równoważna ciągłości zarówno lewo- jak i prawostronnej w każdym punkcie  $x_0 \in (\alpha; b)$ , więc ostatnia część tezy wynika bezpośrednio z dwu pierwszych. Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

### Określenie

Mówimy, że własność  $\alpha$  jest spełniona prawie wszędzie w przedziale  $A \subset \mathbb{R}$ , jeśli zbiór wszystkich punktów przedziału  $A$ , w których własność  $\alpha$  nie jest spełniona, ma miarę Lebesgue'a zero.

### Twierdzenie (D)

Funkcja o wahanu skończonym na przedziale  $\langle \alpha; b \rangle$  ma pochodną prawie wszędzie w tym przedziale.

D] Dowód podzielimy na trzy części L1, L2, L3, z których pierwszą będzie stanowić twierdzenie Vitaliego, drugą oddzielny lemat, a trzecią właściwy dowód twierdzenia (D). Zanim przejdziemy do dowodu części L1, wprowadzimy jeszcze jedno określenie.

Mówimy, że klasa  $\mathcal{K}$  przedziałów domkniętych niezdegenerowanych na prostej pokrywa zbiór  $Z \subset \mathbb{R}$  w sensie Vitaliego wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x \in Z} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{A \in \mathcal{K}} x \in A \wedge \omega(A) \leq \varepsilon$$

gdzie  $\omega$  jest miarą Lebesgue'a na prostej, czyli  $\omega(A)$  oznacza długość przedziału  $A$ .

### L1] Twierdzenie Vitaliego

Jeśli klasa  $\mathcal{K}$  przedziałów domkniętych niezdegenerowanych pokrywa zbiór  $Z \subset \mathbb{R}$  w sensie Vitaliego, to klasa ta zawiera ciąg przedziałów domkniętych  $P_1, P_2, \dots$  taki, że

$$\omega\left(Z - \sum_{j=1}^m P_j\right) = 0, \quad m \in \mathbb{N} \vee m = \infty$$

D] Przeprowadzimy dowód najpierw dla przypadku, gdy zbiór  $Z$  jest ograniczony. Można wtedy założyć, że wszystkie przedziały należą-

ce do klasy  $\mathcal{K}$  są zawarte w pewnym ograniczonym przedziale otwartym  $G \supset \mathbb{Z}$ . Gdyby tak nie było, można by rozpatrywać podklasę  $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{K}$  złożoną tylko z tych wszystkich przedziałów klasy  $\mathcal{K}$ , które leżą wewnątrz przedziału  $G$ . Na mocy definicji klasa  $\mathcal{K}^*$  pokrywałaby również zbiór  $\mathbb{Z}$  w sensie Vitaliego, a żądany podciąg przedziałów domkniętych  $p_1, p_2, \dots$  znaleziony dla klasy  $\mathcal{K}^*$  byłby również żądanym podciągiem dla klasy  $\mathcal{K}$ .

Ciąg  $p_1, p_2, \dots$  definiujemy przez indukcję. Niech

$$d_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{p \in \mathcal{K}} \omega(p)$$

i niech  $p_1$  będzie dowolnym przedziałem domkniętym spełniającym warunki

$$p_1 \in \mathcal{K} \wedge \omega(p_1) > \frac{d_1}{2}$$

Jeśli zostały już zdefiniowane liczby  $d_1, \dots, d_k$  i przedziały domknięte  $p_1, \dots, p_k$ , to

$$d_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{p \in \mathcal{K} \\ p \cap (p_1 + \dots + p_k) = 0}} \omega(p)$$

a jako  $p_{k+1}$  przyjmujemy dowolny przedział domknięty spełniający warunki

$$p_{k+1} \in \mathcal{K} \wedge p_{k+1} \cap (p_1 + \dots + p_k) = 0 \wedge \omega(p_{k+1}) > \frac{d_{k+1}}{2}$$

Gdyby takiej liczby  $d_{k+1}$  już nie było, oznaczałoby to, że

$$p_1 + \dots + p_k \supset \mathbb{Z}$$

i teza twierdzenia byłaby prawdziwa. Wystarczy zatem rozpatrzyć przypadek, gdy istnieje nieskończony ciąg liczb  $d_1, d_2, \dots$  i odpowiadających im przedziałów domkniętych  $p_1, p_2, \dots$ . Ze względu na to, że przedziały  $p_1, p_2, \dots$  są rozłączne, suma  $\frac{1}{2}(d_1 + d_2 + \dots)$  nie może przewyższać długości przedziału  $G$  i wobec tego

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

Niech



$$Y \stackrel{\text{def}}{=} Z - \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j$$

Przeprowadzimy dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności. Założmy zatem, że

$$\omega(Y) > 0$$

Wprowadźmy też ciąg przedziałów domkniętych  $\rho_1^*, \rho_2^*, \dots$  takich, że dla każdego  $j \in \mathbb{N}$  środek przedziału  $\rho_j^*$  jest środkiem przedziału  $\rho_j$ , ale długość przedziału  $\rho_j^*$  jest pięciokrotnie większa od długości przedziału  $\rho_j$ , tzn.

$$\bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \omega(\rho_j^*) = 5 \omega(\rho_j)$$

Ponieważ

$$\sum_{j=1}^{\infty} \omega(\rho_j) = \omega\left(\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j\right) < \omega(G) < \infty$$

$$\omega\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \rho_j^*\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \omega(\rho_j^*) = 5 \sum_{j=1}^{\infty} \omega(\rho_j) < \infty$$

więc

$$\bigwedge_{\varepsilon \in \mathbb{R}} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \omega\left(\bigcup_{j=N}^{\infty} \rho_j^*\right) \leq \sum_{j=N}^{\infty} \omega(\rho_j^*) = 5 \sum_{j=N}^{\infty} \omega(\rho_j) < \varepsilon$$

i w szczególności

$$\bigvee_{N \in \mathbb{N}} \omega\left(\bigcup_{j=N}^{\infty} \rho_j^*\right) < \omega(Y)$$

Wynika stąd, że

$$Y - \bigcup_{j=N}^{\infty} \rho_j^* \neq \emptyset$$

czyli

$$(iv) \quad \bigvee_{x_0 \in \mathbb{R}} x_0 \in Y - \bigcup_{j=N}^{\infty} \rho_j^* < Y < Z - \sum_{j=1}^{N-1} \rho_j$$

Ponieważ klasa  $\mathcal{K}$  pokrywa zbiór  $Z$  w sensie Vitaliego, więc

$$(v) \quad \bigvee_{\rho_0 \in \mathcal{K}} x_0 \in \rho_0 \wedge \rho_0 \cap (\rho_1 + \dots + \rho_{N-1}) = \emptyset$$

Gdyby

$$\bigwedge_{j \in \mathfrak{N}} \rho_0 \cap \rho_j = 0$$

to musiałyby być

$$\bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} \omega(\rho_0) \leq d_n$$

i na mocy (iii)

$$\omega(\rho_0) = 0$$

wbrew założeniu, że przedział  $\rho_0$  jest niezdegenerowany. Niech zatem  $n_0$  będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że

$$(vi) \quad \rho_0 \cap \rho_{n_0} \neq 0$$

Z (v) wynika, że  $n_0 \geq N$ , a z (iv), że  $x_0 \in \rho_0 - \rho_{n_0}^*$ . Zatem przedział  $\rho_0$  zawiera punkt nie należący do  $\rho_{n_0}^*$  oraz na mocy (vi) punkt należący do  $\rho_{n_0}$ , wobec czego

$$\omega(\rho_0) \geq 2\omega(\rho_{n_0}) > d_{n_0}$$

Ale na mocy (v) i definicji liczb  $d_1, d_2, \dots$  musi być

$$\omega(\rho_0) \leq d_{n_0}$$

skąd sprzeczność. W ten sposób twierdzenie Vitaliego w przypadku zbioru ograniczonego  $\mathcal{Z}$  zostało udowodnione.

Jeśli zbiór  $\mathcal{Z}$  jest nieograniczony, to  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \dots$ , gdzie

$$\bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} \mathcal{Z}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z} \cap Q_k \wedge Q_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle -k; -k+1 \rangle + \langle k-1; k \rangle$$

i zbiory  $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots$  są ograniczone. Na mocy przypadku już udowodnionego i twierdzenia § 161

$$\bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} \bigvee_{\substack{\rho_{k_1}, \rho_{k_2}, \dots \in \mathcal{X} \\ \rho_{k_1}, \rho_{k_2}, \dots \subset Q_k^0}} \omega(\mathcal{Z} \cap Q_k^0 - \sum_{j=1}^{m_k} \rho_{k_j}) = 0$$

$$m_k \in \mathfrak{N} \vee m_k = \infty$$

gdzie  $Q_k^0$  oznacza wnętrze zbioru  $Q_k$ . Ponieważ



$$Z_k = Z \cap Q_k^0 + Z \cap (\{-k\} + \{k-1\})$$

więc

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \omega(Z_k - \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}) = 0$$

skąd

$$\omega(Z - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(Z_k - \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}) = 0$$

Ponieważ przedziały  $P_{kj}$  można ustawić w ciąg  $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{13}, P_{22}, P_{31}, \dots$  twierdzenie Vitaliego zostało udowodnione.

**L2]** **Z]** Funkcja rzeczywista skończona  $f$  jest niemalejąca w przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ .

$$\text{[T]} \quad \omega(\{x: x \in (a; b) \wedge D^- f(x) = \infty\}) = 0$$

$$\omega(\{x: x \in (a; b) \wedge D_- f(x) = \infty\}) = 0$$

$$\omega(\{x: x \in (a; b) \wedge D^+ f(x) = \infty\}) = 0$$

$$\omega(\{x: x \in (a; b) \wedge D_+ f(x) = \infty\}) = 0$$

gdzie

$$D^- f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \nearrow 0} \sup \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad D_- f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \nearrow 0} \inf \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D^+ f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \searrow 0} \sup \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad D_+ f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \searrow 0} \inf \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

nazywają się po pochodnymi Diniego funkcji  $f$ , a w szczególności  $D^- f$  górną lewą pochodną Diniego funkcji  $f$ ,  $D_- f$  dolną lewą,  $D^+ f$  górną prawą i  $D_+ f$  dolną prawą pochodną Diniego funkcji  $f$ . (Pochodna zwykła funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  istnieje wtedy, i tylko wtedy, gdy wszystkie 4 pochodne Diniego są skończone i równe w punkcie  $x_0$ , co wynika z definicji podanych w § 44, § 72 i § 73).

**D]** Niech

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in (a; b) \wedge D^- f(x) = \infty\}$$

Wtedy na mocy twierdzenia (D) z § 167

$$(vii) \quad \bigwedge_{x \in Z} \bigwedge_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r > 0}} \bigvee_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h < 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > r \implies$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{x \in \mathcal{Z}} \bigwedge_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r > 0}} \bigvee_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h < 0}} \frac{f(x) - f(x+h)}{r} > -h = \omega(\langle x+h; x \rangle)$$

Niech  $\mathcal{X}_r$  oznacza klasę wszystkich przedziałów  $\langle x+h; x \rangle \subset \langle a; b \rangle$ , dla których przy ustalonej liczbie  $r$  jest spełniona nierówność (vii). Klasa  $\mathcal{X}_r$  pokrywa zbiór  $\mathcal{Z}$  w sensie Vitaliego. Wobec tego na mocy L1 klasa  $\mathcal{X}_r$  zawiera podciąg  $\rho_1, \rho_2, \dots$  taki, że

$$(viii) \quad \omega\left(\mathcal{Z} - \sum_{j=1}^m \rho_j\right) = 0$$

gdzie  $m \in \mathbb{N}$  albo  $m = \infty$ . Mamy na mocy (vii)

$$\omega\left(\sum_{j=1}^m \rho_j\right) = \sum_{j=1}^m \omega(\rho_j) < \frac{f(b) - f(a)}{r}$$

gdyż  $f$  jest funkcją niemalejącą. Ponieważ na mocy (viii)

$$\omega(\mathcal{Z}) \leq \omega\left(\sum_{j=1}^m \rho_j\right)$$

a liczbę  $r$  możemy obrać dowolnie dużą, więc

$$\omega(\mathcal{Z}) = 0$$

W ten sposób pierwsza część tezy została udowodniona. Pozostałe dowodzi się analogicznie.

### L3 Twierdzenie (D)

D Przeprowadzimy dowód najpierw dla przedziału ograniczonego  $\langle a; b \rangle$  i dla funkcji  $f$  niemalejącej. Na mocy twierdzenia (B) z § 167 jest

$$D_+ f \leq D^+ f$$

Niech

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in \langle a; b \rangle \wedge D_+ f(x) < D^+ f(x)\}$$

Ponieważ funkcja  $f$  jest niemalejąca, więc

$$\bigwedge_{x \in \langle a; b \rangle} D_+ f(x) \geq 0 \wedge D^+ f(x) \geq 0$$

i wobec tego



$$\bigwedge_{x \in A} \bigvee_{\substack{p, q \in \mathbb{R} \\ 0 < p < q}} D_+ f(x) < p < q < D^+ f(x)$$

Niech

$$B(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in (a; b) \wedge D_+ f(x) < p < q < D^+ f(x)\}$$

Wtedy

$$(ix) \quad A = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbb{R} \\ 0 < p < q}} B(p, q)$$

gdzie ze względu na wymierność liczb  $p$  i  $q$  liczba składników sumy jest na mocy twierdzenia § 15 przeliczalna.

Niech  $Q$  będzie dowolnym zbiorem otwartym takim, że

$$B(p, q) \subset Q$$

Na mocy twierdzenia (D) z § 167 zastosowanego do  $D_+ f$

$$\begin{aligned} (x) \quad & \bigwedge_{x \in B(p, q)} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ 0 < h < \delta \\ x+h \in Q}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < p \Rightarrow \\ & \Rightarrow \bigwedge_{x \in B(p, q)} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{\substack{\langle x; x+h \rangle \subset Q \\ 0 < h < \delta}} \forall f, \langle x; x+h \rangle = f(x+h) - f(x) < ph = \\ & = p \cdot \omega(\langle x; x+h \rangle) \end{aligned}$$

Niech  $\mathcal{K}$  oznacza klasę przedziałów domkniętych  $\langle x; x+h \rangle$  takich, że

$$h > 0 \wedge x \in B(p, q) \wedge \langle x; x+h \rangle \subset Q \wedge$$

$$\wedge \forall f, \langle x; x+h \rangle \leq p \cdot \omega(\langle x; x+h \rangle)$$

Na mocy (x) klasa  $\mathcal{K}$  pokrywa zbiór  $B(p, q)$  w sensie Vitaliego i zgodnie z L1 zawiera podciąg  $J_1 = \langle \alpha_1; \beta_1 \rangle$ ,  $J_2 = \langle \alpha_2; \beta_2 \rangle$ , ... przedziałów domkniętych niezdegenerowanych taki, że

$$(xi) \quad \omega(B(p, q) - \sum_{j=1}^m J_j) = 0, \quad m \in \mathbb{N} \vee m = \infty$$

Niech

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m (\alpha_j; \beta_j)$$

Z definicji jest

$$J_1, J_2, \dots \subset Q \wedge F \subset Q \wedge \omega(F) = \omega\left(\sum_{j=1}^m J_j\right)$$

a na mocy (x)

$$(xii) \quad \sum_{j=1}^m v_{f, J_j} < p \cdot \omega(F) \leq p \omega(Q)$$

Niech

$$C \stackrel{\text{def}}{=} B(p, q) \cap F$$

Na mocy twierdzenia (D) z § 167 zastosowanego do  $D^+f$

$$(xiii) \quad \bigwedge_{x \in B(p, q)} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ 0 < k < \delta \\ x+k \in b}} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} > q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{x \in C} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{\substack{\langle x; x+k \rangle \subset F \\ 0 < k < \delta}} v_{f, \langle x; x+k \rangle} = \\ = f(x+k) - f(x) > qk = q\omega(\langle x; x+k \rangle)$$

Niech  $\mathcal{M}$  oznacza klasę przedziałów domkniętych  $\langle x; x+k \rangle$  takich, że

$$k > 0 \wedge x \in C \wedge \langle x; x+k \rangle \subset F \wedge v_{f, \langle x; x+k \rangle} > q\omega(\langle x; x+k \rangle)$$

Na mocy (xiii) klasa  $\mathcal{M}$  pokrywa zbiór  $C$  w sensie Vitaliego i zgodnie z L1 zawiera ciąg  $J_1, J_2, \dots$  przedziałów domkniętych niezdegenerowanych takich, że

$$(xiv) \quad \omega\left(C - \sum_{i=1}^s J_i\right) = 0, \quad s \in \mathbb{N} \vee s = \infty$$

Niech

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^s J_i$$

Na mocy (xiii)

$$\sum_{i=1}^s v_{f, J_i} > q\omega(H)$$

a ponieważ  $J_1, J_2, \dots \subset F$  i wobec tego  $H \subset F$ , więc na mocy (xii)

$$(xv) \quad q\omega(H) < \sum_{i=1}^s v_{f, J_i} \leq \sum_{j=1}^m v_{f, J_j} < p\omega(Q)$$



Niech  $\omega_e$  oznacza miarę zewnętrzną Lebesgue'a będącą na mocy twierdzenia § 117 miarą zewnętrzną Caratheodory'ego. Na mocy własności (z 7) z § 110 mamy

$$\omega_e(B(p, q)) \leq \omega_e(C) + \omega_e(B(p, q) - F)$$

i na mocy (xi)

$$(xvi) \quad \omega_e(B(p, q)) \leq \omega_e(C)$$

Analogicznie

$$\omega_e(C) \leq \omega_e(C \cap H) + \omega_e(C - H)$$

i na mocy (xiv) oraz własności (z1) z § 110

$$\omega_e(C) \leq \omega_e(C \cap H) \leq \omega_e(H) = \omega(H)$$

Biorąc pod uwagę (xvi) otrzymujemy

$$\omega_e(B(p, q)) \leq \omega(H)$$

i na mocy (xv)

$$q \cdot \omega_e(B(p, q)) < p \omega(q)$$

Ale na mocy definicji (22) miary zewnętrznej Lebesgue'a z § 116

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{B = \bigcup_{r=1}^{\infty} P_r \\ B \supset B(p, q)}} \omega(B) - \omega_e(B(p, q)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

gdzie  $P_1, P_2, \dots$  są ograniczonymi przedziałami domkniętymi. Natomiast na mocy twierdzenia (A) z § 171

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{Q \text{ otwarty} \\ Q \supset B}} \omega(Q) - \omega(B) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sumując stronami ostatnie dwie nierówności otrzymujemy

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{Q \text{ otwarty} \\ Q \supset B(p, q)}} \omega(Q) - \omega_e(B(p, q)) < \varepsilon$$

wobec czego

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{Q \text{ otwarty} \\ Q \supset B(p, q)}} q \cdot \omega_e(B(p, q)) < p \cdot \omega_e(B(p, q)) + p\varepsilon.$$

skąd

$$q \cdot \omega_e(B(p, q)) \leq p \cdot \omega_e(B(p, q))$$

Ponieważ z założenia  $p < q$ , otrzymujemy stąd

$$\omega_e(B(p, q)) = 0$$

i na mocy twierdzenia Caratheodory'ego z § 111

$$\omega(B(p, q)) = 0$$

skąd na mocy (ix)

$$(xvii) \quad \omega(A) = 0$$

czyli

$$(xviii) \quad D_+ f = D^+ f \text{ prawie wszędzie w przedziale } \langle a; b \rangle$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$(xix) \quad D_- f = D^- f \text{ prawie wszędzie w przedziale } \langle a; b \rangle$$

Niech teraz

$$A_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in \langle a; b \rangle \wedge D_- f(x) < D^+ f(x)\}$$

Ponieważ funkcja  $f$  jest niemalejąca, więc

$$\bigwedge_{x \in \langle a; b \rangle} D_- f(x) \geq 0 \wedge D^+ f(x) \geq 0$$

i wobec tego

$$\bigwedge_{x \in A_1} \bigvee_{\substack{p, q \in \mathcal{M} \\ 0 < p < q}} D_- f(x) < p < q < D^+ f(x)$$

Niech

$$B_1(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in \langle a; b \rangle \wedge D_- f(x) < p < q < D^+ f(x)\}$$

Wtedy

$$A_1 = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathcal{M} \\ 0 < p < q}} B_1(p, q)$$

Niech  $Q_1$  będzie dowolnym zbiorem otwartym takim, że

$$B_1(p, q) \subset Q_1$$

Na mocy twierdzenia (D) z § 167 zastosowanego do  $D_- f$



$$\begin{aligned}
 & \bigwedge_{x \in B_1(p,q)} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ 0 < -h < \delta \\ \alpha \leq x-h}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < p \implies \\
 & \implies \bigwedge_{x \in B_1(p,q)} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{\substack{\langle x+h; x \rangle \subset Q_1 \\ 0 < -h < \delta}} v_{f, \langle x+h; x \rangle} = f(x) - f(x+h) < -ph = \\
 & = p\omega(\langle x+h; x \rangle)
 \end{aligned}$$

Niech  $\mathcal{K}_1$  oznacza klasę przedziałów domkniętych  $\langle x+h; x \rangle$  takich, że

$$h < 0 \wedge x \in B_1(p, q) \wedge \langle x+h; x \rangle \subset Q_1 \wedge v_{f, \langle x+h; x \rangle} < p \omega(\langle x+h; x \rangle)$$

Na mocy L1 klasa  $\mathcal{K}_1$ , pokrywająca zbiór  $B_1(p, q)$  w sensie Vitaliego, zawiera podciąg  $J_1^1, J_2^1, \dots$  przedziałów domkniętych niezdegenerowanych takich, że

$$\omega(B_1(p, q) - \sum_{j=1}^m J_j^1) = 0, \quad m \in \mathbb{N} \vee m = \infty$$

Niech

$$\bigwedge_{j \in \{1, \dots, m\}} J_j^1 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \alpha_j^1; \beta_j^1 \rangle, \quad F_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m (\alpha_j^1; \beta_j^1)$$

Analogicznie do (xii) mamy

$$\sum_{j=1}^m v_{f, J_j^1} < p \cdot \omega(F_1) \leq p \cdot \omega(Q_1)$$

i następnie analogicznie do (xvii) otrzymujemy

$$\omega(A_1) = 0$$

skąd na mocy definicji zbioru  $A_1$

$$(xx) \quad D_- f \geq D^+ f \text{ prawie wszędzie w przedziale } \langle a; b \rangle$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$(xxi) \quad D_+ f \geq D^- f \text{ prawie wszędzie w przedziale } \langle a; b \rangle$$

Z (xviii), (xix), (xx) i (xxi) wynika, że

$$D_- f = D^- f = D_+ f = D^+ f \text{ prawie wszędzie w przedziale } \langle a; b \rangle$$

a na mocy L2

$D_- f = D^- f = D_+ f = D^+ f < \infty$  prawie wszędzie w przedziale  $\langle a; b \rangle$

skąd wynika, że funkcja  $f$  ma pochodną prawie wszędzie w przedziale  $\langle a; b \rangle$ .

Gdy przedział  $\langle a; b \rangle$  jest nieograniczony, wtedy

$$\langle a; b \rangle = \bigcup_{j=1}^{\infty} \langle a_j; b_j \rangle$$

gdzie przedziały  $\langle a_1; b_1 \rangle$ ,  $\langle a_2; b_2 \rangle$ , ... są ograniczone. Funkcja  $f$  ma w każdym z tych przedziałów wahanie skończone, a więc na mocy przypadku już udowodnionego ma pochodną prawie wszędzie w każdym z tych przedziałów. Zatem ma również prawie wszędzie pochodną w przedziale  $\langle a; b \rangle$ .

Gdy funkcja  $f$  nie jest funkcją niemalejącą, korzystamy z rozkładu Jordana z twierdzenia (B). Jeśli mianowicie  $f$  jest funkcją o wahanu skończonym na przedziale  $\langle a; b \rangle$ , to jej wahanie górne  $v_{f,a}^+(x)$  i dolne  $v_{f,a}^-(x)$  są funkcjami niemalejącymi o wahanu skończonym na przedziale  $\langle a; b \rangle$  i wobec tego na mocy przypadku już udowodnionego mają pochodną prawie wszędzie w przedziale  $\langle a; b \rangle$ , skąd wynika, że i funkcja

$$f(x) = f(a) + v_{f,a}^+(x) - v_{f,a}^-(x)$$

ma pochodną prawie wszędzie w przedziale  $\langle a; b \rangle$ .

W ten sposób dowód twierdzenia (D) został przeprowadzony.

### § 180. Funkcje rzeczywiste bezwzględnie ciągłe

Funkcję rzeczywistą skończoną  $f$  określoną na przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$  nazywamy bezwzględnie ciągłą w przedziale  $\langle a; b \rangle$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{array}{l} \bigwedge_{\substack{\langle a_0; b_0 \rangle \subset \langle a; b \rangle \\ a_0, b_0 \in \mathbb{R}}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{\substack{\langle a_1; b_1 \rangle, \dots, \langle a_m; b_m \rangle \subset \langle a_0; b_0 \rangle \\ m \in \mathbb{N} \\ \langle a_i; b_i \rangle \cap \langle a_j; b_j \rangle = \emptyset \text{ dla } i \neq j \\ \sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta}} \sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon \end{array}$$

Twierdzenie (A)

Funkcja  $f$  bezwzględnie ciągła w przedziale ograniczonym  $\langle a; b \rangle$  ma na tym przedziale skończone wahanie.