

Na mocy (243) i (245) otrzymujemy

$$\mathcal{E} = r \cdot \log_2 e + \log_2 \Gamma(r) - \log_2 b - \frac{(r-1) \log_2 e}{\Gamma(r)} \int_0^\infty u^{r-1} \log_e u \cdot e^{-u} du$$

i na mocy własności (c59) całek Lebesgue'a

$$(255) \quad \mathcal{E} = \log_2 \left( \frac{1}{b} e^r \Gamma(r) \right) - (r-1) \log_2 e \cdot \frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)}$$

### § 248. Rozkład $\chi^2$

Rozkładem  $\chi^2$  nazywamy szczególny przypadek rozkładu gamma, gdy

$$b = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

gdzie  $n$  nazywamy liczbą stopni swobody rozkładu  $\chi^2$ . Na mocy (242) gęstość prawdopodobieństwa rozkładu  $\chi^2$  wyraża się wzorem

$$(256) \quad f(x) = \chi_{[n]}^2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

a  $\Gamma(\frac{n}{2})$  dane jest wzorem (248).

Na mocy (250) funkcja charakterystyczna rozkładu  $\chi^2$  ma postać

$$(257) \quad \varphi(t) = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}}$$

Momenty rozkładu  $\chi^2$  na mocy (251) wyrażają się wzorem

$$(258) \quad m_k = \frac{\Gamma(\frac{n+2k}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot 2^k$$

W szczególności wartością średnią jest na mocy (252)

$$(259) \quad m_1 = \bar{x} = n$$

Wariancja rozkładu  $\chi^2$  na mocy (253) równa się

$$(260) \quad \mu_2 = 2n$$

a współczynniki asymetrii i spłaszczenia na mocy (254)

$$(261) \quad j_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \quad j_2 = \frac{12}{n}$$

Entropią rozkładu  $\chi^2$  na mocy (255) jest

$$(262) \quad \mathcal{E} = \log_2 \left[ 2e^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right] - \frac{n-2}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \log_2 e$$

#### § 249. Rozkład $t$ -Studenta

Rozkładem  $t$ -Studenta nazywamy rozkład ciągły o gęstości prawdopodobieństwa

$$(263) \quad f_{[n]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

gdzie  $n$  nazywamy liczbą stopni swobody rozkładu  $t$ -Studenta, a  $B(p, q)$  jest tzw. funkcją beta Eulera

$$(264) \quad B(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p, q \in \mathbb{R} \wedge p, q > 0$$

Łatwo wykazać, że

$$(265) \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

W tym celu rozpatrzmy iloczyn

$$\Gamma(p+q) \cdot B(p, q) = \Gamma(p+q) \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{x^p}{1+y} dy$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} y^{p-1} \frac{\Gamma(p+q)}{(1+y)^{p+q}} dy = \int_0^{\infty} y^{p-1} \int_0^{\infty} \frac{u^{p+q-1}}{(1+y)^{p+q}} e^{-u} du dy \stackrel{\text{c61}}{=} \\
&= \int_0^{\infty} y^{p-1} \int_0^{\infty} v^{p+q-1} e^{-v-vy} dv dy \stackrel{\text{c61}}{=} \int_0^{\infty} v^{p+q-1} e^{-v} \int_0^{\infty} y^{p-1} e^{-vy} dy dv = \\
&= \int_0^{\infty} v^{q-1} e^{-v} \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt dv = \\
&= \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \cdot \int_0^{\infty} v^{q-1} e^{-v} dv = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q)
\end{aligned}$$

co było do wykazania.

Zajmiemy się teraz sprawą istnienia momentów rozkładu  $t$ -Studenta. W tym celu rozważmy całkę

$$\begin{aligned}
I_{nk} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} x^k f_{[n]}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{x^k}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dx \stackrel{\frac{x}{\sqrt{n}}=u}{=} \\
&= \frac{n^{\frac{k}{2}}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{u^k}{(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}} du > \frac{n^{\frac{k}{2}}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_1^{\infty} \frac{u^k}{(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}} du > \\
&> \frac{n^{\frac{k}{2}}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_1^{\infty} \frac{u^k}{(\sqrt{2}u)^{n+1}} du = \frac{n^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_1^{\infty} u^{k-n-1} du
\end{aligned}$$

Zatem dla  $k \geq n$  jest  $I_{nk} = \infty$ . Rozpatrzmy teraz moment

$$(*) \quad m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_{[n]}(x) dx = \begin{cases} I_{nk} - I_{nk} & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ 2 I_{nk} & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}$$

Jeśli zatem  $k \geq n$ , to dla  $k$  nieparzystych moment  $m_k$  nie istnieje, a dla  $k$  parzystych jest równy  $\infty$ .

Rozpatrzmy momenty w przypadku  $k < n$ . Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
 I_{nk} &= \frac{n^{\frac{k}{2}}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left( \int_0^1 \frac{u^k}{(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}} du + \int_1^\infty \frac{u^k}{(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}} du \right) < \\
 &< \frac{n^{\frac{k}{2}}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left( \int_0^1 u^k du + \int_1^\infty \frac{u^k}{(u^2)^{\frac{n+1}{2}}} du \right) = \\
 &= \frac{n^{\frac{k}{2}}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left( \frac{1}{k+1} + \int_1^\infty u^{k-n-1} du \right) = \frac{n^{\frac{k}{2}}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left( \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k} \right) < \infty
 \end{aligned}$$

Na mocy (\*) momenty  $m_k$  istnieją i są skończone dla  $k < n$ , a dla  $k$  nieparzystych są wtedy równe 0. Dla  $k \geq 2$  parzystych mamy natomiast

$$I_{nk} = - \frac{n^{\frac{k}{2}}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty u^{k-1} \left( \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}}} \right) du$$

Biorąc pod uwagę, że funkcja

$$\frac{u^{k-1}}{(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}}}$$

ma na przedziale  $\langle 0; \infty \rangle$  wahanie skończone, całkujemy przez części zgodnie z własnością (c77)

$$\begin{aligned}
 I_{nk} &= - \frac{n^{\frac{k}{2}}}{(n-1)B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{u^{k-1}}{(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}}} \Big|_0^\infty + \frac{n^{\frac{k}{2}}(k-1)}{(n-1)B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{u^{k-2}}{(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}}} du = \\
 &= \frac{n^{\frac{k}{2}}(k-1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{u^{k-2}}{(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}}} du \stackrel{(245)}{=} \\
 &= \frac{n \cdot n^{\frac{k-2}{2}}(k-1)\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{n-2}{2}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{u^{k-2}}{(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}}} du = \frac{n(k-1)}{n-2} I_{n-2,k-2}
 \end{aligned}$$

Iterując ten wzór otrzymujemy

$$(**) \quad I_{nk} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)}{(n-2)(n-4) \dots (n-k)} n^{\frac{k}{2}} \cdot I_{n-k,0}$$

Ale

$$\begin{aligned} I_{n-k,0} &= \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-k}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{n-k+1}{2}}} \quad u = \operatorname{tg} t \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-k-1} t \, dt \end{aligned}$$

Całkując przez części otrzymuje się wzór rekurencyjny

$$(***) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t \, dt = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} t \, dt$$

a ponadto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 t \, dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1 t \, dt = 1$$

Wobec powyższego dla  $n-k=1$  mamy

$$I_{n-k,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

dla  $n-k=2$  na mocy (245)

$$I_{n-k,0} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \cdot 1} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

a dla  $n-k > 2$  na mocy (245) i (\*\*\*)

$$I_{n-k,0} = \frac{(n-k-1) \Gamma\left(\frac{n-k-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} (n-k-2) \Gamma\left(\frac{n-k-2}{2}\right)} \cdot \frac{n-k-2}{n-k-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-k-3} t \, dt = I_{n-k-2,0}$$



Zatem we wszystkich przypadkach mamy

$$I_{n-k,0} = \frac{1}{2}$$

i wobec (\*\*) oraz (\*)

$$(266) \quad m_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)}{(n-2)(n-4) \dots (n-k)} n^{\frac{k}{2}} & \text{dla } k \text{ parzystych, } k < n \end{cases}$$

W szczególności dla wartości średniej  $\bar{x}$  mamy

$$(267) \quad \bar{x} = m_1 = \begin{cases} \text{nie istnieje dla } n = 1 \\ 0 & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

a dla wariancji  $\mu_2 = m_2 - m_1^2$

$$(268) \quad \mu_2 = \begin{cases} \text{nie istnieje} & \text{dla } n = 1 \\ \infty & \text{dla } n = 2 \\ \frac{n}{n-2} & \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

## § 250. Rozkład Laplace'a

Rozkładem Laplace'a nazywamy rozkład ciągły o gęstości prawdopodobieństwa

$$(269) \quad f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

Obliczmy najpierw funkcję charakterystyczną tego rozkładu. Mamy z definicji

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-|x|} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos tx dx + \\ &+ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \sin tx dx \end{aligned}$$

i z uwagi na to, że na mocy własności (c29) funkcje  $e^{-|x|} \cos tx$  i  $e^{-|x|} \sin tx$  są całkowlne w przedziale  $\langle -\infty; +\infty \rangle$ , gdyż  $e^{-|x|}$  jest funkcją całkowlną w tym przedziale, mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos tx \, dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos tx \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \sin tx \, dx = \int_{-\infty}^0 e^{-|x|} \sin tx \, dx + \int_0^{\infty} e^{-|x|} \sin tx \, dx =$$

$$= - \int_0^{\infty} e^{-|x|} \sin tx \, dx + \int_0^{\infty} e^{-|x|} \sin tx \, dx = 0$$

Zatem

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos tx \, dx = e^{-x} \frac{t \sin tx - \cos tx}{1+t^2} \bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{1+t^2}$$

Funkcją charakterystyczną rozkładu Laplace'a jest zatem

$$(270) \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Mamy stąd

$$\varphi^{(0)}(t) = \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad \varphi^{(0)}(0) = 1$$

$$(*) \quad \varphi^{(1)}(t) = \varphi'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}, \quad \varphi^{(1)}(0) = 0$$

a różniczkując stronami równanie

$$(1+t^2)\varphi(t) = 1$$

$$2t\varphi(t) + (1+t^2)\varphi'(t) = 0$$

$$2\varphi(t) + 4t\varphi'(t) + (1+t^2)\varphi''(t) = 0$$

$$6\varphi'(t) + 6t\varphi''(t) + (1+t^2)\varphi'''(t) = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

z łatwością dowodzimy przez indukcję, że

$$k(k-1)\varphi^{(k-2)}(t) + 2kt\varphi^{(k-1)}(t) + (1+t^2)\varphi^{(k)}(t) = 0, \quad k \geq 2$$

skąd

$$\varphi^{(k)}(0) = -k(k-1)\varphi^{(k-2)}(0), \quad k \geq 2$$

i na mocy (fchar5)

$$m_k = k(k-1)m_{k-2}, \quad k \geq 2$$

Biorąc pod uwagę, że na mocy (\*) jest  $m_0 = 1, m_1 = 0$ , mamy

$$(271) \quad m_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ k! & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}$$

W szczególności wartość średnia rozkładu Laplace'a

$$(272) \quad \bar{x} = m_1 = 0$$

a wariancja  $\mu_2 = m_2 - m_1^2$

$$(273) \quad \mu_2 = 2$$

Ogólnie, z uwagi na (272) mamy

$$(274) \quad \mu_k = m_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ k! & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}$$

Na mocy (206) i (207) współczynniki asymetrii i spłaszczenia są

$$(275) \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 3$$

Obliczymy jeszcze entropię dla rozkładu Laplace'a

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} (-1 - |x| \log_2 e) dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx - \\ &- \frac{\log_2 e}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-|x|} dx = -\int_0^{\infty} e^{-x} dx - \log_2 e \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = -1 - \log_2 e \end{aligned}$$



Otrzymaliśmy ostatecznie.

$$(276) \quad \xi = -1 - \log_2 e$$

### § 251. Rozkład Cauchy'ego

Rozkład Cauchy'ego jest szczególnym przypadkiem rozkładu  $t$ -Studenta, gdy  $n = 1$ . Zatem jest to rozkład ciągły o gęstości prawdopodobieństwa

$$(277) \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Jak wynika z rozważań nad rozkładem  $t$ -Studenta, rozkład Cauchy'ego jest przykładem rozkładu ciągłego, dla którego nie istnieje żaden z momentów zwykłych i żaden z momentów centralnych. Między innymi jest to rozkład, dla którego nie istnieje wartość średnia ani wariancja.

Znajdziemy teraz funkcję charakterystyczną rozkładu Cauchy'ego. W tym celu zauważmy, że na mocy twierdzenia (B) z § 237 i wzoru (270) jest

$$\frac{1}{2} e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$$

Zmieniając  $x$  na  $-x$ , a następnie zamieniając symbole  $t$  i  $x$  otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = e^{-|t|}$$

Z definicji jest to funkcja charakterystyczna rozkładu Cauchy'ego

$$(278) \quad \varphi(t) = e^{-|t|}$$

Nieistnienie pochodnych tej funkcji dla  $t=0$  tłumaczy - na mocy własności (fchar5) - nieistnienie momentów dla rozkładu Cauchy'ego.

### § 252. Rozkład wykładniczy

Rozkład wykładniczy jest szczególnym przypadkiem rozkładu gamma, gdy  $\tau = 1$ . Wynika stąd, że jest to rozkład ciągły o gęstości prawdopodobieństwa

$$(279) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

gdzie  $\lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda > 0$ . Jak wynika z (279) dystrybuantę rozkładu wykładniczego można napisać w postaci

$$(280) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Na mocy (250) funkcją charakterystyczną rozkładu wykładniczego jest

$$(281) \quad \varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

a momenty wyrażają się na mocy (251) i (246) wzorem

$$(282) \quad m_k = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Wartością średnią rozkładu wykładniczego jest na mocy (252)

$$(283) \quad \bar{x} = \frac{1}{\lambda}$$

a wariancją na mocy (253)

$$(284) \quad \mu_2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Współczynnikami asymetrii i spłaszczenia są na mocy (254)

$$(285) \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 6$$

Entropia rozkładu wykładniczego na mocy (255) jest równa

$$(286) \quad \xi = \log_2 \frac{e}{\lambda}$$

### § 253. Rozkład beta

Rozkładem beta nazywamy rozkład ciągły o gęstości prawdopodobieństwa



$$(287) \quad f(x) = \beta(x; p, q) = \beta(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

gdzie  $p, q \in \mathbb{N} \wedge p, q > 0$ .

Łatwo jest obliczyć momenty rozkładu beta. Mamy bowiem na mocy (264)

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^1 x^{p+k-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{B(p+k, q)}{B(p, q)}$$

i na mocy (265)

$$(288) \quad m_k = \frac{B(p+k, q)}{B(p, q)} = \frac{\Gamma(p+k) \cdot \Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+k) \cdot \Gamma(p)}$$

a na mocy (245)

$$(289) \quad m_k = \frac{p(p+1) \dots (p+k-1)}{(p+q)(p+q+1) \dots (p+q+k-1)} =$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{p}\right) \left(1 + \frac{q}{p+1}\right) \dots \left(1 + \frac{q}{p+k-1}\right)}$$

W szczególności wartością średnią  $\bar{x} = m_1$  jest

$$(290) \quad \bar{x} = \frac{p}{p+q}$$

a wariancja jest równa

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} - \frac{p^2}{(p+q)^2}$$

skąd

$$(291) \quad \mu_2 = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

## § 254. Rozkład $F$

Rozkładem  $F$  albo rozkładem Snedecora nazywamy rozkład ciągły o gęstości prawdopodobieństwa



$$(292) \quad f(x) = f_{[m,n]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{\frac{m}{2}}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

gdzie  $m, n \in \mathbb{N}$  noszą nazwę liczb stopni swobody rozkładu  $F$ .

Obliczanie dystrybuanty rozkładu  $F$  można sprowadzić do obliczania dystrybuanty rozkładu beta. Mamy bowiem z definicji

$$F(x) = \frac{\frac{m}{2}}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \int_0^x \frac{u^{\frac{m}{2}-1}}{(mu+n)^{\frac{m+n}{2}}} du \quad u = \frac{\frac{n}{2}t}{m(1-t)} \quad \frac{mx}{mx+n} \int_0^{\frac{mx}{mx+n}} t^{\frac{m}{2}-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} dt$$

i na mocy (287)

$$(293) \quad F(x) = \psi\left(\frac{mx}{mx+n}\right)$$

gdzie  $\psi$  oznacza dystrybuantę rozkładu  $\beta(m, n)$ .

Rozpatrzmy momenty rozkładu  $F$ . Mamy z definicji

$$m_k = \frac{\frac{m}{2}}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{2}+k-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} dx = \frac{n^k}{m^k B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{m}{2}+k-1}}{(1+u)^{\frac{m+n}{2}}} du$$

Analogicznie jak w przypadku rozkładu  $t$ -Studenta dowodzi się, że momenty  $m_k$  są skończone wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(*) \quad k \leq \frac{n-1}{2}, \quad \text{czyli} \quad n \geq 2k+1$$

Dla  $k > \frac{n-1}{2}$  momenty istnieją, ale są nieskończone. Podstawiając  $u = \frac{t}{1-t}$  otrzymujemy w przypadku (\*) na mocy (264) i (265)

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{n^k}{m^k B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^{\frac{m}{2}+k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-k-1} dt = \\ &= \frac{n^k B(\frac{m}{2}+k, \frac{n}{2}-k)}{m^k B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} = \frac{n^k \Gamma(\frac{m}{2}+k) \Gamma(\frac{n}{2}-k)}{m^k \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} \end{aligned}$$

czyli na mocy (245)

$$(294) \quad m_k = \frac{m(m+2) \dots (m+2k-2)}{(n-2)(n-4) \dots (n-2k)} \cdot \frac{n^k}{m^k}$$

W szczególności otrzymujemy wartość średnią  $\bar{x} = m_1$  rozkładu  $F$

$$(295) \quad \bar{x} = \begin{cases} \infty & \text{dla } n \leq 2 \\ \frac{n}{n-2} & \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$

oraz wariancję na mocy (198) i (201)

$$(296) \quad \mu_2 = \begin{cases} \infty & \text{dla } n \leq 4 \\ \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} & \text{dla } n \geq 5 \end{cases}$$

### § 255. Rozkład $\chi$ Fishera

Rozkładem  $\chi$  Fishera nazywamy rozkład ciągły o gęstości prawdopodobieństwa

$$(297) \quad f(x) = z_{[m,n]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2^{\frac{m}{2}} \frac{n}{2}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{e^{mx}}{(me^{2x} + n)^{\frac{m+n}{2}}}$$

gdzie  $m, n \in \mathbb{N}$  noszą nazwy liczb stopni swobody rozkładu  $\chi$  Fishera.

Obliczanie dystrybuanty rozkładu  $\chi$  Fishera można również sprowadzić do obliczania dystrybuanty rozkładu beta. Mamy bowiem z definicji

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2^{\frac{m}{2}} \frac{n}{2}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^x \frac{e^{mu}}{(me^{2u} + n)^{\frac{m+n}{2}}} du \quad \overline{e^{2u}} = \frac{nt}{m(1-t)} \\ &= \frac{1}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \int_0^{\frac{me^{2x}}{me^{2x} + n}} t^{\frac{m}{2}-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} dt \end{aligned}$$



i na mocy (287)

$$(298) \quad F(x) = \psi \left( \frac{me^{2x}}{me^{2x} + n} \right)$$

gdzie  $\psi$  jest dystrybuantą rozkładu beta.

### § 256. Rozkład logarytmiczno-normalny

Rozkładem logarytmiczno-normalnym nazywamy rozkład ciągły o gęstości prawdopodobieństwa

$$(299) \quad f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \\ \frac{1}{s(x-a)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\log(x-a)-m]^2}{2s^2}} & \text{dla } x > a \end{cases}$$

gdzie  $a, m, s \in \mathbb{R}$  i  $s > 0$

Obliczanie dystrybuanty rozkładu logarytmiczno-normalnego można sprowadzić do obliczania dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego. Mamy bowiem na mocy definicji

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_a^x \frac{1}{u-a} e^{-\frac{[\log(u-a)-m]^2}{2s^2}} du & \text{dla } x > a \end{cases}$$

$$du_t = \frac{\log(u-a)-m}{s} \quad \text{dla } x > a$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(x-a)-m}{s}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi \left( \frac{\log(x-a)-m}{s} \right) \quad \text{dla } x > a$$

gdzie  $\Phi$  zgodnie z (232) oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

Obliczmy momenty rozkładu logarytmiczno-normalnego. Mamy z definicji

$$m_k = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} \frac{x^k}{x-a} e^{-\frac{[\log(x-a)-m]^2}{2s^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + e^{st+m})^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{mj+sjt-\frac{t^2}{2}} dt = \\
&= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} \cdot e^{mj+\frac{s^2j^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-sj)^2}{2}} dt \stackrel{t-sj=v}{=} \\
&= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} e^{mj+\frac{s^2j^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv
\end{aligned}$$

Na mocy (234) otrzymujemy ostatecznie

$$(300) \quad m_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} e^{mj+\frac{s^2j^2}{2}}$$

W szczególności otrzymujemy stąd wartość średnią  $\bar{x} = m_1$

$$(301) \quad \bar{x} = a + e^{m+\frac{s^2}{2}}$$

oraz wariancję  $\mu_2 = m_2 - m_1^2$  równą

$$(302) \quad \mu_2 = e^{2m+s^2}(e^{s^2} - 1)$$

### § 257. Rozkłady Pearsona

Rozkładami Pearsona nazywamy rozkłady ciągłe, których gęstość prawdopodobieństwa  $f = f(x)$  spełnia równanie postaci

$$(303) \quad f' = \frac{x+\alpha}{\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2} f, \quad \alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

Wykażemy, że rozkłady

1) normalny

2) gamma

3)  $\chi^2$

4)  $t$  - Studenta

- 5) Cauchy'ego
- 6) wykładniczy
- 7) beta
- 8)  $F$  czyli Snedecora

są rozkładami Pearsona.

- 1) Dla rozkładu normalnego mamy na mocy (230)

$$f' = -\frac{x-a}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} = -\frac{x-a}{s^2} f$$

i równanie (303) jest spełnione dla

$$(304) \quad \alpha = -a, \quad \beta_0 = -s^2, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0$$

- 2) Dla rozkładu gamma na mocy (242)

$$f' = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{b^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-bx} \left( \frac{r-1}{x} - b \right) & \text{dla } x > 0 \end{cases} = \frac{x - \frac{r-1}{b}}{-\frac{1}{b}x} f$$

i równanie (303) jest spełnione dla

$$(305) \quad \alpha = -\frac{r-1}{b}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{b}, \quad \beta_0 = \beta_2 = 0$$

3) Rozkład  $\chi^2$  jest szczególnym przypadkiem rozkładu  $\mathcal{J}$ , gdy  $b = \frac{1}{2}$ ,  $r = \frac{n}{2}$ . Zatem dla niego jest spełnione równanie (303) przy

$$(306) \quad \alpha = 2-n, \quad \beta_1 = -2, \quad \beta_0 = \beta_2 = 0$$

- 4) Dla rozkładu  $t$ -Studenta mamy na mocy (263)

$$f' = \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{-\frac{n+1}{2} \cdot \frac{2x}{n}}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+3}{2}}} = -\frac{(n+1)x}{n\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)} f = \frac{x}{-\frac{n}{n+1} - \frac{x^2}{n+1}} f$$

i równanie (303) jest spełnione przy

$$(307) \quad \alpha = \beta_1 = 0, \quad \beta_0 = -\frac{n}{n+1}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{n+1}$$

5) Rozkład Cauchy'ego jest szczególnym przypadkiem rozkładu  $t$ -Studenta, gdy  $n = 1$ . Zatem dla niego równanie (303) jest spełnione, gdy

$$(308) \quad \alpha = \beta_1 = 0, \quad \beta_0 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2}$$

6) Dla rozkładu wykładniczego mamy na mocy (279)

$$f' = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ -x^2 e^{-\lambda x} & \text{dla } x > 0 \end{cases} = -\lambda \cdot f$$

i równanie (303) jest spełnione, gdy

$$(309) \quad \alpha = \beta_0 = \beta_2 = 0, \quad \beta_1 = -\frac{1}{\lambda}$$

7) Dla rozkładu beta mamy na mocy (287)

$$f' = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \left( \frac{p-1}{x} - \frac{q-1}{1-x} \right) & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dla } x > 1 \end{cases} =$$

$$= \frac{(2-p-q)x + (p-1)}{x - x^2} f$$

i równanie (303) jest spełnione, gdy

$$(310) \quad \alpha = \frac{p-1}{2-p-q}, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \frac{1}{2-p-q}, \quad \beta_2 = \frac{1}{p+q-2}$$

8) Dla rozkładu  $F$  mamy na mocy (292)

$$f' = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{\frac{m}{2} \cdot \frac{n}{2}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} \cdot \left( \frac{m-2}{2x} - \frac{m(m+n)}{2(mx+n)} \right) & \text{dla } x > 0 \end{cases} =$$

$$= \frac{-m(n+2)x + n(m-2)}{2x(mx+n)} f$$



i równanie (303) jest spełnione, gdy

$$(311) \quad \alpha = -\frac{n(m-2)}{m(n+2)}, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = -\frac{2n}{m(n+2)}, \quad \beta_2 = -\frac{2}{n+2}$$

Równanie (303) stanowi podstawę do klasyfikacji rozkładów Pearsona według typów rozwiązań tego równania.