

$$\begin{aligned} \wedge \mu(B_1 \cup B_2 - B_1) &= \mu[(A - B_1) - (A - (B_1 \cup B_2))] \leq \mu(A - B_1) = 0 \wedge \\ \wedge \mu(B_1 \cup B_2 - B_2) &= 0 \wedge f \text{ jest funkcją mierzalną na zbiorze } B_1 \cup B_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{B_1} f^+ d\mu &= \int_{B_1 \cup B_2} f^+ d\mu = \int_{B_2} f^+ d\mu \wedge \\ \wedge \int_{B_1} f^- d\mu &= \int_{B_1 \cup B_2} f^- d\mu = \int_{B_2} f^- d\mu \Rightarrow \int_{B_1} f d\mu = \int_{B_2} f d\mu. \end{aligned}$$

Jak wynika z definicji, całka (161) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z całek

$$(163) \quad \int_B f^+ d\mu, \quad \int_B f^- d\mu$$

jest skończona.

Jeśli są spełnione warunki (162), to funkcję f całkowalną w sensie Lebesgue'a na zbiorze B będziemy nazywać funkcją prawie całkowalną w sensie Lebesgue'a na zbiorze A albo krócej funkcją prawie całkowalną na zbiorze A . Gdy ponadto $A = X$, to funkcję nazywamy funkcją prawie całkowalną w sensie Lebesgue'a albo po prostu funkcją prawie całkowalną. Funkcja całkowalna na zbiorze A jest oczywiście również funkcją prawie całkowalną na zbiorze A .

§ 225. Własności całki Lebesgue'a

W całym niniejszym rozdziale zakładamy, że mamy do czynienia z przestrzenią z miarą (X, \mathcal{S}, μ) .

(c1) $\mu(A) = 0 \wedge f$ jest funkcją rzeczywistą o dziedzinie będącej podzbiorem przestrzeni $X \Rightarrow \int_A f d\mu$ istnieje $\wedge \int_A f d\mu = 0$

D] Jak wynika z definicji, każda funkcja rzeczywista jest mierzalna na zbiorze pustym. Wobec tego na mocy założenia $\mu(A) = 0$ każda funkcja rzeczywista o dziedzinie z przestrzeni X jest mierzalna μ na zbiorze A i

$$(*) \quad \int_A f d\mu = \int_Q f d\mu$$

gdzie Q jest zbiorem pustym.

Z definicji całka każdej funkcji prostej na zbiorze pustym jest równa zero, skąd wynika, że całka każdej funkcji

mierzalnej nieujemnej na zbiorze Q jest równa zeru, czyli całka każdej funkcji rzeczywistej o dziedzinie z przestrzeni X i nieujemnej jest równa zeru na zbiorze Q , a w konsekwencji dla każdej funkcji rzeczywistej o dziedzinie z przestrzeni X istnieje całka

$$\int_Q f d\mu = 0$$

Na mocy (*) otrzymujemy stąd tezę.

$$(c2) \int_A f d\mu \text{ istnieje} \wedge B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{istnieją całki } \int_B f d\mu \text{ i } \int_{A-B} f d\mu \wedge$$

$$\wedge \int_A f d\mu = \int_B f d\mu + \int_{A-B} f d\mu$$

D] Załóżmy najpierw, że funkcja f jest mierzalna na zbiorze A . Wtedy istnieją całki (155) i takie ciągi niemalejące (g_n) i (h_n) funkcji prostych mierzalnych na zbiorze A , że są spełnione zależności (156), (157) i (158). Funkcje f , f^+ , f^- , g_1 , g_2 , ... oraz h_1 , h_2 , ... są mierzalne również na zbiorach B i $A-B$. Mamy

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \in \{1, \dots, p_n\}} B \cap C_{nk} = B \cap (A \cap C_{nk}) \in \mathcal{S} \wedge$$

$$\wedge (A-B) \cap C_{nk} = A \cap C_{nk} - B \cap C_{nk} \in \mathcal{S}$$

a następnie

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \in \{1, \dots, p_n\}} \mu(C_{nk} \cap A) = \mu[C_{nk} \cap B + C_{nk} \cap (A-B)] = \\ = \mu(C_{nk} \cap B) + \mu[C_{nk} \cap (A-B)] \xrightarrow{(158)}$$

$$\xrightarrow{(158)} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \int_A g_n d\mu = \sum_{k=1}^{p_n} c_{nk} \mu(C_{nk} \cap A) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p_n} c_{nk} \mu(C_{nk} \cap B) + \sum_{k=1}^{p_n} c_{nk} \mu[C_{nk} \cap (A-B)] \xrightarrow{(156)}$$

$$\xrightarrow{(156)} \int_A f^+ d\mu = \int_B f^+ d\mu + \int_{A-B} f^+ d\mu$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\int_A f^- d\mu = \int_B f^- d\mu + \int_{A-B} f^- d\mu$$

Z założenia co najmniej jedna z całek (155) jest skończona..
Wobec tego co najmniej jedna z całek

$$\int_B f^+ d\mu, \int_B f^- d\mu$$

jest skończona oraz co najmniej jedna z całek

$$\int_{A-B} f^+ d\mu, \int_{A-B} f^- d\mu$$

jest skończona. Wynika stąd, że całki

$$\int_B f d\mu, \int_{A-B} f d\mu$$

istnieją. Ponadto

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \int_B f^+ d\mu + \int_{A-B} f^+ d\mu - \\ &- \int_B f^- d\mu - \int_{A-B} f^- d\mu = \int_B f d\mu + \int_{A-B} f d\mu \end{aligned}$$

Założmy teraz, że f jest funkcją mierzalną μ na zbiorze A .
Wtedy istnieje zbiór H taki, że

$$H \in \mathcal{S} \wedge H \subset A \wedge \mu(A-H) = 0 \wedge \text{funkcja } f \text{ jest mierzalna} \\ \text{na zbiorze } H$$

Ponadto

$$H = H \cap B + H \cap (A-B)$$

Na mocy części już udowodnionej całki

$$\int_H f d\mu, \int_{H \cap B} f d\mu, \int_{H \cap (A-B)} f d\mu$$

istnieją i

$$(*) \quad \int_H f d\mu = \int_{H \cap B} f d\mu + \int_{H \cap (A-B)} f d\mu$$

Ale

$$\begin{aligned} \mu(B - H \cap B) &= \mu(B-H) \ll \mu(A-H) = 0 \\ \mu[(A-B) - H \cap (A-B)] &= \mu[(A-B) - H] \ll \mu(A-H) = 0 \end{aligned}$$

i wobec tego na mocy definicji całki Lebesgue'a dla funkcji mierzalnych μ istnieją całki

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_H f d\mu \wedge \int_B f d\mu = \int_{H \cap B} f d\mu \wedge \int_{A-B} f d\mu = \\ &= \int_{H \cap (A-B)} f d\mu \end{aligned}$$

i na mocy (*) otrzymujemy żadaną własność.

$$(c3) \quad \int_A f d\mu \text{ istnieje} \wedge B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{istnieje całka} \quad \int_B f d\mu \wedge \int_B f d\mu = \int_A f d\mu$$

D] Wynika z własności (c2) i (c1).

$$(c4) \quad \int_{A+B} f d\mu \text{ istnieje} \wedge A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{istnieją całki} \quad \int_A f d\mu \text{ i } \int_B f d\mu \wedge \int_{A+B} f d\mu = \\ = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu \end{aligned}$$

D] Jest to bezpośredni wniosek z własności (c2), gdy zamiast zbioru A wziąć zbiór $A+B$.

$$(c5) \quad \int_A f d\mu \text{ i } \int_B f d\mu \text{ istnieją} \wedge A \cap B = \emptyset \wedge \text{istnieje} \quad \int_A f d\mu +$$

$$+ \int_B f d\mu \Rightarrow \text{istnieje całka}$$

$$\int_{A+B} f d\mu \wedge \int_{A+B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

D] Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy funkcja f jest mierzalna na zbiorze $A+B$, a więc i na zbiorach A i B . Istnieją wtedy całki (156) czyli

$$\int_{A+B} f^+ d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A+B} g_n d\mu$$

$$\int_{A+B} f^- d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A+B} h_n d\mu$$

Ale na mocy (158)

$$\begin{aligned} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \int_{A+B} g_n d\mu &= \sum_{k=1}^{p_n} c_{nk} \mu[C_{nk} \cap (A+B)] = \\ &= \sum_{k=1}^{p_n} c_{nk} \mu(C_{nk} \cap A) + \sum_{k=1}^{p_n} c_{nk} \mu(C_{nk} \cap B) = \end{aligned}$$

$$= \int_A g_n d\mu + \int_B g_n d\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{A+B} f^+ d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^+ d\mu$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\int_{A+B} f^- d\mu = \int_A f^- d\mu + \int_B f^- d\mu$$

Z założenia istnieje suma

$$\int_A f d\mu + \int_B f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu + \int_B f^+ d\mu -$$

$$- \int_B f^- d\mu = \int_{A+B} f d\mu$$

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek ogólny, gdy funkcja f jest mierzalna μ na zbiorze $A+B$. Istnieją wtedy zbiory H i K takie, że

$$H, K \in \mathcal{S} \wedge H \subset A \wedge K \subset B \wedge \mu(A-H) = \mu(B-K) = 0 \wedge \text{funkcja } f$$

$$\text{jest mierzalna na zbiorach } H, K \text{ i } H+K$$

Na mocy przypadku już udowodnionego całki

$$\int_H f d\mu, \int_K f d\mu \text{ i } \int_{H+K} f d\mu \text{ istnieją } \wedge$$

$$\wedge \int_{H+K} f d\mu = \int_H f d\mu + \int_K f d\mu$$

Ponieważ

$$\mu(A-H) = 0$$

$$\mu(B-K) = 0$$

$$\mu[(A+B)-(H+K)] \leq \mu(A-H) + \mu(B-K) = 0$$

więc na mocy definicji całki Lebesgue'a dla funkcji mierzalnych μ na zbiorze istnieją całki

$$\int_A f d\mu = \int_H f d\mu, \int_B f d\mu = \int_K f d\mu, \int_{A+B} f d\mu = \int_{H+K} f d\mu$$

i jest spełniona żądana własność.

$$(c6) \quad A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S} \wedge A = \sum_{k=1}^m A_k \wedge \int_A f d\mu \text{ istnieje} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{istnieją całki } \int_{A_1} f d\mu, \dots, \int_{A_m} f d\mu \wedge \\ \wedge \int_A f d\mu = \sum_{k=1}^m \int_{A_k} f d\mu$$

D] Własność powyższą otrzymujemy stosując własność (c4) kolejno do zbiorów

$$\sum_{k=1}^{m-1} A_k + A_m, \sum_{k=1}^{m-2} A_k + A_{m-1}, \dots, A_1 + A_2$$

$$(c7) \quad A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S} \wedge A = \sum_{k=1}^m A_k \wedge \int_{A_1} f d\mu, \dots, \int_{A_m} f d\mu$$

istnieją \wedge istnieje $\sum_{k=1}^m \int_{A_k} f d\mu \Rightarrow$ istnieje całka

$$\int_A f d\mu \wedge \int_A f d\mu = \sum_{k=1}^m \int_{A_k} f d\mu$$

D] Własność powyższą otrzymujemy stosując własność (c5) kolejno do zbiorów

$$A_1 + A_2, \sum_{k=1}^2 A_k + A_3, \dots, \sum_{k=1}^{m-1} A_k + A_m$$

$$(c8) \quad \int_B f d\mu \text{ istnieje} \wedge A \in \mathcal{S} \wedge A \supset B \wedge \mu(A-B) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{istnieje całka } \int_A f d\mu \wedge \int_A f d\mu = \int_B f d\mu$$

D] Wynika z własności (c5) i (c1).

$$(c9) \quad \int_A f d\mu \text{ istnieje} \wedge f \stackrel{\text{pr.w.} A}{=} g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A g d\mu \text{ istnieje} \wedge \int_A g d\mu = \int_A f d\mu$$

D] Wynika z definicji równości prawie wszędzie oraz własności (c3) i (c8).

$$(c10) \quad f \stackrel{\text{pr.w.} A}{=} 0 \Rightarrow \int_A f d\mu = 0$$

D] Załóżmy najpierw, że

$$f \stackrel{A}{=} 0$$

Wtedy na mocy (153)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{A}{=} f$$

gdzie

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{x \in X} f_n(x) = 0$$

Wobec powyższego na mocy (151)

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \int_A f_n d\mu = 0$$

skąd na mocy (154)

$$\int_A f d\mu = 0$$

Dowód w przypadku gdy $f \stackrel{\text{pr.w.} A}{=}$ wynika z własności (c9).

(c11) $f \geq 0$ prawie wszędzie na zbiorze $A \in \mathcal{S} \wedge f$ jest funkcją mierzalną na zbiorze $A \Rightarrow$

\Rightarrow istnieje całka $\int_A f d\mu \wedge 0 \leq \int_A f d\mu \leq \infty$

D] Z założenia istnieje taki zbiór B , że

$$B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge$$

$\wedge f \geq 0$ na zbiorze $B \wedge f$ jest funkcją mierzalną na zbiorze B .

Z definicji (154) istnieje całka $\int_B f d\mu$ i $0 \leq \int_B f d\mu \leq \infty$

Stąd na mocy własności (c8) otrzymujemy żadaną własność.

(c12) $\int_A f d\mu$ istnieje $\wedge f \geq 0$ prawie wszędzie na zbiorze $A \wedge$

$$\wedge B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \Rightarrow \int_B f d\mu \leq \int_A f d\mu$$

D] Na mocy własności (c2) całka

$$\int_B f d\mu$$

istnieje i

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu + \int_{A-B} f d\mu$$

gdzie na mocy własności (c11)

$$\int_{A-B} f d\mu \geq 0$$

Wynika stąd żadaną własność.

(c13) Istnieje $\int_A f d\mu = 0 \wedge f \geq 0$ prawie wszędzie na zbiorze $A \Rightarrow \Rightarrow f \stackrel{\text{pr.w.} A}{=} 0$

D) Istnieje taki zbiór B , że

$B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge f$ mierzalna na zbiorze $B \wedge f \geq 0$ na zbiorze B .

Zatem na mocy definicji istnieje niemalejący ciąg (f_n) funkcji prostych mierzalnych na zbiorze B taki, że zachodzą związki (153) i (154) dla zbioru B .

Z części T1 dowodu twierdzenia § 223 wynika, że ciąg

$$\left(\int_B f_n d\mu \right)$$

jest niemalejącym ciągiem liczb nieujemnych. Wobec tego na mocy (154)

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \int_B f_n d\mu = 0$$

a następnie na mocy (151)

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n \stackrel{\text{pr.w.} B}{=} 0$$

i na mocy twierdzenia § 207

$$\bigvee_{\substack{C \in \mathcal{S} \\ C \subset B \\ \mu(B-C)=0}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n \stackrel{C}{=} 0 \stackrel{(153)}{\Rightarrow} f \stackrel{C}{=} 0$$

Ale

$$C \subset A \wedge \mu(A-C) = \mu(A-B) + \mu(B-C) = 0$$

Zatem

$$f \stackrel{\text{pr.w.} A}{=} 0$$

(c14) $\int_A f d\mu$ istnieje $\wedge \mu(A) > 0 \wedge f > 0$ prawie wszędzie na zbiorze $A \Rightarrow \int_A f d\mu > 0$

D) Na mocy własności (c11) jest

$$\int_A f d\mu \geq 0$$

Gdyby

$$\int_A f d\mu = 0$$

wtedy na mocy własności (c13)

$$f \stackrel{\text{pr.w. } A}{=} 0 \Rightarrow \mu\{x: f(x) > 0 \wedge x \in A\} = 0$$

Z drugiej strony z założenia, że $f(x) > 0$ prawie wszędzie na zbiorze A , wynika, iż

$$\mu\{x: f(x) \leq 0 \wedge x \in A\} = 0$$

skąd

$$\mu(A) = \mu\{x: f(x) > 0 \wedge x \in A\} + \mu\{x: f(x) \leq 0 \wedge x \in A\} = 0$$

wbrew założeniu, że $\mu(A) > 0$. Stąd wynika żądana własność.

$$(c15) \quad \int_A d\mu = \mu(A)$$

Rozpatrzmy funkcję prostą

$$\bigwedge_{x \in X} f(x) = 1$$

Jest to funkcja prosta mierzalna na zbiorze A i na mocy (151)

$$\int_A d\mu = \int_A f d\mu = 1 \cdot \mu(X \cap A) = \mu(A)$$

$$(c16) \quad \int_A f d\mu \text{ istnieje} \Rightarrow \text{istnieje} \int_A (-f) d\mu \wedge \int_A (-f) d\mu = - \int_A f d\mu$$

D] Istnieje zbiór B taki, że

$B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge f$ jest funkcją mierzalną na zbiorze B

Wobec tego istnieją całki

$$\int_B f^+ d\mu \quad \text{i} \quad \int_B f^- d\mu$$

i co najmniej jedna z nich jest skończona. Ale

$$(-f)^+ = f^- \wedge (-f)^- = f^+$$

wobec czego istnieją całki

$$\int_B (-f)^+ d\mu = \int_B f^- d\mu \quad \text{i} \quad \int_B (-f)^- d\mu = \int_B f^+ d\mu$$

i co najmniej jedna z nich jest skończona. Wobec tego istnieje całka

$$\begin{aligned} \int_A (-f) d\mu &= \int_B (-f) d\mu = \int_B (-f)^+ d\mu - \int_B (-f)^- d\mu = \\ &= \int_B f^- d\mu - \int_B f^+ d\mu = - \int_B f d\mu = - \int_A f d\mu \\ (c17) \int_A f d\mu \text{ istnieje} &\Rightarrow \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} \text{istnieje} \int_A c f d\mu \wedge \\ &\wedge \int_A c f d\mu = c \int_A f d\mu \end{aligned}$$

D] Dla $c = 0$ implikacja jest oczywista. Z uwagi na własność (c16) wystarczy przeprowadzić dowód tylko w przypadku $c > 0$. Z uwagi na definicję całki Lebesgue'a dla funkcji mierzalnych μ na zbiorze A wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy funkcja f jest mierzalna na zbiorze A i są spełnione związki (156), (157) i (158). Ale dla $c > 0$ funkcje

$$c g_n = \sum_{k=1}^{p_n} c c_{nk} \chi_{C_{nk}}, \quad c h_n = \sum_{l=1}^{q_n} c d_{nl} \chi_{D_{nl}}$$

są funkcjami prostymi mierzalnymi na zbiorze A , a ciągi $(c g_n)$ i $(c h_n)$ są niemalejące i

$$(cf)^+ = cf^+ \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} c g_n, \quad (cf)^- = cf^- \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} c h_n$$

Ponadto na mocy (158)

$$\int_A c g_n d\mu = c \int_A g_n d\mu \quad \text{ i } \quad \int_A c h_n d\mu = c \int_A h_n d\mu$$

skąd na mocy (156)

$$\begin{aligned} \int_A (cf)^+ d\mu &= c \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu = c \int_A f^+ d\mu \\ \int_A (cf)^- d\mu &= c \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A h_n d\mu = c \int_A f^- d\mu \end{aligned}$$

i co najmniej jedna z tych całek jest skończona. Wobec tego istnieje całka

$$\int_A c f d\mu = \int_A (cf)^+ d\mu - \int_A (cf)^- d\mu = c \int_A f^+ d\mu -$$

$$-c \int_A f^- d\mu = c \int_A f^+ d\mu$$

(c18) $\int_A f d\mu$ i $\int_A g d\mu$ istnieją $\wedge f \leq g$ prawie wszędzie na zbiorze

$$A \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$$

D] Istnieje zbiór B taki, że

$$B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge f \text{ i } g \text{ są funkcjami mierzalnymi na zbiorze } B \wedge f \leq g \text{ na zbiorze } B \wedge \int_A f d\mu = \int_B f d\mu \wedge \int_A g d\mu = \int_B g d\mu$$

Założmy najpierw, że $0 \leq f \leq g$. Wtedy istnieją niemalejące ciągi (f_n) , (g_n) funkcji prostych mierzalnych na zbiorze B , takich, że

$$f \stackrel{B}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \wedge g \stackrel{B}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

Niech

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} h_n \stackrel{\text{def}}{=} \min(f_n, g_n) \text{ na zbiorze } B.$$

Każda z funkcji h_1, h_2, \dots może przyjmować tylko skończoną liczbę wartości skończonych nieujemnych i na mocy twierdzenia § 197 jest funkcją prostą mierzalną na zbiorze B . Z definicji wynika, że ciąg (h_n) jest niemalejący i wobec tego ma granicę

$$h \stackrel{B}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$$

Z definicji funkcji h_n wynika, że na zbiorze B jest

$$0 \leq h \leq f \leq g$$

Założmy, że istnieje punkt $x \in B$ taki, że

$$h(x) \neq f(x)$$

i niech w tym punkcie

$$(**) \quad \delta = f(x) - h(x) > 0$$

Wtedy

$$\bigvee_{n_0 \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\delta}{2} \wedge |g(x) - g_n(x)| <$$

$$< \frac{\delta}{2} \Rightarrow \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} f_n(x) > f(x) - \frac{\delta}{2} \wedge g_n(x) > g(x) - \delta \geq$$

$$\geq f(x) - \frac{\delta}{2} \Rightarrow \bigwedge_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n > n_0}} h_n(x) > f(x) - \frac{\delta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) \geq f(x) - \frac{\delta}{2} \Rightarrow f(x) - h(x) \leq \frac{\delta}{2}$$

co jest sprzeczne z (**). Zatem

$$\bigwedge_{x \in \mathfrak{X}} h(x) = f(x)$$

czyli

$$f \stackrel{B}{=} \lim h_n$$

Ponadto z definicji

$$h_n \leq g_n$$

i na mocy części T1 dowodu twierdzenia § 223

$$\int_B h_n d\mu \leq \int_B g_n d\mu$$

Wobec tego

$$\int_B f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B h_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B g_n d\mu = \int_B g d\mu$$

Niech teraz f i g będą dowolnymi funkcjami mierzalnymi na zbiorze B . Mamy

$$f^+ \leq g^+ \wedge f^- \geq g^-$$

i na mocy udowodnionego już przypadku

$$\int_B f^+ d\mu \leq \int_B g^+ d\mu \wedge \int_B f^- d\mu \geq \int_B g^- d\mu$$

skąd

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu = \int_B f^+ d\mu - \int_B f^- d\mu \leq \int_B g^+ d\mu - \int_B g^- d\mu =$$

$$= \int_B g d\mu = \int_A g d\mu$$

(c19) Funkcja całkowalna na zbiorze A jest skończona prawie wszędzie na zbiorze A .

D] Niech

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x: f(x) = \infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

Na mocy własności (c12)

$$(***) \quad \int_B f d\mu = \int_B f^+ d\mu \ll \int_A f^+ d\mu < \infty$$

Niech teraz

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{x \in X} f_n(x) = n$$

Ciąg (f_n) jest zatem niemalejącym ciągiem funkcji prostych mierzalnych na zbiorze A , takim, że

$$f \stackrel{B}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Ale z definicji (151)

$$\int_B f_n d\mu = n \mu(B)$$

Gdyby

$$\mu(B) > 0$$

wtedy na mocy (154) byłoby

$$\int_B f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} n \mu(B) = \infty$$

wbrew (**). Zatem

$$\mu(B) = 0$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{x: f(x) = -\infty \wedge x \in A\} \Rightarrow \mu(C) = 0$$

Wobec tego własność dowodzona wynika z równości

$$\mu\{x: |f(x)| = \infty \wedge x \in A\} = \mu(B) + \mu(C) = 0$$

(c20) Funkcja prawie całkowalna na zbiorze A jest skończona prawie wszędzie na zbiorze A .

D] Wynika z definicji funkcji prawie całkowalnej na zbiorze i z własności (c19).

$$(c21) \int_A f_1 d\mu, \dots, \int_A f_n d\mu \text{ istnieją} \wedge \text{istnieje } \sum_{k=1}^n \int_A f_k d\mu \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{istnieje } \int_A \left(\sum_{k=1}^n f_k \right) d\mu \wedge \int_A \left(\sum_{k=1}^n f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^n \int_A f_k d\mu$$

D] Ponieważ

$$f_1 + \dots + f_n = ((f_1 + f_2) + f_3) \dots + f_n$$

wystarczy przeprowadzić dowód w przypadku $n = 2$. Załóżmy najpierw, że funkcje f_1 i f_2 są funkcjami prostymi mierzalnymi na zbiorze A i

$$f_1 = \sum_{k=1}^p c_k \chi_{C_k}, \quad f_2 = \sum_{l=1}^q d_l \chi_{D_l}$$

gdzie

$$c_1, \dots, c_p; d_1, \dots, d_q \in \mathbb{R}$$

$$c_1, \dots, c_p; d_1, \dots, d_q \geq 0$$

$$c_i \neq c_j \wedge d_i \neq d_j \text{ dla } i \neq j, \text{ a ponadto}$$

$$c_1 + \dots + c_p = X, \quad D_1 + \dots + D_q = X$$

$$A \cap C_1, \dots, A \cap C_p \in \mathcal{S}, \quad A \cap D_1, \dots, A \cap D_q \in \mathcal{S}$$

Niech

$$E_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} C_k \cap D_l \text{ dla } k = 1, \dots, p; \quad l = 1, \dots, q$$

Mamy wtedy

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, p\}} C_k = \sum_{l=1}^q E_{kl} \wedge \bigwedge_{l \in \{1, \dots, q\}} D_l = \sum_{k=1}^p E_{kl} \\ \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q E_{kl} = X$$

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, p\}} \bigwedge_{l \in \{1, \dots, q\}} A \cap E_{kl} = (A \cap C_k) \cap (A \cap D_l) \in \mathcal{S}$$

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, p\}} \mu(A \cap C_k) = \sum_{l=1}^q \mu(A \cap E_{kl})$$

$$\bigwedge_{l \in \{1, \dots, q\}} \mu(A \cap D_l) = \sum_{k=1}^p \mu(A \cap E_{kl})$$

$$f_1 = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q c_k \chi_{E_{kl}}, \quad f_2 = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q d_l \chi_{E_{kl}}$$

Wobec tego funkcja

$$f_1 + f_2 = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q (c_k + d_l) \chi_{E_{kl}}$$

jest funkcją prostą mierzalną na zbiorze A i istnieje całka

$$\begin{aligned} \int_A (f_1 + f_2) d\mu &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q (c_k + d_l) \mu(A \cap E_{kl}) = \\ &= \sum_{k=1}^p c_k \sum_{l=1}^q \mu(A \cap E_{kl}) + \sum_{l=1}^q d_l \sum_{k=1}^p \mu(A \cap E_{kl}) = \\ &= \sum_{k=1}^p c_k \mu(A \cap C_k) + \sum_{l=1}^q d_l \mu(A \cap D_l) = \int_A f_1 d\mu + \int_A f_2 d\mu \end{aligned}$$

Założmy teraz, że funkcje f_1 i f_2 są funkcjami mierzalnymi nieujemnymi na zbiorze A . Istnieją wtedy ciągi niemalejące (g_n) i (h_n) funkcji prostych mierzalnych na zbiorze A takie, że

$$f_1 \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \quad \text{ i } \quad f_2 \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$$

oraz

$$\begin{aligned} \int_A f_1 d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu \\ \int_A f_2 d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A h_n d\mu \end{aligned}$$

Ale wtedy funkcja $f_1 + f_2$ jest również funkcją mierzalną nieujemną na zbiorze A , funkcje $g_1 + h_1, g_2 + h_2, \dots$ są funkcjami prostymi mierzalnymi na zbiorze A , a ciąg $(g_n + h_n)$ jest niemalejący i

$$f_1 + f_2 \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n + h_n)$$

Wobec tego na mocy przypadku już udowodnionego

$$\int_A (f_1 + f_2) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A (g_n + h_n) d\mu =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A h_n d\mu = \int_A f_1 d\mu + \int_A f_2 d\mu$$

Niech teraz f_1 i f_2 będą dowolnymi funkcjami mierzalnymi na zbiorze A . Suma

$$\int_A f_1 d\mu + \int_A f_2 d\mu = \int_A f_1^+ d\mu - \int_A f_1^- d\mu + \int_A f_2^+ d\mu - \int_A f_2^- d\mu$$

istnieje z założenia i wobec tego

$$(i) \quad \int_A f_1^+ d\mu + \int_A f_2^+ d\mu < \infty$$

albo

$$(ii) \quad \int_A f_1^- d\mu + \int_A f_2^- d\mu < \infty$$

Założmy, że zachodzi nierówność (i). Wtedy

$$(iii) \quad \int_A f_1^+ d\mu < \infty \wedge \int_A f_2^+ d\mu < \infty$$

i na mocy własności (c19) istnieje zbiór B taki, że

$B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge f_1^+$ i f_2^+ są funkcjami mierzalnymi nieujemnymi i skończonymi na zbiorze B ,

skąd wynika, że funkcja $f_1^+ + f_2^+$ jest mierzalna, nieujemna i skończona na zbiorze B . Na mocy przypadku już udowodnionego istnieje całka

$$(iv) \quad \int_B (f_1^+ + f_2^+) d\mu = \int_B f_1^+ d\mu + \int_B f_2^+ d\mu \stackrel{(iii)}{\stackrel{(c12)}}{<} \infty$$

Z uwagi na skończoność funkcji $f_1^+ + f_2^+$ na zbiorze B funkcja

$$(v) \quad f_1 + f_2 = (f_1^+ + f_2^+) - (f_1^- + f_2^-)$$

jest na mocy twierdzenia § 189 mierzalna na zbiorze B i wobec tego istnieją całki

$$\int_B (f_1 + f_2)^+ d\mu, \int_B (f_1 + f_2)^- d\mu$$

Niech

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{x: f_1(x) + f_2(x) \geq 0 \wedge x \in B\} \in \mathcal{S}$$

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{x: f_1(x) + f_2(x) < 0 \wedge x \in B\} \in \mathcal{S}$$

$$C + D = B$$

Na mocy definicji.

$$(f_1 + f_2)^+ = \begin{cases} f_1 + f_2 \geq 0 & \text{dla } x \in C \\ 0 & \text{dla } x \in D \end{cases}$$

$$(f_1 + f_2)^- = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in C \\ -f_1 - f_2 > 0 & \text{dla } x \in D \end{cases}$$

a na mocy własności (c2), (c10) i (c16)

$$(vi) \quad \int_B (f_1 + f_2)^+ d\mu = \int_C (f_1 + f_2) d\mu$$

$$\int_B (f_1 + f_2)^- d\mu = - \int_D (f_1 + f_2) d\mu$$

Na mocy przypadku już udowodnionego i równości (v)

$$(vii) \quad \int_C (f_1^+ + f_2^+) d\mu = \int_C (f_1 + f_2) d\mu + \int_C (f_1^- + f_2^-) d\mu \stackrel{(iv)}{< \infty} \stackrel{(c12)}{}$$

skąd na mocy (vi)

$$(viii) \quad \int_B (f_1 + f_2)^+ d\mu < \infty$$

Na mocy przypadku już udowodnionego i równości (v) jest też

$$(ix) \quad \int_D (f_1^- + f_2^-) d\mu = \int_D (f_1^+ + f_2^+) d\mu - \int_D (f_1 + f_2)$$

Na mocy (v) i (vi) z równości (vii) i (ix) otrzymujemy

$$(x) \quad \int_B (f_1 + f_2)^+ d\mu = \int_C (f_1^+ + f_2^+) d\mu - \int_C (f_1^- + f_2^-) d\mu$$

$$\int_B (f_1 + f_2)^- d\mu = \int_D (f_1^- + f_2^-) d\mu - \int_D (f_1^+ + f_2^+) d\mu$$

Na mocy (viii) i (x) istnieje całka

$$\begin{aligned} \int_B (f_1 + f_2) d\mu &= \int_B (f_1 + f_2)^+ d\mu - \int_B (f_1 + f_2)^- d\mu = \\ &= \int_C (f_1^+ + f_2^+) d\mu + \int_D (f_1^+ + f_2^+) d\mu - \int_C (f_1^- + f_2^-) d\mu - \\ &- \int_D (f_1^- + f_2^-) d\mu \quad (c5) \quad \int_B (f_1^+ + f_2^+) d\mu - \int_B (f_1^- + f_2^-) d\mu \end{aligned}$$

Ale na mocy przypadku już udowodnionego jest

$$\begin{aligned} \int_B (f_1^+ + f_2^+) d\mu &= \int_B f_1^+ d\mu + \int_B f_2^+ d\mu \\ \int_B (f_1^- + f_2^-) d\mu &= \int_B f_1^- d\mu + \int_B f_2^- d\mu \end{aligned}$$

wobec czego

$$\begin{aligned} \int_B (f_1 + f_2) d\mu &= \int_B f_1^+ d\mu - \int_B f_1^- d\mu + \int_B f_2^+ d\mu - \int_B f_2^- d\mu = \\ &= \int_B f_1 d\mu + \int_B f_2 d\mu \end{aligned}$$

Na mocy własności (c8) mamy stąd żadaną własność.

Dowód w przypadku, gdy jest spełniona nierówność (ii), jest analogiczny. Uogólnienie na funkcje f_1 i f_2 mierzalne μ na zbiorze A jest oczywiste.

(c22) Dla każdej funkcji f mierzalnej μ na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ istnieje całka

$$\int_A |f| d\mu$$

Jeśli ponadto istnieje całka

$$\int_A f d\mu$$

to

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu$$

D] Na mocy twierdzenia § 185 funkcja $|f|$ jest mierzalna μ na zbiorze A . Ponieważ jest to funkcja nieujemna, więc całka

$$\int |f| d\mu$$

zawsze istnieje.

Jeśli istnieje całka

$$\int_A f d\mu$$

to istnieje zbiór B taki, że

$B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge f$ jest funkcją mierzalną na zbiorze $B \wedge f \stackrel{B}{=} f^+ - f^-$, gdzie f^+ i f^- są funkcjami mierzalnymi nieujemnymi na zbiorze B i istnieją

$$\int_B f^+ d\mu \quad \text{ i } \quad \int_B f^- d\mu$$

Ale

$$|f| \stackrel{B}{=} f^+ + f^-$$

i na mocy własności (c21)

$$\begin{aligned} \int_B |f| d\mu &\stackrel{B}{=} \int_B f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu \geq \\ &\geq \left| \int_B f^+ d\mu - \int_B f^- d\mu \right| = \left| \int_B f d\mu \right| \end{aligned}$$

Na mocy własności (c8) otrzymujemy stąd żadaną własność.

$$(c23) \quad \underline{Z]} \quad 1^\circ \quad f \stackrel{\text{pr.w.} A}{=} \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}, \quad m \in \mathbb{N} \vee m = \infty,$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \dots &= A \wedge A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S} \wedge \\ &\wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{R}_0 \wedge \alpha_i \neq \alpha_j \quad \text{dla } i \neq j \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad \sum_{k \in U} \alpha_k \cdot \mu(A_k) < \infty \vee \sum_{k \in V} \alpha_k \cdot \mu(A_k) > -\infty$$

gdzie

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{k : k \in \mathbb{N} \wedge k \leq m \wedge \alpha_k > 0\}$$

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{k : k \in \mathbb{N} \wedge k \leq m \wedge \alpha_k < 0\}$$

z tym, że przyjmujemy, iż

$$U = 0 \Rightarrow \sum_{k \in U} \alpha_k \cdot \mu(A_k) = 0 \wedge \sum_{k \in U} \alpha_k \chi_{A_k} = 0$$

$$V = 0 \Rightarrow \sum_{k \in V} \alpha_k \cdot \mu(A_k) = 0 \wedge \sum_{k \in V} \alpha_k \chi_{A_k} = 0$$

co oznacza, że dla $U = 0$ lub $V = 0$ założenie 2^0 jest spełnione.

$$\underline{T]} \quad \int_A f d\mu = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(A_k)$$

D] Mamy

$$f^+ \cdot \frac{\text{pr.w. } A}{\sum_{k \in U} \alpha_k \chi_{A_k}}, \quad f^- \cdot \frac{\text{pr.w. } A}{\sum_{k \in V} \alpha_k \chi_{A_k}}$$

gdzie f^+ oznacza część dodatnią, a f^- część ujemną funkcji f .

Funkcje

$$\sum_{k \in U} \alpha_k \chi_{A_k} \quad \text{ i } \quad - \sum_{k \in V} \alpha_k \chi_{A_k}$$

albo są proste albo są granicami niemalejących ciągów funkcji prostych. W obu przypadkach mamy na mocy definicji całki Lebesgue'a

$$\begin{aligned} \int_A f^+ d\mu &= \sum_{k \in U} \alpha_k \mu(A_k) \\ \int_A f^- d\mu &= \sum_{k \in V} \alpha_k \mu(A_k) \end{aligned}$$

skąd na mocy założenia 2^0 istnieje całka

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(A_k)$$

co było do dowiedzenia.

(c24) f jest funkcją całkowalną na zbiorze $A \Leftrightarrow |f|$ jest funkcją całkowalną na zbiorze A .

D] f całkowalna na zbiorze $A \Leftrightarrow \int_A f^+ d\mu < \infty \wedge$

$$\wedge \int_A f^- d\mu < \infty \Leftrightarrow \int_A |f| d\mu \stackrel{(c21)}{=} \int_A f^+ d\mu +$$

$$+ \int_A f^- d\mu < \infty \Leftrightarrow |f| \text{ całkowalna na zbiorze } A$$

(c25) f jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze $A \Leftrightarrow |f|$ jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze A .

D] Wynika z definicji funkcji prawie całkowalnej na zbiorze oraz z własności (c24).

(c26) f jest funkcją całkowalną na zbiorze $A \wedge B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \Rightarrow f$ jest funkcją całkowalną na zbiorze B .

D Wynika z własności (c12) zastosowanej do funkcji f^+ i f^- .

(c27) f jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze $A \wedge B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \Rightarrow f$ jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze B .

D Wynika z definicji funkcji prawie całkowalnej na zbiorze i z własności (c26).

(c28) f jest funkcją mierzalną i ograniczoną na zbiorze $A \in \mathcal{S} \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow f$ jest funkcją całkowalną na zbiorze A .

D Z założenia

$$\bigvee_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ a > 0}} \bigwedge_{x \in A} |f(x)| \leq a \Rightarrow \bigwedge_{x \in A} f^+(x) \leq a \wedge f^-(x) \leq a$$

Niech

$$\bigwedge_{x \in X} g(x) \stackrel{\text{def}}{=} a \stackrel{(c23)}{\Rightarrow} \int_A g d\mu = a \mu(A) < \infty$$

Wobec tego na mocy własności (c18)

$$\int_A f^+ d\mu \leq \int_A g d\mu < \infty \wedge \int_A f^- d\mu \leq \int_A g d\mu < \infty$$

skąd żądana własność.

(c29) g jest funkcją całkowalną na zbiorze $A \wedge f$ jest funkcją mierzalną na zbiorze $A \wedge |f| \leq g$ prawie wszędzie na zbiorze $A \Rightarrow f$ jest funkcją całkowalną na zbiorze A .

D Na mocy własności (c18) dowód wynika z nierówności

$$\int_A f^+ d\mu \leq \int_A g d\mu < \infty \wedge \int_A f^- d\mu \leq \int_A g d\mu < \infty$$

(c30) g jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze $A \wedge f$ jest funkcją mierzalną μ na zbiorze $A \wedge |f| \leq g$ prawie wszędzie na zbiorze $A \Rightarrow f$ jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze A .

D Na mocy twierdzenia § 207 istnieje zbiór B taki, że

$B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge g$ jest funkcją całkowalną na zbiorze $B \wedge f$ jest funkcją mierzalną na zbiorze $B \wedge |f| \leq g$ na zbiorze B .

Na mocy (c29) f jest funkcją całkowalną na zbiorze B a więc prawie całkowalną na zbiorze A .

(c31) f i g są funkcjami całkowalnymi na zbiorze $A \Rightarrow f + g$ jest funkcją całkowalną na zbiorze A .

D] Z założenia są spełnione obie nierówności (i) i (ii) z dowodu własności (c21), wobec czego są spełnione założenia tej własności i istnieje całka

$$\int_A (f + g) d\mu$$

Ponadto na mocy (iii) i analogicznej do niej nierówności wynikającej z (ii)

$$\int_B (f^- + g^-) d\mu = \int_B f^- d\mu + \int_B g^- d\mu < \infty$$

otrzymujemy na mocy (x), że

$$\int_B (f + g)^+ d\mu < \infty \wedge \int_B (f + g)^- d\mu < \infty$$

skąd na mocy własności (c8) żądana własność.

(c32) f i g są funkcjami prawie całkowalnymi na zbiorze $A \Rightarrow f + g$ jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze A .

D] Analogiczny do dowodu własności (c30).

(c33) f jest funkcją całkowalną na zbiorze $A \Rightarrow \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} cf$ jest funkcją całkowalną na zbiorze A .

D] Wynika na mocy własności (c17), ponieważ

$$(cf)^+ = \begin{cases} cf^+ & \text{dla } c \geq 0 \\ cf^- & \text{dla } c < 0 \end{cases}$$

$$(cf)^- = \begin{cases} cf^- & \text{dla } c \geq 0 \\ cf^+ & \text{dla } c < 0 \end{cases}$$

(c34) f jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze $A \Rightarrow \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} cf$ jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze A .

D] Oczywisty na mocy własności (c33).

(c35) f i g są funkcjami całkowalnymi na zbiorze $A \Rightarrow f - g$ jest funkcją całkowalną na zbiorze A .

D] Wynika z własności (c31) i (c33).

(c36) f i g są funkcjami prawie całkowalnymi na zbiorze $A \Rightarrow f - g$ jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze A .

D] Wynika z własności (c32) i (c34).

(c37) f jest funkcją mierzalną i ograniczoną na zbiorze A $\wedge g$ jest funkcją całkowalną na zbiorze $A \Rightarrow fg$ jest funkcją całkowalną na zbiorze A .

D] Z założenia

$$\bigvee_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ a > 0}} \bigwedge_{x \in A} |f(x)| \leq a \Rightarrow |f(x) g(x)| \leq a |g(x)|$$

Na mocy własności (c24) funkcja $|g|$ jest całkowalna na zbiorze A . Stąd na mocy własności (c33) funkcja $a|g|$ jest całkowalna na zbiorze A . Z uwagi na ograniczoność funkcji f funkcja fg jest na mocy twierdzenia § 191 mierzalna na zbiorze A . Wobec tego żądana własność wynika z własności (c29).

(c38) Twierdzenie o wartości średniej.

f jest funkcją mierzalną i ograniczoną na zbiorze A $\wedge g$ jest funkcją całkowalną na zbiorze A $\wedge g \geq 0$ na zbiorze $A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigvee_{s \in \mathbb{R}} \inf_{x \in A} f(x) \leq s \leq \sup_{x \in A} f(x) \wedge \int_A fg d\mu = s \cdot \int_A g d\mu$$

D] Wprowadźmy oznaczenia

$$c = \inf_{x \in A} f(x), \quad d = \sup_{x \in A} f(x)$$

Zatem

$$\bigwedge_{x \in A} cg(x) \leq f(x) g(x) \leq dg(x)$$

i na mocy własności (c17) i (c18)

$$(oo) \quad c \int_A g d\mu \leq \int_A fg d\mu \leq d \int_A g d\mu$$

ponieważ całka

$$\int_A g d\mu = a$$

istnieje na mocy całkowalności funkcji g na zbiorze A , a całka

$$\int_A fg d\mu$$

na mocy własności (c37). Ponadto z założenia, że $g \geq 0$ na zbiorze A wynika, że

$$\alpha \geq 0$$

Gdy $\alpha = 0$, wtedy na mocy (oo) każda liczba $c \leq s \leq d$ spełnia żadaną własność. Gdy $\alpha > 0$, wystarczy przyjąć

$$s = \frac{\int_A f g \, d\mu}{\alpha}$$

(c39) f_1, f_2, \dots są funkcjami mierzalnymi μ i nieujemnymi prawie wszędzie na zbiorze $A \in \mathcal{S}$ $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ prawie wszędzie na zbiorze $A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\mu$$

D] Na mocy twierdzenia § 208 istnieje zbiór $H \in \mathcal{S}$, $H \subset A$, $\mu(A-H) = 0$ taki, że funkcje f_1, f_2, \dots są mierzalne i nieujemne na zbiorze H i $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ na zbiorze H . Z faktu, że $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ wynika na mocy twierdzenia § 46, że

$$\bigwedge_{x \in H} \bigvee_{f(x) \in \mathbb{R}_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

a na mocy twierdzenia § 198 funkcja f jest mierzalna na zbiorze H . Zatem

$$f \stackrel{H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Dla każdej z funkcji f_1, f_2, \dots istnieje niemalejący ciąg funkcji prostych (g_{n1}, g_{n2}, \dots) $n = 1, 2, \dots$, mierzalnych na zbiorze H i takich, że

$$(v) \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n \stackrel{H}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} g_{nk}$$

Rozpatrzmy ciąg funkcji

$$(vv) \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} h_n \stackrel{\text{def}}{=} \max(g_{1n}, \dots, g_{nn})$$

Każda funkcja h_n przyjmuje tylko skończoną liczbę wartości skończonych i nieujemnych, jest zatem funkcją prostą. Na mocy twierdzenia § 197 funkcje h_n są mierzalne na zbiorze H . Ciąg (h_n) jest niemalejący, ponieważ każdy z ciągów $(g_{1n}), (g_{2n}), \dots$ jest niemalejący i wobec tego

$$h_{n+1} = \max(q_{1,n+1}, \dots, q_{n+1,n+1}) \geq \\ \geq \max(q_{1,n+1}, \dots, q_{n,n+1}) \geq \max(q_{1n}, \dots, q_{nn}) = h_n$$

Zatem istnieje funkcja graniczna

$$(vvv) \quad h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$$

Na mocy (v) jest na zbiorze H

$$\bigwedge_{n \in \mathfrak{R}} \bigwedge_{k \in \mathfrak{R}} f_n \geq q_{nk}$$

a stąd

$$\bigwedge_{n \in \mathfrak{R}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathfrak{R} \\ k \leq n}} f_n \geq f_k \geq q_{kn}$$

Zatem na mocy (vv) jest na zbiorze H

$$\bigwedge_{n \in \mathfrak{R}} h_n \leq f_n \leq f$$

a na mocy (vvv)

$$h \leq f$$

Z drugiej strony mamy na zbiorze H

$$\bigwedge_{n \in \mathfrak{R}} h \geq h_n \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathfrak{R}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathfrak{R} \\ k \geq n}} h \geq q_{nk} \xRightarrow{(v)} \\ \xRightarrow{(v)} \bigwedge_{n \in \mathfrak{R}} h \geq f_n \Rightarrow h \geq f$$

Zatem $h = f$ na zbiorze H , czyli

$$f \stackrel{H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$$

a następnie na mocy własności (c18)

$$\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_H \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_H f d\mu \stackrel{(154)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_H h_n d\mu \leq \\ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_H f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \leq \int_H f d\mu = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

skąd

$$\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

(c40) f_1, f_2, \dots są funkcjami mierzalnymi μ na zbiorze $A \in \mathcal{S} \wedge$
 $\vee f_1 \leq f_2 \leq \dots$ prawie wszędzie na zbiorze $A \wedge$

$$\wedge \text{ istnieje } \int_A f_1 d\mu \neq -\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \text{ istnieją } \wedge$$

$$\wedge \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

D] Na mocy twierdzenia § 208 istnieje zbiór $H \in \mathcal{S}, H \subset A, \mu(A-H) = 0$ taki, że funkcje f_1, f_2, \dots są mierzalne na zbiorze H i $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ na zbiorze H . Niech

$$(a) \quad f_1 \stackrel{H}{=} f_1^+ - f_1^- \wedge \int_A f_1 d\mu = \int_A f_1^+ d\mu - \int_A f_1^- d\mu$$

gdzie f_1^+ jest częścią dodatnią, a f_1^- częścią ujemną funkcji f_1 . Z założenia, że $\int_A f_1 d\mu \neq -\infty$, wynika, że całka $\int_A f_1^- d\mu$ jest skończona, a zatem funkcja f_1^- prawie całkowna na zbiorze A i na mocy własności (c19) skończona prawie wszędzie na zbiorze A . Załóżmy, że zbiór H został już tak dobrany na mocy twierdzenia § 208, że funkcja f_1^- jest skończona na tym zbiorze. Ze wzoru (a) wynika, że

$$f_1 + f_1^- \geq 0 \text{ na zbiorze } H$$

a na mocy założenia, że $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ na zbiorze H , jest także

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n + f_1^- \geq 0 \text{ na zbiorze } H$$

Ciąg $(f_n + f_1^-)$ jest zatem niemalejącym ciągiem funkcji mierzalnych nieujemnych na zbiorze H i na mocy własności (c39)

$$\int_A (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n + f_1^-) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A (f_n + f_1^-) d\mu$$

skąd na mocy własności (c21) i założenia, że $\int_A f_1^- d\mu < \infty$,

$$\begin{aligned} \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu &= \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + f_1^-) d\mu - \int_A f_1^- d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A (f_n + f_1^-) d\mu - \int_A f_1^- d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu, \end{aligned}$$

czyli żądana własność.

(c41) f_1, f_2, \dots są funkcjami mierzalnymi μ na zbiorze $A \in \mathcal{S} \wedge$
 $\wedge f_1 \geq f_2 \geq \dots$ prawie wszędzie na zbiorze $A \wedge$

$$\wedge \int_A f_1 d\mu \neq \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

istnieją \wedge

$$\wedge \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

D] Stosując własność (c40) do ciągu $(-f_n)$ otrzymujemy żadaną własność.

(c42) f_1, f_2, \dots są funkcjami mierzalnymi μ i nieujemnymi prawie wszędzie na zbiorze $A \in \mathcal{S} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\mu$$

D] Niech $H \in \mathcal{S}$ będzie na mocy twierdzenia § 208 takim zbiorem, że

$H \subset A \wedge \mu(A-H) = 0 \wedge f_1, f_2, \dots$ są mierzalne i nieujemne na zbiorze H .

Ze względu na nieujemność funkcji f_1, f_2, \dots istnieje suma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ określona na zbiorze H i na mocy twierdzeń § 187 i § 198 mierzalna na zbiorze H . Zatem funkcja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest mierzalna μ na zbiorze A i żądana własność wynika z własności (c39) zastosowanej do ciągu $\left(\sum_{n=1}^k f_n\right)$.

(c43) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S} \wedge A_1 \subset A_2 \subset \dots \wedge A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \wedge$ istnieje całka $\int_A f d\mu \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f d\mu$$

D] Załóżmy najpierw, że f jest funkcją mierzalną μ i nieujemną prawie wszędzie na zbiorze A . Niech

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A_n \\ 0 & \text{dla } x \in A - A_n \end{cases}$$

Funkcje f_1, f_2, \dots są mierzalne μ i nieujemne prawie wszędzie na zbiorze A oraz

$$f \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \wedge f_1 \leq f_2 \leq \dots \text{ prawie wszędzie na zbiorze } A$$

Wobec tego na mocy własności (c39) mamy

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f d\mu$$

Niech teraz f będzie dowolną funkcją mierzalną μ na zbiorze A , dla której istnieje całka

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

gdzie f^+ jest częścią dodatnią, a f^- częścią ujemną funkcji f . Na mocy przypadku już udowodnionego mamy

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f^+ d\mu - \\ &- \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f^- d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{A_n} f^+ d\mu - \int_{A_n} f^- d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f d\mu \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z faktu, że z istnienia całki $\int_A f d\mu$ wynika, że co najmniej jedna z całek $\int_A f^+ d\mu, \int_A f^- d\mu$ jest skończona, a w konsekwencji co najmniej jedna z granic

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f^+ d\mu, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f^- d\mu$$

jest skończona.

$$(c44) \quad A_1, A_2, \dots \in S \wedge A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \wedge \int_A f d\mu \text{ istnieje} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu$$

D] Stosując własność (c43) do zbiorów $A_1, A_1+A_2, A_1+A_2+A_3, \dots$ otrzymujemy żadaną własność.

$$(c45) \quad A_1, A_2, \dots \in S \wedge A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \wedge f \text{ jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze } A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu \wedge \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{A_k} f d\mu \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f| d\mu < \infty$$

D] Pierwsza część tezy, tzn. równość

$$\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu$$

wynika bezpośrednio z własności (c44). Na mocy własności (c25) mamy

$$\int_A |f| d\mu < \infty$$

a na mocy własności (c44) zastosowanej do funkcji $|f|$

$$\int_A |f| d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f| d\mu < \infty$$

Wreszcie na mocy własności (c22)

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \left| \int_{A_k} f d\mu \right| \leq \int_{A_k} |f| d\mu$$

skąd

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{A_k} f d\mu \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f| d\mu < \infty$$

c46) Lemat Fatou

f_1, f_2, \dots są funkcjami mierzalnymi i nieujemnymi na zbiorze $A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \geq \int_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

D] Na mocy § 39

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{A}{=} \sup_n g_n$$

gdzie

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} g_n \stackrel{A}{=} \inf_k f_{n+k-1} = \inf (f_n, f_{n+1}, \dots)$$

Ze względu na nieujemność funkcji f_1, f_2, \dots na zbiorze A ciąg (g_n) jest ciągiem niemalejącym, a więc mającym granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \stackrel{A}{=} \sup_n g_n$$

wobec czego jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n \stackrel{A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

Na mocy twierdzenia § 198 funkcje g_1, g_2, \dots są mierzalne na zbiorze A i funkcja $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n$ jest mierzalna na zbiorze A . Ponadto z nieujemności funkcji f_1, f_2, \dots wynika nieujemność funkcji g_1, g_2, \dots oraz funkcji $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n$. Na mocy własności (c39) otrzymujemy

$$(b) \quad \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n d\mu = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu$$

Ale z określenia funkcji g_1, g_2, \dots wynika, że

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{x \in A} g_n(x) \leq f_n(x)$$

a stąd na mocy własności (c18)

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \int_A g_n d\mu \leq \int_A f_n d\mu$$

i w konsekwencji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_A f_n d\mu$$

Z uwagi na istnienie granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu \stackrel{(\S 44)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_A g_n d\mu$$

otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_A f_n d\mu$$

a stąd na mocy (b) tezę lematu.

(c47) Twierdzenie Lebesgue'a

$f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f \wedge g$ jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze A $\wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \leq g$ prawie wszędzie na zbiorze $A \Rightarrow \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \text{ istnieją } \wedge \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

D] Na mocy twierdzenia § 208 istnieje zbiór B taki, że g jest funkcją całkowalną na zbiorze B i

$$B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0, \wedge f_n \xrightarrow{B} f \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{x \in B} |f_n(x)| \leq g(x) < \infty$$

(c19)

Na mocy własności (c26) i (c29) funkcje f, f_1, f_2, \dots są całkowlalne na zbiorze B . Wobec tego na mocy twierdzeń § 187 i § 189

$$\bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{x \in B} f_n(x) + g(x) \geq 0 \wedge g(x) - f_n(x) \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g) \stackrel{B}{=} f + g \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} (g - f_n) \stackrel{B}{=} g - f$$

i na mocy własności (c46)

$$(d) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_B \int (f_n + g) d\mu &\geq \int_B (f + g) d\mu \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_B \int (g - f_n) d\mu &\geq \int_B (g - f) d\mu \end{aligned}$$

Zwróćmy teraz uwagę, że dla dowolnego ciągu liczbowego (a_n) i dowolnej liczby rzeczywistej c jest na mocy definicji z § 39

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf (a_n + c) &= \sup_n \inf_k (a_{n+k-1} + c) = \\ &= \sup_n (\inf_k a_{n+k-1} + c) = \sup_n \inf_k a_{n+k-1} + c = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n + c \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf (c - a_n) &= \sup_n \inf_k (c - a_{n+k-1}) = \\ &= \sup_n (c - \sup_k a_{n+k-1}) = c - \inf_n \sup_k a_{n+k-1} = c - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_B \int (f_n + g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left(\int_B f_n d\mu + \int_B g d\mu \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_B f_n d\mu + \int_B g d\mu \end{aligned}$$

i analogicznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_B \int (g - f_n) d\mu = \int_B g d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_B \int f_n d\mu$$

skąd na mocy (d)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_B \int f_n d\mu + \int_B g d\mu &\geq \int_B f d\mu + \int_B g d\mu \\ \int_B g d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_B \int f_n d\mu &\geq \int_B g d\mu - \int_B f d\mu \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że na mocy całkowalności funkcji f i g na zbiorze B jest

$$\left| \int_B f d\mu \right| < \infty \wedge \left| \int_B g d\mu \right| < \infty$$

otrzymujemy z powyższego na mocy twierdzenia § 43

$$\int_B f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n d\mu \leq \int_B f d\mu$$

skąd

$$\begin{aligned} \int_B f d\mu &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n d\mu = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n d\mu \quad (\S 44) \\ &\stackrel{(\S 44)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n d\mu \end{aligned}$$

Zatem na mocy własności (c8) otrzymujemy tezę udowadnianego twierdzenia.

$$(c48) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. } \omega A} f \wedge \bigvee_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ a > 0}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |f_n| < a \text{ prawie wszędzie na zbiorze } A \wedge$$

$$\wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \text{ istnieją } \wedge$$

$$\wedge \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

D] Jest to bezpośredni wniosek z własności (c47), ponieważ w przypadku $\mu(A) < \infty$ funkcja

$$\bigwedge_{x \in X} g(x) \stackrel{\text{def}}{=} a$$

jest całkowalna na zbiorze A .

$$(c49) \quad f_n \xrightarrow{\mu A} f \wedge g \text{ jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze } A \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \leq g \text{ prawie wszędzie na zbiorze } A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A f d\mu \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \text{ istnieją } \wedge \int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

D] Na mocy własności (wμ13) zbieżności według miary istnieje ciąg $m_1, m_2, \dots \in \mathbb{N}$ taki, że

$$f_{m_n} \xrightarrow{\text{pr. } \omega A} f$$

skąd wynika, że

$|f| \leq g$ prawie wszędzie na zbiorze A

Analogicznie, jak w dowodzie własności (c48), istnieje zbiór B taki, że

$$B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge_{(w\mu 2)} f_n \xrightarrow{\mu B} f \wedge \\ \wedge \bigwedge_{x \in B} |f(x)| \leq g(x) < \infty \wedge_{(c 19)} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{x \in B} |f_n(x)| \leq g(x) < \infty \wedge$$

$\wedge g$ jest funkcją całkowalną na zbiorze B .

Na mocy własności (c26) i (c29) funkcje f, f_1, f_2, \dots są całkowalne na zbiorze B . Wobec tego istnieją całki skończone

$$a = \int_B g d\mu = \int_A g d\mu, \quad b = \int_B f d\mu = \int_A f d\mu,$$

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \int_B f_n d\mu = \int_A f_n d\mu = b_n$$

spełniające na mocy własności (c22) i (c18) nierówności

$$|b| \leq a \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |b_n| \leq a$$

Założmy, że ciąg liczbowy (b_n) nie jest zbieżny do granicy b . Zatem

$$\bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigvee_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq n_0}} |b_n - b| \geq \varepsilon \implies \bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{k_1 < k_2 < \dots \in \mathbb{N}} b_{k_n} \in \langle -a; b - \varepsilon \rangle \vee$$

$$\vee b_{k_n} \in \langle b + \varepsilon; a \rangle$$

Któryś z przedziałów $\langle -a; b - \varepsilon \rangle, \langle b + \varepsilon; a \rangle$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu (b_{k_n}) . Wybieramy z niego wyraz b_{p_1} i dzielimy na połowy. Któraś z połówek zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu (b_{k_n}) o wskaźnikach $k_n > p_1$. Wybieramy z niej wyraz b_{p_2} i dzielimy ją na połowy itd. W ten sposób otrzymujemy ciąg liczbowy

$$b_{p_1}, b_{p_2}, \dots$$

spełniający warunek Cauchy'ego, a więc zbieżny. Niech

$$(t) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_{p_n} = d$$

Jak wynika z konstrukcji tego ciągu jest

$$|d - b| \geq \varepsilon, \text{ czyli } d \neq b$$

Na mocy własności (w μ 5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{p_n} \xrightarrow{\mu \cdot A} f$$

a na mocy własności (w μ 13)

$$p_1 < p_2 < \dots \in \pi \quad f_{p_n} \xrightarrow{\text{pr.w.} A} f$$

Na mocy własności (c47)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{p_n} = b$$

wbrew (t). Wobec tego musi być

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

co stanowi tezę własności (c49).

(c50) $f_n \xrightarrow{j.A} f \wedge f_1, f_2, \dots$ są funkcjami całkowalnymi na zbiorze

$$A \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \text{istnieją } \int_A f d\mu \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \wedge$$

$$\wedge \int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

D) Niech ε będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią. Na mocy własności (jz5)

$$\bigvee_{n_0 \in \mathcal{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \in A} |f_n(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon$$

Niech

$$g \stackrel{\text{def}}{=} |f_{n_0}| + \varepsilon$$

Ponieważ na mocy własności (c17) i (c15)

$$\int_A \varepsilon d\mu = \varepsilon \mu(A) < \infty$$

więc na mocy własności (c31) funkcja g jest całkowalna na zbiorze A i

$$\bigwedge_{n \in \mathcal{N}} |f_n| < g \quad \text{na zbiorze } A$$

Ponieważ na mocy własności (prw10)

$$f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f$$

więc własność (c50) wynika z twierdzenia (c47) zastosowanego do ciągu $f_{n_0}, f_{n_0+1}, \dots$, co nie zmienia wartości

$$\begin{aligned} \int_A f \, d\mu &= \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\mu \\ (c51) \quad f_n &\xrightarrow{\text{pr. j. } A} f \wedge g \text{ jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze} \\ &A \wedge \bigwedge_{n \in \mathcal{N}} |f_n| < g \text{ prawie wszędzie na zbiorze } A \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{istnieją } \int_A f \, d\mu \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\mu \wedge \int_A f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\mu \end{aligned}$$

D) Wynika z własności (wμ9) i (c49).

(c52) f jest funkcją prawie całkowalną na zbiorze $A \in \mathcal{S} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathcal{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A}} \left(\mu(B) < \delta \Rightarrow \int_B |f| \, d\mu < \varepsilon \Rightarrow \left| \int_B f \, d\mu \right| < \varepsilon \right)$$

D) Niech $H \in \mathcal{S}$, $H \subset A$, $\mu(A-H) = 0$ będzie zbiorem, na którym funkcja f jest całkowalna i skończona. Niech na zbiorze H

$$\bigwedge_{n \in \mathcal{N}} f_n = \min(n, |f|)$$

Na mocy twierdzenia § 197 funkcje f_1, f_2, \dots są mierzalne i nieujemne na zbiorze H a ponadto

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \wedge |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ na zbiorze } H$$

Ponieważ wynika stąd, że funkcje f_1, f_2, \dots są mierzalne μ i nieujemne prawie wszędzie na zbiorze A i $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ prawie wszędzie na zbiorze A , więc na mocy własności (c39) i prawie całkowalności funkcji f na zbiorze A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu < \infty$$

Wobec tego

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{m \in \mathcal{N}} 0 < \int_A (|f| - f_m) d\mu = \int_A |f| d\mu - \int_A f_m d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech $\delta = \varepsilon/2m$ i

$$B \in \mathcal{S} \wedge B \subset A \wedge \mu(B) < \delta$$

Wtedy biorąc pod uwagę własności (c22), (c21), (c18) i (c12)

$$\begin{aligned} \left| \int_B f d\mu \right| &\leq \int_B |f| d\mu = \int_B (|f| - f_m) d\mu + \int_B f_m d\mu < \\ &< \int_B (|f| - f_m) d\mu + m\mu(B) \leq \int_A (|f| - f_m) d\mu + m \cdot \frac{\varepsilon}{2m} < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

(c53) Całkowanie przez podstawienie

Z] 1° Dane są dwie przestrzenie z miarą (X, \mathcal{S}, μ) i (Y, \mathcal{T}, ν) .

$$\begin{aligned} 2^\circ \bigvee_{\tau} \left(\bigwedge_{x \in X} y = \tau(x) \in Y \right) \wedge \bigwedge_{B \in \mathcal{T}} \bigvee_{A \in \mathcal{S}} A = \\ = \tau^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \tau(x) \in B\}. \end{aligned}$$

$$3^\circ \bigvee_{\substack{g \text{ mierzalna} \\ g \geq 0}} \mu \bigwedge_{B \in \mathcal{T}} \nu(B) = \int_A g(x) d\mu(x).$$

$$4^\circ \text{ istnieje całka } \int_B f(y) d\nu(y) \text{ albo } \int_A f[\tau(x)] g(x) d\mu(x)$$

$$\text{T]} \int_B f(y) d\nu(y) = \int_A f[\tau(x)] g(x) d\mu(x)$$

D] Załóżmy najpierw, że funkcja f jest funkcją charakterystyczną dowolnego zbioru $D \in \mathcal{T}$, czyli

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y \in D \\ 0 & \text{dla } y \in Y - D \end{cases}$$

skąd

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y \in B \cap D \\ 0 & \text{dla } y \in B - D \end{cases}$$

Niech

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \tau(x) \in D\} \in \mathcal{S}$$

Wtedy

$$A \cap C = \{x: \tau(x) \in B\} \cap \{x: \tau(x) \in D\} = \{x: \tau(x) \in B \cap D\} \in \mathcal{S}$$

$$A - C = \{x: \tau(x) \in B\} - \{x: \tau(x) \in D\} = \{x: \tau(x) \in B - D\} \in \mathcal{S}$$

i wobec tego

$$f[\tau(x)] = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A \cap C \\ 0 & \text{dla } x \in A - C \end{cases}$$

Na mocy (151) i założenia 3^o jest zatem

$$\begin{aligned} \int_B f(y) d\nu(y) &= \nu(B \cap D) = \int_{A \cap C} g(x) d\mu(x) = \\ &= \int_{A \cap C} f[\tau(x)] g(x) d\mu(x) = \int_{A \cap C} f[\tau(x)] g(x) d\mu(x) + \\ &+ \int_{A - C} f[\tau(x)] g(x) d\mu(x) = \int_A f[\tau(x)] g(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

Twierdzenie jest zatem prawdziwe dla wszystkich funkcji charakterystycznych mierzalnych. Wobec tego na mocy własności (c17) i (c21) jest również prawdziwe dla wszystkich funkcji prostych mierzalnych.

Jeśli funkcja f jest mierzalna na zbiorze B , to

$$\bigwedge_{a \in \mathcal{R}} \{y: f(y) < a \wedge y \in B\} \in \mathcal{T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x: f[\tau(x)] < a \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

czyli funkcja $f[\tau(x)]$ jest wtedy mierzalna na zbiorze A .

Założmy, że f jest funkcją mierzalną nieujemną na zbiorze B . Wtedy funkcja $f[\tau(x)] g(x)$ jest na mocy twierdzenia § 191 mierzalna i nieujemna na zbiorze A . Jeśli f_1, f_2, \dots jest ciągiem niemalejącym funkcji prostych mierzalnych na zbiorze B i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{B}{=} f$$

to $f_1[\tau(x)] g(x), f_2[\tau(x)] g(x), \dots$ jest niemalejącym ciągiem funkcji mierzalnych nieujemnych na zbiorze A i na mocy własności (nz9)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n[\tau(x)] g(x) \stackrel{A-E}{=} f[\tau(x)] g(x)$$

gdzie

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (f[\tau(x)] = 0 \wedge |g(x)| = \infty) \vee \\ \vee (|f[\tau(x)]| = \infty \wedge g(x) = 0)\} \in \mathcal{S}$$

Ale na mocy faktu, że ciąg $(f_n[\tau(x)])$ jest niemalejący o wyrazach nieujemnych

$$f[\tau(x)] = 0 \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathcal{N}} f_n[\tau(x)] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathcal{N}} f_n[\tau(x)] g(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n[\tau(x)] g(x) = f[\tau(x)] g(x)$$

Analogicznie

$$g(x) = 0 \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathcal{N}} f_n[\tau(x)] g(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n[\tau(x)] g(x) = f[\tau(x)] g(x)$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n[\tau(x)] g(x) \stackrel{A}{=} f[\tau(x)] g(x)$$

Wobec tego na mocy własności (c39) i udowodnionego twierdzenia dla funkcji prostych mamy

$$\int_B f(y) d\nu(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(y) d\nu(y) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n[\tau(x)] g(x) d\mu(x) = \\ = \int_A f[\tau(x)] g(x) d\mu(x)$$

Wobec tego twierdzenie zostało udowodnione dla każdej funkcji f mierzalnej i nieujemnej na zbiorze B .

Dla dowolnej funkcji f mierzalnej na zbiorze B mamy

$$f(y) = f^+(y) - f^-(y)$$

gdzie $f^+(y)$ i $f^-(y)$ są funkcjami mierzalnymi i nieujemnymi na zbiorze B i na mocy własności (c17) i (c21) oraz założenia 4^o otrzymujemy tezę twierdzenia.

Dla dowolnej funkcji f mierzalnej ν na zbiorze B istnieją takie zbiory P i Q , że

$P, Q \in \mathcal{S} \wedge B = P + Q \wedge \nu(Q) = 0 \wedge f$ jest funkcją mierzalną na zbiorze P .

Wobec tego, że zbiór

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \tau(x) \in Q\}$$

na mocy założenia 3^o spełnia warunek

$$\nu(Q) = 0 = \int_R g(x) d\mu(x)$$

więc na mocy własności (c13)

$$g(x) \stackrel{\text{pr.w.} R}{=} 0 \Rightarrow f[\tau(x)] g(x) \stackrel{\text{pr.w.} R}{=} 0 \Rightarrow \int_R f[\tau(x)] g(x) d\mu(x) = 0$$

Niech

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \tau(x) \in P\}, \quad A = N + R.$$

Wynika stąd, że

$$\begin{aligned} \int_B f(y) d\nu(y) &= \int_P f(y) d\nu(y) = \int_N f[\tau(x)] g(x) d\mu(x) = \\ &= \int_N f[\tau(x)] g(x) d\mu(x) + \int_R f[\tau(x)] g(x) d\mu(x) = \\ &= \int_A f[\tau(x)] g(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia.

(c54) Z 1^o Dana jest przestrzeń z miarą (X, \mathcal{S}, μ) oraz przestrzeń

$$\begin{aligned} & Y \text{ z } \sigma\text{-ciałem } \mathcal{T} \\ 2^o & \bigvee_{\tau} \left(\bigwedge_{x \in X} y = \tau(x) \in Y \right) \wedge \\ & \wedge \bigwedge_{B \in \mathcal{T}} \bigvee_{A \in \mathcal{S}} A = \tau^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \tau(x) \in B\} \\ 3^o & \bigvee_{\substack{\nu \text{ mierzalna } \mu \\ g \geq 0 \text{ pr.w.}}} \bigvee_{B \in \mathcal{T}} \bigwedge_{A \in \mathcal{S}} \nu(B) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A g(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

T ν jest miarą określoną na σ -ciele \mathcal{T} w przestrzeni Y .

D Z definicji funkcja ν spełnia własności $(\mu 1)$ i $(\mu 3)$ miary (patrz § 105). Dla $B = 0$ jest $A = 0$ i $\nu(0) = 0 < \infty$, wobec czego jest spełniona własność $(\mu 2)$. Własność $(\mu 4)$ wynika z własności (c44) dla całek Lebesgue'a. Wobec tego ν jest miarą.

(c55) Z 1^o Dana jest przestrzeń z miarą (X, S, μ) .

2^o g jest funkcją mierzalną μ i nieujemną prawie wszędzie.

$$3^o \bigwedge_{A \in S} \nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A g d\mu$$

4^o istnieje $\int_A f d\nu$

$$\text{T} \int_A f d\nu = \int_A f g d\mu$$

D Na mocy własności (c54) ν jest miarą i mamy dwie przestrzenie z miarą (X, S, μ) i (X, S, ν) . Przyjmując $\tau(x) = x$ otrzymujemy żadaną własność jako szczególny przypadek własności (c53).

(c56) Dane są dwie przestrzenie z miarą (X, S, μ_1) i $(X, S, \mu_2) \wedge \mu_1 \leq \mu_2 \wedge f$ jest funkcją mierzalną na zbiorze $A \in S \wedge f \geq 0$ na zbiorze $A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_A f d\mu_1 \leq \int_A f d\mu_2$$

D Dla funkcji f prostej mierzalnej na zbiorze A własność wynika bezpośrednio z definicji (151). Wobec tego, że z założenia f jest funkcją mierzalną nieujemną na zbiorze A , własność w przypadku ogólnym wynika ze wzoru (154) i z własności (c56) wykazanej dla funkcji prostych mierzalnych na zbiorze A .

(c57) Dane są trzy przestrzenie z miarą (X, S, μ_1) , (X, S, μ_2) i $(X, S, \mu_1 + \mu_2) \wedge$ istnieją całki

$$\begin{aligned} & \int_A f d\mu_1, \int_A f d\mu_2, \int_A f d(\mu_1 + \mu_2) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_A f d(\mu_1 + \mu_2) = \int_A f d\mu_1 + \int_A f d\mu_2 \end{aligned}$$

D Zauważmy na wstępie, że jeśli μ_1 i μ_2 są miarami określonymi na σ -ciele S w przestrzeni X , to $\mu_1 + \mu_2$ jest również taką miarą. Wynika to stąd, że dla funkcji $\mu_1 + \mu_2$ własności (μ_1) i (μ_3) są spełnione w sposób oczywisty, następnie

$$(\mu_1 + \mu_2)(0) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1(0) + \mu_2(0) = 0 < \infty$$

więc jest spełniona własność (μ_2) i wreszcie

$$\begin{aligned}
& (\mu_1 + \mu_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \right) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \right) + \mu_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} [\mu_1(A_k) + \mu_2(A_k)] = \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_1 + \mu_2)(A_k)
\end{aligned}$$

Dla funkcji f prostej mierzalnej na zbiorze A mamy z definicji (151)

$$\begin{aligned}
\int_A f d(\mu_1 + \mu_2) &= \sum_{k=1}^m \alpha_k (\mu_1 + \mu_2)(A_k \cap A) = \\
&= \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu_1(A_k \cap A) + \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu_2(A_k \cap A) = \\
&= \int_A f d\mu_1 + \int_A f d\mu_2
\end{aligned}$$

Dla funkcji mierzalnych nieujemnych na zbiorze A własność wynika ze wzoru (154) a dla dowolnych funkcji mierzalnych na zbiorze A z faktu, że

$$\begin{aligned}
\int_A f^+ d(\mu_1 + \mu_2) &= \int_A f^+ d\mu_1 + \int_A f^+ d\mu_2 \\
\int_A f^- d(\mu_1 + \mu_2) &= \int_A f^- d\mu_1 + \int_A f^- d\mu_2
\end{aligned}$$

Dla dowolnych funkcji mierzalnych $\mu_1 + \mu_2$ na zbiorze A własność wynika z własności (c8) na mocy przypadku już udowodnionego.

(c58) Dane są dwie przestrzenie z miarą (X, S, μ) i $(X, S, c\mu)$, gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą nieujemną \wedge istnieje

całka $\int_A f d\mu \Rightarrow$ istnieje całka $\int_A f d(c\mu) \wedge$

$$\wedge \int_A f d(c\mu) = c \int_A f d\mu$$

D] Analogiczny do dowodu własności (c57).

(c59) Z] 1^o Dany jest zbiór $A \in S$ w przestrzeni z miarą (X, S, μ) .

2^o Dany jest przedział otwarty $B = (a; b) \in \mathbb{R}$.

3^o f jest funkcją rzeczywistą określoną na produkcie kartezjańskim $A \times B$.

4^o $\bigwedge_{y \in B}$ funkcja $f(x, y)$ jest całkowalna na zbiorze A .

5^o $h(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f(x, y) d\mu(x)$.

6^o $\bigwedge_{y_0 \in B}$ pochodna cząstkowa $f'_y(x, y_0)$ istnieje prawie wszędzie na zbiorze A .

7^o $\bigvee_{\substack{\delta \in \mathcal{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_g g$ jest określona i całkowalna na zbiorze A \wedge

$$\wedge \bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y, y_0 \in B} 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} \right| < g(x).$$

I $\bigwedge_{y_0 \in B}$ istnieje pochodna $h'(y_0)$ \wedge

$$\wedge h'(y_0) = \int_A f'_y(x, y_0) d\mu(x).$$

D Niech (y_n) będzie ciągiem liczbowym spełniającym warunek

$$\bigwedge_{n \in \mathcal{N}} y_n \in B \wedge 0 < |y_n - y_0| < \delta \wedge y_n \rightarrow y_0$$

Niech

$$\bigwedge_{n \in \mathcal{N}} f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x, y_n) - f(x, y_0)}{y_n - y_0}$$

Na mocy własności (c35) i (c33) funkcje f_1, f_2, \dots są całkowalne na zbiorze A i z założenia 7^o

$$\bigwedge_{n \in \mathcal{N}} |f_n| < g \quad \text{na zbiorze } A$$

Ponadto z założenia 6^o

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{pr.w. } A} f'_y(x, y_0)$$

Na mocy własności (c47) istnieją

$$\int_A f'_y(x, y_0) d\mu(x) \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu(x)$$

oraz

$$\begin{aligned}
& \int_A f'_y(x, y_0) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f'_n(x) d\mu(x) = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \frac{f(x, y_n) - f(x, y_0)}{y_n - y_0} d\mu(x) = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_A f(x, y_n) d\mu(x) - \int_A f(x, y_0) d\mu(x)}{y_n - y_0} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(y_n) - h(y_0)}{y_n - y_0} = h'(y_0)
\end{aligned}$$

(c60) Z 1^o μ_1, \dots, μ_n są miarami określonymi odpowiednio na σ -ciałach $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ w przestrzeniach odpowiednio X_1, \dots, X_n .

2^o $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$.

3^o $A \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$ jest zbiorem miary μ półskończonej.

4^o χ_Q jest funkcją charakterystyczną zbioru $Q \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$.

5^o ciąg (i_1, \dots, i_n) jest ustaloną permutacją ciągu $(1, \dots, n)$.

$$\text{II} \int_A \chi_Q(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) = \mu(A \cap Q) =$$

$$\begin{aligned}
& = \int_{X_{i_n}} \left(\dots \int_{X_{i_2}} \left(\int_{A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]} \chi_Q(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right) d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \right. \\
& \quad \left. \dots \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n})
\end{aligned}$$

gdzie $A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]$ oznacza przekrój zbioru A przez punkt $(x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \in X_{i_2} \times \dots \times X_{i_n}$ i na mocy własności (przek7) z § 176 jest $A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}] \in \mathcal{S}_{i_1}$.

D) Mamy

$$\begin{aligned}
& \int_A \chi_Q(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) = \int_{A \cap Q} \chi_Q(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, \\
& \dots, x_n) + \int_{A-Q} \chi_Q(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) = \\
& = \int_{A \cap Q} d\mu(x_1, \dots, x_n) = \mu(A \cap Q)
\end{aligned}$$

Pozostaje zatem do udowodnienia druga równość. Wprowadzimy oznaczenie

$$j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, n\} \quad \mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_r} \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{j_1} \otimes \dots \otimes \mu_{j_r}$$

Wprowadzimy ponadto funkcje

$$(i) \quad \bigwedge_{H \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n} \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n-1\}} f_k^H(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{i_1, \dots, i_k} (H_{[x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}]}) \wedge \\ \wedge f_0^H(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_H(x_1, \dots, x_n)$$

Ponieważ $H \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$, więc na mocy własności (przek7) z § 176

$$k \in \{1, \dots, n-1\} \quad H_{[x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}]} \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_k$$

i funkcje (i) są określone w całych przestrzeniach odpowiednio $x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}$. Wykażemy, że gdy

(ii) $H \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n \wedge H$ jest zbiorem miary μ półskończonej

to

$$(iii) \quad \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n-1\}} \bigwedge_{x_{i_{k+1}} \in \mathcal{X}_{i_{k+1}}} \dots \bigwedge_{x_{i_n} \in \mathcal{X}_{i_n}} f_k^H(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) = \\ = \int_{\mathcal{X}_{i_k}} f_{k-1}^H(x_{i_k}, \dots, x_{i_n}) d\mu_{i_k}(x_{i_k})$$

oraz

$$(iv) \quad \mu(H) = \int_{\mathcal{X}_{i_n}} f_{n-1}^H(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \\ = \int_{\mathcal{X}_{i_n}} \left(\dots \int_{\mathcal{X}_{i_2}} \left(\int_{\mathcal{X}_{i_1}} \chi_H(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right) d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \dots \right. \\ \left. \dots \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n})$$

Dowód (iii) i (iv) przeprowadzimy w 6 częściach L1, ..., L6.
Dowód własności (c60) przeprowadzimy w części L7.

L1 Jeśli

$$(v) \quad H = H_1 \times \dots \times H_n, \quad H_1 \in \mathcal{F}_1 \wedge \dots \wedge H_n \in \mathcal{F}_n.$$

to wzory (iii) i (iv) są prawdziwe.

D Ze wzoru (v) wynika, że

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, n-1\}} H[x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}] =$$

$$= \begin{cases} H_{i_1} \times \dots \times H_{i_k} & \text{dla } (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \in H_{i_{k+1}} \times \dots \times H_{i_n} \\ 0 & \text{dla } (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \notin H_{i_{k+1}} \times \dots \times H_{i_n} \end{cases}$$

wobec czego na mocy (i)

$$(vi) \quad \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n-1\}} f_k^H(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) =$$

$$= \begin{cases} \mu_{i_1}(H_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mu_{i_k}(H_{i_k}) & \text{dla } (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \in H_{i_{k+1}} \times \dots \times H_{i_n} \\ 0 & \text{dla } (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \notin H_{i_{k+1}} \times \dots \times H_{i_n} \end{cases}$$

Funkcje te są mierzalne, ponieważ

$$\bigwedge_{a \in \mathcal{R}} \{ (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) : f_k^H(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) < a \} =$$

$$= \begin{cases} 0 \in \mathcal{F}_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{i_n} & \text{dla } a \leq 0 \\ X_{i_{k+1}} \times \dots \times X_{i_n} - H_{i_{k+1}} \times \dots \times H_{i_n} \in \mathcal{F}_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{i_n} \\ \text{gdz } \mu_{i_1}(H_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mu_{i_k}(H_{i_k}) > 0 \text{ i} \\ 0 < a \leq \mu_{i_1}(H_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mu_{i_k}(H_{i_k}) \\ X_{i_{k+1}} \times \dots \times X_{i_n} \in \mathcal{F}_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{i_n} \\ \text{dla } a > \mu_{i_1}(H_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mu_{i_k}(H_{i_k}) \end{cases}$$

Funkcja f_0^H jest również mierzalna, ponieważ

$$\bigwedge_{a \in \mathbb{R}} \{ (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) : f_0^H(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) < a \} =$$

$$= \begin{cases} 0 \in \mathcal{S}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{i_n} & \text{dla } a \leq 0 \\ x_{i_1} \times \dots \times x_{i_n} - H_{i_1} \times \dots \times H_{i_n} \in \mathcal{S}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{i_n} & \text{dla } 0 < a \leq 1 \\ x_{i_1} \times \dots \times x_{i_n} \in \mathcal{S}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{i_n} & \text{dla } a > 1 \end{cases}$$

Na mocy (vi) mamy

$$(vii) \quad \bigwedge_{k \in \{2, \dots, n-1\}} \int_{x_{i_k}} f_{k-1}^H(x_{i_k}, \dots, x_{i_n}) d\mu_{i_k}(x_{i_k}) =$$

$$= \begin{cases} \int_{H_{i_k}} \mu_{i_1}(H_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mu_{i_{k-1}}(H_{i_{k-1}}) d\mu_{i_k}(x_{i_k}) & \text{dla } (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \in \\ & H_{i_{k+1}} \times \dots \times H_{i_n} \\ 0 & \text{dla } (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \notin \\ & H_{i_{k+1}} \times \dots \times H_{i_n} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mu_{i_1}(H_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mu_{i_{k-1}}(H_{i_{k-1}}) \int_{H_{i_k}} d\mu_{i_k}(x_{i_k}) & \text{dla } (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \in H_{i_{k+1}} \times \dots \times H_{i_n} \\ 0 & \text{dla } (x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) \notin H_{i_{k+1}} \times \dots \times H_{i_n} \end{cases} =$$

$$= f_k^H(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n})$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
 \text{(viii)} \quad & \int_{x_{i_1}} \chi_H(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) = \\
 & = \int_{x_{i_1}} f_0^H(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) = \\
 & = \begin{cases} \int_{H_{i_1}} d\mu_{i_1}(x_{i_1}) = \mu_{i_1}(H_{i_1}) \\ \text{dla } (x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \in H_{i_2} \times \dots \times H_{i_n} \\ 0 \text{ dla } (x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \notin H_{i_2} \times \dots \times H_{i_n} \end{cases} = \\
 & = f_1^H(x_{i_2}, \dots, x_{i_n})
 \end{aligned}$$

oraz na mocy (vi)

$$\begin{aligned}
 \text{(ix)} \quad & \int_{x_{i_n}} f_{n-1}^H(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \\
 & = \int_{x_{i_n}} \mu_{i_1}(H_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mu_{i_{n-1}}(H_{i_{n-1}}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \\
 & = \mu_{i_1}(H_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mu_{i_{n-1}}(H_{i_{n-1}}) \cdot \int_{H_{i_n}} d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \\
 & = \mu_{i_1}(H_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mu_{i_n}(H_{i_n}) = \mu_1(H_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(H_n) = \mu(H)
 \end{aligned}$$

Ze wzorów (ix), (vii) i (viii) wynikają wzory (iii) i (iv).
W ten sposób dowód części L1 został zakończony.

L2 Jeśli

$$H \in \mathcal{S}_1 * \dots * \mathcal{S}_n$$

to wzory (iii) i (iv) są prawdziwe.

D) Na mocy własności (cp4) z § 174 zbiór H jest postaci

$$\text{(x)} \quad H = B_1 + \dots + B_m$$

gdzie zbiory B_1, \dots, B_m mają postać (v). Dla zbiorów B_1, \dots, B_m wzory (iii) i (iv) są prawdziwe na mocy części L1. Na mocy (x), własności (m2) miary i własności (h7) z § 201 mamy

$$(xi) \quad k \in \bigwedge \{0, 1, \dots, n-1\} \quad f_k^H = \sum_{j=1}^m f_k^{B_j}$$

Na mocy twierdzenia § 187 i nieujemności funkcji $f_k^{B_1}, \dots, f_k^{B_m}$ funkcje (xi) są mierzalne.

Mamy na mocy (xi), (vii), (viii) i (ix)

$$\begin{aligned} k \in \bigwedge \{1, \dots, n-1\} \quad f_k^H(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) &= \sum_{j=1}^m f_k^{B_j}(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) = \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{X_{i_k}} f_{k-1}^{B_j}(x_{i_k}, \dots, x_{i_n}) d\mu_{i_k}(x_{i_k}) = \\ &= \int_{X_{i_k}} \sum_{j=1}^m f_{k-1}^{B_j}(x_{i_k}, \dots, x_{i_n}) d\mu_{i_k}(x_{i_k}) = \\ &= \int_{X_{i_k}} f_{k-1}^H(x_{i_k}, \dots, x_{i_n}) d\mu_{i_k}(x_{i_k}) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \int_{X_{i_n}} f_{n-1}^H(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) &= \sum_{j=1}^m \int_{X_{i_n}} f_{n-1}^{B_j}(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \\ &= \sum_{j=1}^m \mu(B_j) = \mu(H) \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy wzory (iii) i (iv). W ten sposób dowód części L2 został zakończony.

L3 Z 1° Wzory (iii) i (iv) są prawdziwe dla $H=B, C \in \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n$.

2° $C \subset B$

3° $\mu(B) < \infty$

T Wzory (iii) i (iv) są prawdziwe również dla

$$H \stackrel{\text{def}}{=} B - C \in \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n$$

D Na mocy własności (przek4) z § 176 jest

$$\begin{aligned} k \in \bigwedge \{1, \dots, n-1\} \quad H[x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}] &= \\ &= B[x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}] - C[x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}]. \end{aligned}$$

Z założenia wynika, że

$$\int_{X_{i_n}} f_{n-1}^B(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \mu(B) < \infty$$

Wobec tego na mocy własności (c19) funkcja f_{n-1}^B jest skończona prawie wszędzie w przestrzeni X_{i_n} . Niech Z_{i_n} będzie zbiorem, na którym funkcja f_{n-1}^B jest skończona, i takim, że $\mu_{i_n}(X_{i_n} - Z_{i_n}) = 0$. Ponieważ z definicji

$$\bigwedge_{x_{i_n} \in Z_{i_n}} f_{n-1}^B = \mu_{i_1, \dots, i_{n-1}}(B[x_{i_n}]) < \infty$$

więc na mocy własności (m9) miary

$$(xii) \quad \bigwedge_{x_{i_n} \in Z_{i_n}} f_{n-1}^H(x_{i_n}) = f_{n-1}^B(x_{i_n}) - f_{n-1}^C(x_{i_n})$$

a na mocy twierdzenia § 189 funkcja f_{n-1}^H jest mierzalna na zbiorze Z_{i_n} , czyli mierzalna μ_{i_n} w przestrzeni X_{i_n} .

Zatem

$$\begin{aligned} \int_{X_{i_n}} f_{n-1}^H(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) &= \int_{Z_{i_n}} f_{n-1}^H(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \\ &= \int_{Z_{i_n}} f_{n-1}^B(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) - \int_{Z_{i_n}} f_{n-1}^C(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \\ &= \int_{X_{i_n}} f_{n-1}^B(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) - \int_{X_{i_n}} f_{n-1}^C(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \\ &= \mu(B) - \mu(C) \stackrel{(m9)}{=} \mu(H) \end{aligned}$$

Z kolei z faktu, że funkcja f_{n-1}^B jest skończona na zbiorze Z_{i_n} wynika, że

$$\begin{aligned} \bigwedge_{x_{i_n} \in Z_{i_n}} \int_{X_{i_{n-1}}} f_{n-2}^B(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) d\mu_{i_{n-1}}(x_{i_{n-1}}) = \\ = f_{n-1}^B(x_{i_n}) < \infty \end{aligned}$$

i na mocy własności (c19) funkcja f_{n-2}^B jest skończona prawie wszędzie w przestrzeni $X_{i_{n-1}}$ dla każdego ustalonego $x_{i_n} \in Z_{i_n}$. Niech $Z_{i_{n-1}}(x_{i_n}) \subset X_{i_{n-1}}$ będzie takim zbiorem, na którym $f_{n-2}^B(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) = \mu_{i_1, \dots, i_{n-1}}(B[x_{i_{n-1}}, x_{i_n}]) < \infty$

i $\mu_{i_{n-1}}(x_{i_{n-1}} - Z_{i_{n-1}}(x_{i_n})) = 0$. Na mocy własności (m9) miary

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{x_{i_n} \in Z_{i_n}} \bigwedge_{x_{i_{n-1}} \in Z_{i_{n-1}}(x_{i_n})} f_{n-2}^H(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) = \\ & = f_{n-2}^B(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) - f_{n-2}^C(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) \end{aligned}$$

a na mocy twierdzenia § 189 funkcja f_{n-2}^H jest mierzalna na zbiorze $Z_{i_{n-1}}(x_{i_n})$, a więc mierzalna $\mu_{i_{n-1}}$ dla każdego $x_{i_n} \in Z_{i_n}$. Zatem

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{x_{i_n} \in Z_{i_n}} \int_{x_{i_{n-1}}} f_{n-2}^H(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) d\mu_{i_{n-1}}(x_{i_{n-1}}) = \\ & = \int_{Z_{i_{n-1}}(x_{i_n})} f_{n-2}^H(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) d\mu_{i_{n-1}}(x_{i_{n-1}}) = \\ & = \int_{Z_{i_{n-1}}(x_{i_n})} f_{n-2}^B(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) d\mu_{i_{n-1}}(x_{i_{n-1}}) - \\ & - \int_{Z_{i_{n-1}}(x_{i_n})} f_{n-2}^C(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) d\mu_{i_{n-1}}(x_{i_{n-1}}) = \\ & = \int_{x_{i_{n-1}}} f_{n-2}^B(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) d\mu_{i_{n-1}}(x_{i_{n-1}}) - \\ & - \int_{x_{i_{n-1}}} f_{n-2}^C(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) d\mu_{i_{n-1}}(x_{i_{n-1}}) = \\ & = f_{n-1}^B(x_{i_n}) - f_{n-1}^C(x_{i_n}) \stackrel{(xii)}{=} f_{n-1}^H(x_{i_n}) \end{aligned}$$

a stąd

$$\mu(H) = \int_{x_{i_n}} \left(\int_{x_{i_{n-1}}} f_{n-2}^H(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) d\mu_{i_{n-1}}(x_{i_{n-1}}) \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n})$$

Postępując dalej analogicznie otrzymujemy wzory (iii) i (iv), gdyż na mocy własności (h11)

$$\chi_H = \chi_B - \chi_B \chi_C \overline{(h8)} \quad \chi_B - \chi_{B \cap C} = \chi_B - \chi_C$$

i wobec tego

$$\int_{x_{i_1}} f_0^H(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) = \int_{x_{i_1}} \chi_H(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_{i_1}} \chi_B(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) - \int_{x_{i_1}} \chi_C(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) = \\
&= \int_{x_{i_1}} f_0^B(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) - \int_{x_{i_1}} f_0^C(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) = \\
&= f_1^B(x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) - f_1^C(x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = f_1^H(x_{i_2}, \dots, x_{i_n})
\end{aligned}$$

dla tych x_{i_2}, \dots, x_{i_n} , dla których $f_1^B(x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) < \infty$. W ten sposób został zakończony dowód części L3.

L4 | Jeśli wzory (iii) i (iv) są prawdziwe dla $H_1, H_2, \dots \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$ takich, że $H_1 \subset H_2 \subset \dots$, to są prawdziwe również dla zbioru

$$H = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$$

D | Na mocy własności (przek1) z § 176 mamy

$$k \in \bigwedge_{\{1, \dots, n-1\}} H_{\left[x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}\right]} = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j \left[x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}\right]$$

gdzie na mocy własności (przek6)

$$(xiii) \quad H_1 \left[x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}\right] \subset H_2 \left[x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}\right] \subset \dots$$

Wobec tego na mocy (i) i własności (m7) miary

$$k \in \bigwedge_{\{1, \dots, n-1\}} f_k^H = \lim_{j \rightarrow \infty} f_k^{H_j} \wedge f_k^{H_1} \leq f_k^{H_2} \leq \dots$$

a na mocy własności (h5) z § 201 i wzorów z § 46

$$f_0^H = \lim_{j \rightarrow \infty} f_0^{H_j}$$

Mamy zatem

$$k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad f_k^H = \lim_{j \rightarrow \infty} f_k^{H_j}$$

i na mocy własności (c39) całek Lebesgue'a

$$k \in \bigwedge_{\{1, \dots, n-1\}} x_{i_{k+1}} \in x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} \in x_{i_n} \quad f_k^H(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{x_{i_k}} f_{k-1}^{H_j}(x_{i_k}, \dots, x_{i_n}) d\mu_{i_k}(x_{i_k}) = \\
&= \int_{x_{i_k}} \lim_{j \rightarrow \infty} f_{k-1}^{H_j}(x_{i_k}, \dots, x_{i_n}) d\mu_{i_k}(x_{i_k}) = \\
&= \int_{x_{i_k}} f_{k-1}^H(x_{i_k}, \dots, x_{i_n}) d\mu_{i_k}(x_{i_k})
\end{aligned}$$

Ponadto na mocy własności (m7) miary i własności (c39)

$$\begin{aligned}
\mu(H) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(H_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{x_{i_n}} f_{n-1}^{H_j}(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \\
&= \int_{x_{i_n}} \lim_{j \rightarrow \infty} f_{n-1}^{H_j}(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \int_{x_{i_n}} f_{n-1}^H(x_{i_n}) d\mu_{i_n}(x_{i_n})
\end{aligned}$$

Otrzymujemy stąd wzory (iii) i (iv). Tym samym dowód części L4 został zakończony.

L5] Jeśli $B \in \mathcal{E}_1 * \dots * \mathcal{E}_n$ oraz $\mu(B) < \infty$, to wzory (iii) i (iv) są prawdziwe dla każdego zbioru postaci

$$H \stackrel{\text{def}}{=} C \cap B, \text{ gdzie } C \in \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n$$

D] Niech \mathcal{T} oznacza klasę tych wszystkich zbiorów $C \in \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n$, dla których wzory (iii) i (iv) są prawdziwe, gdy $H = C \cap B$. Wykażemy, że klasa \mathcal{T} jest pseudo- σ -ciałem przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ (patrz § 29).

Ponieważ z definicji σ -ciała produktowego wynika, że $\mathcal{E}_1 * \dots * \mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n$, więc $B \in \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n$ i dla $H = B \cap B = B$ wzory (iii) i (iv) są prawdziwe na mocy L2. Tym samym klasa \mathcal{T} spełnia warunek ($\tau 1$) dla pseudo- σ -ciała.

Jeśli $C \in \mathcal{T}$, to

$$C^c \cap B = B - C \cap B = B - H$$

Ponieważ dla zbioru B wzory (iii) i (iv) są prawdziwe na mocy L2, a dla zbioru H z założenia, że $C \in \mathcal{T}$, więc na mocy L3 wzory (iii) i (iv) są prawdziwe również dla $C^c \cap B$, co oznacza, że $C^c \in \mathcal{T}$. Klasa \mathcal{T} spełnia zatem warunek ($\tau 2$) dla pseudo- σ -ciała.

Jeśli $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{T} \wedge C_1 \subset C_2 \subset \dots$, to wzory (iii) i (iv) są prawdziwe dla zbiorów

$$H_1 \stackrel{\text{def}}{=} C_1 \cap B, H_2 \stackrel{\text{def}}{=} C_2 \cap B, \dots, H_1 \subset H_2 \subset \dots$$

Wobec tego na mocy L4 wzory (iii) i (iv) są prawdziwe dla zbioru

$$H = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (C_j \cap B) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right) \cap B$$

co oznacza, że $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \in \mathcal{C}$. Klasa \mathcal{C} spełnia zatem także warunek (23) i jest pseudo- δ -ciałem przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$. Ponieważ

$$B \in \mathcal{C}_1 * \dots * \mathcal{C}_n$$

więc na mocy własności (k4) z § 23

$$C \in \bigwedge_{i=1}^n \mathcal{C}_i \implies H = C \cap B \in \mathcal{C}_1 * \dots * \mathcal{C}_n$$

i na mocy L2 wzory (iii) i (iv) są prawdziwe dla takiego zbioru H . Oznacza to, że

$$\bigwedge_{C \in \mathcal{C}_1 * \dots * \mathcal{C}_n} C \in \mathcal{C}$$

czyli

$$\mathcal{C}_1 * \dots * \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}$$

Klasa \mathcal{C} jest zatem pseudo- δ -ciałem zawierającym ciało produktowe $\mathcal{C}_1 * \dots * \mathcal{C}_n$. Niech \mathcal{C}^* oznacza najmniejsze pseudo- δ -ciało zawierające $\mathcal{C}_1 * \dots * \mathcal{C}_n$. Mamy

$$\mathcal{C}^* \subset \mathcal{C}$$

Ponieważ z definicji δ -ciało produktowe $\mathcal{C}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{C}_n$ jest najmniejszym δ -ciałem zawierającym ciało produktowe $\mathcal{C}_1 * \dots * \mathcal{C}_n$, więc na mocy twierdzenia § 33

$$\mathcal{C}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}$$

co oznacza prawdziwość tezy części L5. W ten sposób dowód części L5 został zakończony.

L6] Dla każdego zbioru H spełniającego warunki (ii) są prawdziwe wzory (iii) i (iv).

D] Z założenia, że H jest zbiorem miary μ poiskonczonej, wynika na mocy twierdzenia (D) z § 178, że

$$\bigwedge_{j \in \mathbb{N}} B_{1j} \in \mathcal{G}_1, \dots, B_{nj} \in \mathcal{G}_n \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} (B_{1j} \times \dots \times B_{nj}) \supset H \wedge \\ \wedge \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \mu(B_{1j} \times \dots \times B_{nj}) < \infty$$

Ala

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} (B_{1j} \times \dots \times B_{nj}) = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$$

gdzie

$$(xiv) \quad \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} H_j \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^j (B_{1i} \times \dots \times B_{ni}), \mu(H_j) < \infty$$

Na mocy własności (cp3) z § 174

$$H_1, H_2, \dots \in \mathcal{G}_1 * \dots * \mathcal{G}_n$$

a na mocy (xiv)

$$(xv) \quad H_1 \subset H_2 \subset \dots$$

Ponadto

$$H = H \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (H \cap H_j)$$

gdzie na mocy (xv)

$$H \cap H_1 \subset H \cap H_2 \subset \dots$$

Na mocy L5 wzory (iii) i (iv) są prawdziwe dla każdego ze zbiorów $H \cap H_1, H \cap H_2, \dots$, a na mocy L4 są prawdziwe dla zbioru H . W ten sposób został zakończony dowód części L6.

L7] Własność (c60).

D] Połóżmy $H = A \cap Q$. Wtedy na mocy (iv)

$$(xvi) \quad \mu(A \cap Q) = \\ = \int_{x_{i_n}} \left(\dots \int_{x_{i_2}} \left(\int_{x_{i_1}} \chi_{A \cap Q}(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right) d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \dots \right. \\ \left. \dots \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n})$$

Ale na mocy własności (h9) z § 201 jest

$$\chi_{A \cap Q} = \chi_A \cdot \chi_Q$$

a z definicji przekroju zbioru wynika, że

$$A[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}] = \{x_{i_1} : \chi_A(x_1, \dots, x_n) = 1\}$$

wobec czego

$$\begin{aligned} \int_{x_{i_1}} \chi_{A \cap Q}(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) &= \\ &= \int_{A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]} \chi_Q(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \end{aligned}$$

skąd na mocy (xvi) otrzymujemy własność (c60).

(c61) Twierdzenie Fubiniego

Z] 1^0 μ_1, \dots, μ_n są miarami określonymi odpowiednio na σ -ciałach $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ w przestrzeniach odpowiednio X_1, \dots, X_n .

2^0 $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$.

3^0 $A \in \mathcal{C}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{C}_n$ jest zbiorem miary μ półskończonej.

4^0 ciąg (i_1, \dots, i_n) jest ustaloną permutacją ciągu $(1, \dots, n)$.

5^0 istnieje całka

$$\int_A f(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{T]} \int_A f(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\int_{x_{i_n}} \left(\dots \int_{x_{i_2}} \left(\int_{A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right) d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \dots \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n})$$

gdzie $A[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$ oznacza przekrój zbioru A

przez punkt $(x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \in X_{i_2} \times \dots \times X_{i_n}$ i na mocy własności (przek7) z § 176 jest $A[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}] \in \mathcal{C}_{i_1}$.

D] Na mocy własności (c60) twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich funkcji charakterystycznych mierzalnych. Na mocy wzoru (142) z § 202 oraz własności (c17) i (c21) twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich funkcji prostych mierzalnych.

nych. Na mocy twierdzenia § 203 i własności (c39) twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich funkcji mierzalnych i nieujemnych na zbiorze A .

Niech teraz f będzie dowolną funkcją mierzalną na zbiorze A , dla której jest spełnione założenie 5^o. Niech f^+ i f^- będą odpowiednio częścią dodatnią i częścią ujemną funkcji f na zbiorze A , czyli

$$(i) \quad f = f^+ - f^-$$

oraz

$$(ii) \quad \int_A f(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) = \\ = \int_A f^+(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) - \\ - \int_A f^-(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n)$$

Z założenia 5^o wynika, że

$$\int_A f^+(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) < \infty$$

albo

$$(iii) \quad \int_A f^-(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) < \infty$$

Ze względu na symetrię dowodu wystarczy rozpatrzyć przypadek (iii).

Na mocy własności (c19) i udowodnionego już twierdzenia dla funkcji mierzalnych nieujemnych istnieją takie zbiory

$$Z_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n} \wedge \mu_{i_n}(X_{i_n} - Z_{i_n}) = 0,$$

$$\bigwedge_{x_{i_n} \in Z_{i_n}} Z_{i_{n-1}}(x_{i_n}) \in \mathcal{E}_{i_{n-1}} \wedge \mu_{i_{n-1}}(X_{i_{n-1}} - Z_{i_{n-1}}(x_{i_n})) = 0,$$

$$(iv) \quad \dots \dots \dots$$

$$\bigwedge_{x_{i_n} \in Z_{i_n}} \dots \bigwedge_{x_{i_3} \in Z_{i_3}(x_{i_4}, \dots, x_{i_n})} Z_{i_2}(x_{i_3}, \dots, x_{i_n}) \in \mathcal{E}_{i_2} \wedge$$

$$\wedge \mu_2(X_{i_2} - Z_{i_2}(x_{i_3}, \dots, x_{i_n})) = 0$$

ze

$$\begin{aligned}
& k \in \{2, \dots, n-1\} \quad x_{i_n} \in z_{i_n} \quad \dots \quad x_{i_{k+1}} \in z_{i_{k+1}}(x_{i_{k+2}}, \dots, x_{i_n}) \\
& \int_{x_{i_k}} \left(\dots \int_{x_{i_2}} \left(\int_{A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]} f^-(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \dots \right) d\mu_{i_k}(x_{i_k}) < \infty \right. \\
& \left. x_{i_n} \in z_{i_n} \quad \dots \quad x_{i_2} \in z_{i_2}(x_{i_3}, \dots, x_{i_n}) \int_{A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]} f^-(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) < \infty \right)
\end{aligned}$$

Wykorzystując powyższe nierówności poczynawszy od całki po zbiorze z_{i_n} kolejno aż do całki po zbiorze $A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]$ otrzymujemy wobec (ii) na mocy własności (c21)

$$\begin{aligned}
& \int_A f(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) = \\
& = \int_{z_{i_n}} \left(\dots \int_{z_{i_2}(x_{i_3}, \dots, x_{i_n})} \left(\int_{A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]} (f^+(x_1, \dots, x_n) - f^-(x_1, \dots, x_n)) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right) \right. \\
& \quad \left. d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \dots \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \\
& = \int_{z_{i_n}} \left(\dots \int_{z_{i_2}(x_{i_3}, \dots, x_{i_n})} \left(\int_{A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right) d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \dots \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) \\
& = \int_{x_{i_n}} \left(\dots \int_{x_{i_2}} \left(\int_{A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right) d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n})
\end{aligned}$$

Twierdzenie jest zatem prawdziwe dla wszystkich funkcji mierzalnych na zbiorze A .

Wykażemy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe, gdy $\mu(A) = 0$. Przyjmując $f(x_1, \dots, x_n) = 1$, wnioskujemy wtedy na mocy własności (c14), że istnieją takie zbiory (iv), iż

$$x_{i_n} \in z_{i_n} \quad \dots \quad x_{i_2} \in z_{i_2}(x_{i_3}, \dots, x_{i_n}) \quad \int_{A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]} d\mu_{i_1}(x_{i_1}) = \mu_{i_1}(A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]) = 0$$

skąd na mocy własności (c1) dla każdej funkcji rzeczywistej $f(x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned}
& \int_A f(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) = \\
& = \int_{z_{i_n}} \left(\dots \int_{z_{i_2}(x_{i_3}, \dots, x_{i_n})} \left(\int_{A[x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right) d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \dots \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) =
\end{aligned}$$

$$= \int_{x_n} \left(\dots \int_{x_2} \left(\int_{A[x_2, \dots, x_n]} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right) d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \dots \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = 0$$

Twierdzenie jest zatem prawdziwe zawsze, gdy $\mu(A) = 0$.

Gdy $f(x_1, \dots, x_n)$ jest funkcją mierzalną μ na zbiorze A , wtedy istnieją takie zbiory $B, C \in \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$, że

$A = B + C \wedge \mu(C) = 0 \wedge B$ jest zbiorem miary μ półskończonej \wedge funkcja f jest mierzalna na zbiorze B .

Ponieważ udowodniliśmy już prawdziwość twierdzenia dla funkcji f na zbiorach B i C , otrzymujemy teraz jego prawdziwość również na zbiorze A , ponieważ na mocy własności (przekł) z § 176

$$A[x_2, \dots, x_n] = B[x_2, \dots, x_n] + C[x_2, \dots, x_n]$$

i wobec tego

$$\begin{aligned} & \int_A f(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \int_B f(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) + \\ &+ \int_C f(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \int_{x_n} \left(\dots \int_{x_2} \left(\int_{B[x_2, \dots, x_n]} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right) d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \dots \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) + \\ &+ \int_{x_n} \left(\dots \int_{x_2} \left(\int_{C[x_2, \dots, x_n]} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right) d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \dots \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) = \\ &= \int_{x_n} \left(\dots \int_{x_2} \left(\int_{A[x_2, \dots, x_n]} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right) d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \dots \right) d\mu_{i_n}(x_{i_n}) \end{aligned}$$

W ten sposób dowód twierdzenia Fubiniego został zakończony.

(c62) Nierówność Schwartz'a

Z] 1^o f i g są funkcjami mierzalnymi i skończonymi na zbiorze A .

2^o funkcje f^2, fg, g^2 są całkowalne na zbiorze A .

$$\text{T]} \quad \left| \int_A fg d\mu \right|^2 \leq \int_A |f|^2 d\mu \cdot \int_A |g|^2 d\mu$$

D] Na mocy twierdzeń § 185, § 188 i § 192 dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y funkcja

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} x |f| + y |g|$$

jak również funkcja τ^2 są mierzalne i skończone na zbiorze A , a ponadto

$$\bigwedge_{x, y \in \mathbb{R}} \int_A \tau^2 d\mu \geq 0$$

a stąd

$$\begin{aligned} \bigwedge_{x, y \in \mathbb{R}} \int_A (x |f| + y |g|)^2 d\mu &= x^2 \int_A |f|^2 d\mu + \\ &+ 2xy \int_A |fg| d\mu + y^2 \int_A |g|^2 d\mu \geq 0 \end{aligned}$$

Wyróżnik tego trójkianu kwadratowego musi być niedodatni, tzn.

$$4 \left(\int_A |fg| d\mu \right)^2 - 4 \int_A |f|^2 d\mu \cdot \int_A |g|^2 d\mu \leq 0$$

czyli

$$\left(\int_A |fg| d\mu \right)^2 \leq \int_A |f|^2 d\mu \int_A |g|^2 d\mu$$

Ponieważ na mocy (c22) jest

$$\left| \int_A fg d\mu \right| \leq \int_A |fg| d\mu$$

otrzymujemy stąd żadaną własność.

Uwaga: W przypadku funkcji f i g rzeczywistych własność (c62) można napisać w postaci

$$\left(\int_A fg d\mu \right)^2 \leq \int_A f^2 d\mu \int_A g^2 d\mu$$

§ 226. Całka Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej

Całka Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n jest szczególnym przypadkiem całki Lebesgue'a określonej w § 224, gdy mianowicie $x = \mathbb{R}^n$. Niech \mathcal{L}_n oznacza - zgodnie z § 118 - klasę zbiorów