

## V. FUNKCJE MIERZALNE

### § 181. Definicja funkcji mierzalnej

Niech będzie dana dowolna przestrzeń  $X$  i niech  $S$  będzie dowolnym  $\sigma$ -ciałem tej przestrzeni.

Funkcję  $f$  będziemy nazywać funkcją mierzalną na zbiorze  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:

( $\beta 1$ )  $f$  jest funkcją rzeczywistą określoną na zbiorze  $A \in S$

( $\beta 2$ ) 
$$\bigwedge_{a \in \mathbb{R}} \{x: f(x) < a \wedge x \in A\} \in S$$

Funkcję  $f$  będziemy nazywać po prostu funkcją mierzalną, jeśli jest mierzalna na całej przestrzeni  $X$ .

W przypadku szczególnym, gdy  $X = \mathbb{R}^n$ , a  $S$  jest ciałem zbiorów borelowskich, funkcję mierzalną na zbiorze  $A$  będziemy nazywać funkcją borelowską na zbiorze  $A$ , a funkcję mierzalną - funkcją borelowską.

W przypadku, gdy  $X$  jest przestrzenią co najwyżej przeliczalną, a  $S$  jest  $\sigma$ -ciałem wszystkich podzbiorów przestrzeni  $X$ , każda funkcja rzeczywista określona na zbiorze  $A \subset X$  jest mierzalna na tym zbiorze. Zatem każda funkcja rzeczywista określona w tej przestrzeni jest mierzalna.

Zauważmy, że na mocy definicji każda funkcja rzeczywista jest mierzalna na zbiorze pustym.

#### Twierdzenie (A)

Funkcja mierzalna na zbiorze  $A$  jest mierzalna także na każdym zbiorze  $B \in S \wedge B \subset A$

D] Wynika z faktu, że

$$\{x: f(x) < a \wedge x \in B\} = \{x: f(x) < a \wedge x \in A\} \cap B \in S$$

## Twierdzenie (B)

Funkcja mierzalna na zbiorach  $A_1, \dots, A_m$  jest mierzalna także na zbiorach  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  i  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ .

Funkcja mierzalna na zbiorach  $A_1, A_2, \dots$  jest mierzalna także na zbiorach  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  i  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ .

$$D] \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \{x: f(x) < \alpha \wedge x \in \bigcup_{k=1}^m A_k\} = \bigcup_{k=1}^m \{x: f(x) < \alpha \wedge x \in A_k\} \in \mathcal{S}$$

Dowód w pozostałych przypadkach jest analogiczny.

## § 182. Twierdzenie

Z]  $f$  jest funkcją mierzalną na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$

T]  $\{x: f(x) < \infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}, \{x: f(x) = \infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$

$\{x: f(x) > -\infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}, \{x: f(x) = -\infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$

$\{x: |f(x)| < \infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}, \{x: |f(x)| = \infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$

D] Z założenia jest

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x: f(x) < n \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\{x: f(x) \geq -n \wedge x \in A\} = A - \{x: f(x) < -n \wedge x \in A\} \in \mathcal{S})$$

skąd

$$\{x: f(x) < \infty \wedge x \in A\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) < n \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

$$\{x: f(x) > -\infty \wedge x \in A\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) \geq -n \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

Wobec tego

$$\{x: |f(x)| < \infty \wedge x \in A\} = \{x: f(x) < \infty \wedge x \in A\} \cap$$

$$\cap \{x: f(x) > -\infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

$$\{x: f(x) = \infty \wedge x \in A\} = \{x: f(x) > -\infty \wedge x \in A\} -$$

$$- \{x: |f(x)| < \infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$



$$\begin{aligned} \{x: f(x) = -\infty \wedge x \in A\} &= \{x: f(x) < \infty \wedge x \in A\} - \\ &- \{x: |f(x)| < \infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \\ \{x: |f(x)| = \infty\} &= A - \{x: |f(x)| < \infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

### § 183. Twierdzenie

Z]  $f$  jest funkcją mierzalną na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .  
 $\mathcal{B}$  jest ciałem zbiorów borelowskich na prostej  $\mathbb{R}$ .

T]  $\bigwedge_{B \in \mathcal{B}} \{x: f(x) \in B \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$

D] Niech  $\mathcal{K}$  oznacza klasę wszystkich zbiorów  $K \subset \mathbb{R}$  spełniających warunek

$$\{x: f(x) \in K \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

Wykażemy, że klasa  $\mathcal{K}$  jest  $\sigma$ -ciałem. Zauważmy przede wszystkim, że na mocy założenia o mierzalności funkcji  $f$  klasa  $\mathcal{K}$  zawiera wszystkie półproste postaci  $(-\infty; \alpha)$ , gdzie  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wobec tego klasa  $\mathcal{K}$  nie jest pusta, czyli spełnia warunek ( $\sigma 1$ ) dla  $\sigma$ -ciała. Następnie na mocy własności  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{S}$  mamy

$$\begin{aligned} K \in \mathcal{K} &\Rightarrow \{x: f(x) \in K \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \Rightarrow \{x: f(x) \in K \wedge x \in A\}^c \in \mathcal{S} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{x: f(x) \in K^c \vee x \in A^c\} \in \mathcal{S} \Rightarrow \{x: f(x) \in K^c \vee x \in A^c\} \cap A \in \mathcal{S} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{x: f(x) \in K^c \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \Rightarrow K^c \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

czyli klasa  $\mathcal{K}$  spełnia warunek ( $\sigma 2$ ). Wreszcie

$$\begin{aligned} \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} K_j \in \mathcal{K} &\Rightarrow \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \{x: f(x) \in K_j \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x: f(x) \in K_j \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{x: f(x) \in \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

co oznacza, że klasa  $\mathcal{K}$  spełnia także warunek ( $\sigma 3$ ) i jest zatem  $\sigma$ -ciałem. Wobec tego na mocy twierdzenia § 93 jest  $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$ , co kończy dowód twierdzenia.

## § 184. Twierdzenie

Z]  $f$  jest funkcją mierzalną na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .

T] Dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}_0$

$$\{x: f(x) < a \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}, \quad \{x: a < f(x) < b \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

$$\{x: f(x) > a \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}, \quad \{x: a \leq f(x) < b \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

$$\{x: f(x) \leq a \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}, \quad \{x: a < f(x) \leq b \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

$$\{x: f(x) \geq a \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}, \quad \{x: a \leq f(x) \leq b \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

$$\{x: f(x) = a \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}, \quad \{x: f(x) \neq a \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

D] Dla  $\alpha = -\infty$  mamy

$$\{x: f(x) < \alpha \wedge x \in A\} = \emptyset \in \mathcal{S}$$

Dla  $\alpha \neq -\infty$  mamy

$$\begin{aligned} \{x: f(x) < \alpha \wedge x \in A\} &= \{x: f(x) \in (-\infty; \alpha) \wedge x \in A\} \cup \\ &\cup \{x: f(x) = -\infty \wedge x \in A\} \end{aligned}$$

Ponieważ przedział  $(-\infty; \alpha)$  jest zbiorem borelowskim, więc na mocy twierdzenia § 183 pierwszy zbiór w powyższej sumie należy do  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{S}$ . Drugi należy do  $\mathcal{S}$  na mocy twierdzenia § 182. Zatem w całej ogólności jest

$$\{x: f(x) < \alpha \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\{x: f(x) > \alpha \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

Mamy następnie

$$\{x: f(x) \leq \alpha \wedge x \in A\} = A - \{x: f(x) > \alpha \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

$$\{x: f(x) \geq \alpha \wedge x \in A\} = A - \{x: f(x) < \alpha \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

$$\{x: f(x) = \alpha \wedge x \in A\} = \{x: f(x) \leq \alpha \wedge x \in A\} \cap$$

$$\cap \{x: f(x) \geq \alpha \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

$$\{x: \alpha < f(x) < b \wedge x \in A\} = \{x: f(x) > \alpha \wedge x \in A\} \cap$$

$$\cap \{x: f(x) < b \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

Dowód w pozostałych przypadkach jest analogiczny.



### § 185. Twierdzenie

Z]  $f$  jest funkcją mierzalną na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .

T]  $\bigwedge_{c \in \mathbb{R}}$  funkcja  $cf$  jest mierzalna na zbiorze  $A$ .

$\bigwedge_{\substack{c \in \mathbb{R} \\ c > 0}}$  funkcja  $|f|^c$  jest mierzalna na zbiorze  $A$ .

D] Obie funkcje  $cf$  i  $|f|^c$  są funkcjami rzeczywistymi określonymi na zbiorze  $A$ , czyli spełniają warunek  $(\beta_1)$  dla funkcji mierzalnych. Wystarczy zatem sprawdzić, że spełniają one również warunek  $(\beta_2)$ . Otóż mamy na mocy twierdzenia § 184

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \{x: cf(x) < \alpha \wedge x \in A\} = \begin{cases} \{x: f(x) < \frac{\alpha}{c} \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} & \text{dla } c > 0 \\ A \in \mathcal{S} & \text{dla } c = 0 \text{ i } \alpha > 0 \\ 0 \in \mathcal{S} & \text{dla } c = 0 \text{ i } \alpha \leq 0 \\ \{x: f(x) > \frac{\alpha}{c} \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} & \text{dla } c < 0 \end{cases}$$

Wynika stąd, że funkcja  $cf$  jest mierzalna na zbiorze  $A$ .

Na mocy twierdzenia § 183 jest

$$\bigwedge_{\substack{\alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha \leq 0}} \{x: |f(x)| < \alpha \wedge x \in A\} = 0 \in \mathcal{S}$$

$$\bigwedge_{\substack{\alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha > 0}} \{x: |f(x)| < \alpha \wedge x \in A\} = \{x: f(x) \in (-\alpha, \alpha) \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

ponieważ przedział  $(-\alpha, \alpha)$  jest zbiorem borelowskim. Zatem funkcja  $|f|$  jest mierzalna na zbiorze  $A$  i wobec tego

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \bigwedge_{\substack{c \in \mathbb{R} \\ c > 0}} \{x: |f(x)|^c < \alpha \wedge x \in A\} = \begin{cases} 0 \in \mathcal{S} & \text{dla } \alpha \leq 0 \\ \{x: |f(x)| < \alpha^{\frac{1}{c}} \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} & \text{dla } \alpha > 0 \end{cases}$$

Oznacza to, że funkcja  $|f(x)|^c$  jest mierzalna na zbiorze  $A$ .

### § 186. Twierdzenie

Z]  $1^0$   $f_1, \dots, f_n$  są funkcjami mierzalnymi i skończonymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .



2°  $h$  jest funkcją borelowską na zbiorze  $\forall \in \mathcal{B}_n$ , gdzie  $\mathcal{B}_n$  jest  $\sigma$ -ciałem zbiorów borelowskich w przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^n$ , takim że

$$\bigwedge_{x \in A} (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \forall$$

$$3^\circ \bigwedge_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} h[f_1(x), \dots, f_n(x)]$$

T 1°  $f$  jest funkcją mierzalną na zbiorze  $A$ .

2° gdy funkcja  $h$  jest skończona, funkcja  $f$  jest też skończona.

D Część 2° tezy wynika wprost z definicji funkcji  $f$ . Z tej definicji wynika również, że funkcja  $f$  spełnia warunek  $(\beta_1)$  dla funkcji mierzalnej. Mamy ponadto

$$(*) \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} (\{x: f(x) < \alpha \wedge x \in A\} = \{x: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in A_\alpha \wedge x \in A\})$$

gdzie

$$(**) A_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n): h(x_1, \dots, x_n) < \alpha \wedge (x_1, \dots, x_n) \in \forall\} \in \mathcal{B}_n$$

Wystarczy zatem wykazać, że

$$(***) \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \{x: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in A_\alpha \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

Niech  $\mathcal{K}$  będzie klasą wszystkich zbiorów  $K \subset \mathbb{R}^n$ , dla których

$$\{x: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in K \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

Wykażemy, że klasa  $\mathcal{K}$  jest  $\sigma$ -ciałem. Zauważmy przede wszystkim, że klasa  $\mathcal{K}$  zawiera wszystkie przedziały postaci  $(-\infty; u)$ , gdzie  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_0^n$ , ponieważ wtedy

$$\begin{aligned} & \{x: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in (-\infty; u) \wedge x \in A\} = \\ & = \{x: f_1(x) < u_1 \wedge \dots \wedge f_n(x) < u_n \wedge x \in A\} = \\ & = \{x: f_1(x) < u_1 \wedge x \in A\} \cap \dots \cap \{x: f_n(x) < u_n \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

na mocy założenia, że funkcje  $f_1, \dots, f_n$  są mierzalne na zbiorze  $A$ . Zatem klasa  $\mathcal{K}$  nie jest pusta, czyli spełnia warunek  $(\sigma_1)$  dla  $\sigma$ -ciała. Następnie, wykorzystując fakt, że  $\mathcal{S}$  jest  $\sigma$ -ciałem, mamy

$$K \in \mathcal{K} \Rightarrow \{x: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in K \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in K \wedge x \in A\}^c \in \mathcal{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in K^c \vee x \in A^c\} \in \mathcal{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in K^c \vee x \in A^c\} \cap A \in \mathcal{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in K^c \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \Rightarrow K^c \in \mathcal{K}$$

czyli klasa  $\mathcal{K}$  spełnia warunek ( $\sigma 2$ ). Dalej mamy

$$\bigwedge_{j \in \mathbb{N}} K_j \in \mathcal{K} \Rightarrow \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \{x: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in K_j \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in K_j \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x: (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \wedge x \in A\} \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \in \mathcal{K}$$

Zatem klasa  $\mathcal{K}$  spełnia również warunek ( $\sigma 3$ ) i jest  $\sigma$ -ciałem. Na mocy twierdzenia § 93 mamy  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{K}$ , skąd na mocy  $(**)$  wszystkie zbiory  $A_\alpha$  należą do klasy  $\mathcal{K}$ , czyli spełniają warunek  $(***)$ . Z równości  $(*)$  wynika, że funkcja  $f$  spełnia warunek ( $\beta 2$ ) dla funkcji mierzalnej i wobec tego jest mierzalna na zbiorze  $A$ .

### § 187. Twierdzenie

Z  $f_1, \dots, f_n$  są funkcjami mierzalnymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $\mathcal{X}$ .

T  $\sum_{i=1}^n f_i$  jest funkcją mierzalną na zbiorze  $A - B$ , gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x: \bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} f_i(x) = \infty \wedge \bigvee_{j \in \{1, \dots, n\}} f_j(x) = -\infty \wedge \right.$$

$$\left. \wedge x \in A \right\} = \bigcup_{i=1}^n \{x: f_i(x) = \infty \wedge x \in A\} \cap$$

$$\cap \bigcup_{j=1}^n \{x: f_j(x) = -\infty \wedge x \in A\} \in \mathcal{S}$$

D  $f_1 + \dots + f_n$  jest funkcją rzeczywistą określoną na zbiorze  $A - B \in \mathcal{S}$ , spełnia zatem warunek ( $\beta 1$ ) dla funkcji mierzalnych. Zbiór  $A - B$  można przedstawić w postaci



$$A - B = C + D + E$$

gdzie

$$\begin{aligned} C &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : \bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} f_i(x) = -\infty \wedge x \in A - B \right\} = \\ &= \bigcup_{i=1}^n \left\{ x : f_i(x) = -\infty \wedge x \in A - B \right\} \in \mathcal{S} \\ D &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : \bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} f_i(x) = \infty \wedge x \in A - B \right\} = \\ &= \bigcup_{i=1}^n \left\{ x : f_i(x) = \infty \wedge x \in A - B \right\} \in \mathcal{S} \\ E &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : \bigwedge_{i \in \{1, \dots, n\}} |f_i(x)| < \infty \wedge x \in A - B \right\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^n \left\{ x : |f_i(x)| < \infty \wedge x \in A - B \right\} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Zatem

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathcal{K}} \left\{ x : f_1(x) + \dots + f_n(x) < \alpha \wedge x \in A - B \right\} = C_\alpha + D_\alpha + E_\alpha$$

gdzie

$$\begin{aligned} C_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : f_1(x) + \dots + f_n(x) < \alpha \wedge x \in C \right\} \\ D_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : f_1(x) + \dots + f_n(x) < \alpha \wedge x \in D \right\} \\ E_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : f_1(x) + \dots + f_n(x) < \alpha \wedge x \in E \right\} \end{aligned}$$

Ale

$$C_\alpha = \{ x : -\infty < \alpha \wedge x \in C \} = C \in \mathcal{S}$$

$$D_\alpha = \{ x : \infty < \alpha \wedge x \in D \} = \emptyset \in \mathcal{S}$$

Wobec tego, aby wykazać, że funkcja  $f_1 + \dots + f_n$  spełnia warunek  $(\beta_2)$ , czyli jest mierzalna na zbiorze  $A - B$ , wystarczy jeszcze wykazać, że  $E_\alpha \in \mathcal{S}$ .

Funkcja

$$h(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$$



jest funkcją borelowską w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , ponieważ dla każdego  $\alpha \in \mathbb{R}$  zbiór

$$\begin{aligned} \{ (x_1, \dots, x_n) : h(x_1, \dots, x_n) < \alpha \} &= \\ &= \{ (x_1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n < \alpha \} \end{aligned}$$

jako zbiór otwarty jest zbiorem borelowskim.

Funkcja

$$f(x) = h[f_1(x), \dots, f_n(x)] = f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

jest określona na zbiorze  $E$  i na mocy twierdzenia § 186 jest mierzalna na zbiorze  $E$ . Wobec tego  $E_\alpha \in \mathcal{S}$ , co kończy dowód.

### § 188. Twierdzenie

Z]  $f_1, \dots, f_n$  są funkcjami mierzalnymi skończonymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .

T]  $\sum_{i=1}^n f_i$  jest funkcją mierzalną skończoną na zbiorze  $A$ .

D] Twierdzenie powyższe jest oczywistym wnioskiem z twierdzenia poprzedniego, w którym w danym przypadku mamy  $\mathcal{B} = 0$  na mocy skończoności funkcji  $f_1, \dots, f_n$ .

### § 189. Twierdzenie

Z]  $f_1, f_2$  są funkcjami mierzalnymi na zbiorze  $A \in \mathcal{S}$  w przestrzeni  $X$ .

T]  $f_1 - f_2$  jest funkcją mierzalną na zbiorze  $A - B$ , gdzie

$$\begin{aligned} B &\stackrel{\text{def}}{=} \{ x : (f_1(x) = f_2(x) = \infty \vee f_1(x) = f_2(x) = -\infty) \wedge x \in A \} = \\ &= \{ x : f_1(x) = \infty \wedge x \in A \} \cap \{ x : f_2(x) = \infty \wedge x \in A \} + \\ &+ \{ x : f_1(x) = -\infty \wedge x \in A \} \cap \{ x : f_2(x) = -\infty \wedge x \in A \} \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

D] Twierdzenie powyższe jest oczywistym wnioskiem z twierdzeń § 187 i § 185, ponieważ

$$f_1 - f_2 = f_1 + (-1)f_2$$