

§ 171. Związek między zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a a zbiorami borelowskimi w przestrzeni euklidesowej

Niech będzie dana przestrzeń z miarą $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \omega)$, gdzie \mathcal{L} jest σ -ciałem zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n , a ω jest miarą Lebesgue'a w tej przestrzeni (patrz § 118).

Niech \mathcal{B} oznacza σ -ciało zbiorów borelowskich przestrzeni \mathbb{R}^n . Związek między zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a, czyli należącymi do σ -ciała \mathcal{L} , a zbiorami borelowskimi należącymi do σ -ciała \mathcal{B} można ująć dwoma następującymi twierdzeniami.

Twierdzenie (A)

$$A \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \bigvee_{\substack{G_1, G_2, \dots \in \mathcal{B} \\ G_1, G_2, \dots \text{ otwarte}}} A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \in \mathcal{B} \\ \bigvee_{\substack{B \in \mathcal{L} \\ \omega(B)=0}} A + B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \in \mathcal{B} \end{array}$$

D] Wykażemy najpierw, że

$$(*) \quad A \in \mathcal{L} \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{G \in \mathcal{B} \\ G \text{ otwarty}}} A \subset G \wedge \omega(G - A) < \varepsilon$$

Otóż na mocy wzorów (28) i (22) w § 118 i § 116

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{L}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{B_1, B_2, \dots \in \mathcal{P} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} \omega\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k - A\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

gdzie \mathcal{P} jest klasą wszystkich przedziałów domkniętych ograniczonych w przestrzeni \mathbb{R}^n . Ale

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \bigvee_{\substack{C_k \in \mathcal{B} \\ C_k \text{ przedział} \\ C_k \text{ otwarty}}} C_k \supset B_k \wedge \omega(C_k - B_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

Przyjmując

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$$

widzimy, że na mocy twierdzenia § 59 zbiór G jest otwarty. Ponadto

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A$$

Wreszcie

$$\begin{aligned}\omega(G-A) &= \omega\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k - A\right) = \omega\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) + \omega\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k - A\right) \leq \\ &\leq \omega\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (C_k - B_k)\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \omega(C_k - B_k) + \frac{\varepsilon}{2} < \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Zatem dla danego ε G jest szukany zbiorem.

Na podstawie powyższego niech teraz G_1, G_2, \dots będą takimi zbiorami otwartymi, że

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_k \supset A \wedge \omega(G_k - A) < \frac{1}{k}$$

Wtedy

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \supset A \wedge B \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k - A \in \mathcal{G}$$

gdyż na mocy twierdzenia § 119 każdy ze zbiorów G_1, G_2, \dots jako otwarty, a więc borelowski należy do σ -ciała \mathcal{L} , wobec czego $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ należy do σ -ciała \mathcal{L} a w konsekwencji również zbiór B . Z powyższego wynika, że

$$A + B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \in \mathcal{B}$$

a ponadto

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \omega(B) = \omega\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k - A\right) \leq \omega(G_k - A) < \frac{1}{k} \Rightarrow \omega(B) = 0$$

Z powyższego wynika, że implikacja (*) jest prawdziwa. Niech teraz - odwrotnie - będą dane takie zbiory otwarte G_1, G_2, \dots , zbiór $B \in \mathcal{L}$ i zbiór A , że $\omega(B) = 0$ i

$$A + B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

Ponieważ \mathcal{L} jest σ -ciałem, a G_1, G_2, \dots jako zbiory otwarte należą do \mathcal{L} , a z nimi również $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \in \mathcal{L}$, więc z równości

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k - B$$

otrzymujemy, że $A \in \mathcal{L}$, co kończy dowód twierdzenia (A).

Twierdzenie (B)

$$A \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \bigvee_{\substack{F_1, F_2, \dots \in \mathcal{B} \\ F_1, F_2, \dots \text{ domknięte}}} A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k + B \quad \bigvee_{\substack{B \in \mathcal{L} \\ \omega(B)=0}}$$

D] Na mocy twierdzenia (A)

$$A^c \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \bigvee_{\substack{G_1, G_2, \dots \in \mathcal{B} \\ G_1, G_2, \dots \text{ otwarte}}} A^c + B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \quad \bigvee_{\substack{B \in \mathcal{L} \\ \omega(B)=0}}$$

Przyjmijmy

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k = G_k^c$$

Na mocy twierdzenia § 55 zbiory F_1, F_2, \dots tak określone są domknięte. Ponadto

$$\begin{aligned} A^c + B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k &\Rightarrow A = \mathbb{R}^n - A^c = [\mathbb{R}^n - (A^c + B)] + B = \\ &= (\mathbb{R}^n - \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k) + B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n - G_k) + B = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k^c + B = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k + B \\ A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k + B &\Rightarrow A^c + B = (\mathbb{R}^n - A) + B = [\mathbb{R}^n - (\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k + B)] + \\ &+ B = \mathbb{R}^n - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n - F_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \end{aligned}$$

Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{L} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{L} &\Leftrightarrow \bigvee_{\substack{G_1, G_2, \dots \in \mathcal{B} \\ G_1, G_2, \dots \text{ otwarte}}} A^c + B = \bigvee_{\substack{B \in \mathcal{L} \\ \omega(B)=0}} A^c + B = \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \Leftrightarrow \bigvee_{\substack{F_1, F_2, \dots \in \mathcal{B} \\ F_1, F_2, \dots \text{ domknięte}}} A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k + B \quad \bigvee_{\substack{B \in \mathcal{L} \\ \omega(B)=0}} \end{aligned}$$

czyli twierdzenie (B) zostało udowodnione.

Jak wynika z twierdzeń (A) i (B), każdy zbiór mierzalny w sensie Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n można uzupełnić zbiorem miary zero do zbioru borelowskiego typu G_δ (patrz § 61). Również od każdego zbioru mierzalnego w sensie Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n można odjąć taki zbiór miary zero, aby otrzymać zbiór borelowski typu F_σ .

§ 172. Twierdzenie

- Z 1^o Dane są dwie przestrzenie euklidesowe \mathbb{R}^m i \mathbb{R}^n .
 2^o Dana jest funkcja τ o dziedzinie $I \subset \mathbb{R}^m$ i przeciwdziedzinie $U \subset \mathbb{R}^n$.
 3^o $G \subset I \wedge G$ jest zbiorem otwartym niepustym przestrzeni \mathbb{R}^m .
 4^o $H = \tau(G)$.
 5^o Funkcja τ jest jedno-jednoznaczna na zbiorze G .
 6^o Funkcja τ jest ciągła na zbiorze G a funkcja τ^{-1} jest ciągła na zbiorze H .
 7^o \mathcal{L}_G jest klasą wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a i zawartych w zbiorze G w przestrzeni \mathbb{R}^m .
 8^o \mathcal{L}_H jest klasą wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a i zawartych w zbiorze H w przestrzeni \mathbb{R}^n .
 9^o ω_m jest miarą Lebesgue'a w przestrzeni \mathbb{R}^m , a ω_n jest miarą Lebesgue'a w przestrzeni \mathbb{R}^n .
 10^o $\bigwedge_{A \subset G} \bigwedge_{B = \tau(A) \subset H} \omega_m(A) = 0 \Leftrightarrow \omega_n(B) = 0$

T $\mathcal{L}_H = \tau(\mathcal{L}_G) \wedge \mathcal{L}_G = \tau^{-1}(\mathcal{L}_H)$.

D Niech \mathcal{B}_G będzie σ -ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni G , a \mathcal{B}_H σ -ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni H . Na mocy twierdzenia § 164 \mathcal{B}_G jest klasą wszystkich zbiorów borelowskich przestrzeni \mathbb{R}^m zawartych w zbiorze G , a \mathcal{B}_H jest klasą wszystkich zbiorów borelowskich przestrzeni \mathbb{R}^n zawartych w zbiorze H .

Funkcja τ zredukowana tylko do zbioru G spełnia założenia twierdzenia § 170 i wobec tego

(*) $\mathcal{B}_H = \tau(\mathcal{B}_G) \wedge \mathcal{B}_G = \tau^{-1}(\mathcal{B}_H)$

Na mocy twierdzenia (B) z § 171

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{L}_G} \bigvee_{A_1, A_2} A = A_1 + A_2 \wedge A_1 \in \mathcal{B}_G \wedge \omega_m(A_2) = 0$$

Wobec tego na mocy wzoru (121)

$$\tau(A) = \tau(A_1) \cup \tau(A_2) = \tau(A_1) + (\tau(A_2) - \tau(A_1))$$

Ale na mocy (*)

$$\tau(A_1) \in \mathcal{B}_H$$

a na mocy założenia 10^o

$$\omega_n [\tau(A_2) - \tau(A_1)] \leq \omega_n [\tau(A_2)] = 0 \Rightarrow \omega_n [\tau(A_2) - \tau(A_1)] = 0$$

i wobec tego zbiór $\tau(A)$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i zawarty w zbiorze H w przestrzeni \mathbb{R}^n , skąd ze względu na dowolność wyboru zbioru $A \in \mathcal{L}_G$

$$(**) \quad \mathcal{L}_H \supset \tau(\mathcal{L}_G)$$

Analogicznie wykazujemy, że

$$\mathcal{L}_G \supset \tau^{-1}(\mathcal{L}_H)$$

i wobec tego na mocy własności (120, (**)) i (134)

$$\mathcal{L}_H \supset \tau(\mathcal{L}_G) \supset \tau(\tau^{-1}(\mathcal{L}_H)) = \mathcal{L}_H$$

skąd

$$\mathcal{L}_H = \tau(\mathcal{L}_G)$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\mathcal{L}_G = \tau^{-1}(\mathcal{L}_H)$$

§ 173. Własności produktów kartezjańskich

Przyjmujemy umowę, że dla dowolnych zbiorów A, B, C

$$(kar1) \quad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C$$

pomimo że zgodnie z definicją z § 9

$$\begin{aligned} A \times (B \times C) &= \{(\alpha, y) : \alpha \in A \wedge y \in B \times C\} = \\ &= \{(\alpha, (b, c)) : \alpha \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\} \end{aligned}$$

i analogicznie

$$(A \times B) \times C = \{((\alpha, b), c) : \alpha \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

natomiast

$$A \times B \times C = \{(\alpha, b, c) : \alpha \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

Umowa (kar1) pozwala traktować mnożenie kartezjańskie jako działanie łączne.

W paragrafie niniejszym udowodnimy kilkanaście własności produktów kartezjańskich. Zakładamy, że wszystkie produkty kartezjań-

skie występujące w poniższych wzorach są podzbiorami przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$, czyli że w zapisie $A_1 \times \dots \times A_n$ będzie już zawarte założenie, że

$$\begin{aligned}
 & \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k \subset X_k \\
 (\text{kar2}) \quad & \bigcap_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj}) = \left(\bigcap_{j=1}^m A_{1j} \right) \times \dots \times \left(\bigcap_{j=1}^m A_{nj} \right) \\
 & \text{D} \quad \text{Z definicji produktu kartezjańskiego wynika, że} \\
 & \left(\bigcap_{j=1}^m A_{1j} \right) \times \dots \times \left(\bigcap_{j=1}^m A_{nj} \right) = \\
 & = \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 \in \bigcap_{j=1}^m A_{1j} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in \bigcap_{j=1}^m A_{nj} \} = \\
 & = \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : (\alpha_1 \in A_{11} \wedge \dots \wedge \alpha_1 \in A_{1m}) \wedge \dots \\
 & \dots \wedge (\alpha_n \in A_{n1} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in A_{nm}) \} = \\
 & = \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : (\alpha_1 \in A_{11} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in A_{n1}) \wedge \dots \\
 & \dots \wedge (\alpha_1 \in A_{1m} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in A_{nm}) \} = \\
 & = \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 \in A_{11} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in A_{n1} \} \cap \dots \\
 & \dots \cap \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 \in A_{1m} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in A_{nm} \} = \\
 & = \bigcap_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj})
 \end{aligned}$$

$$(\text{kar3}) \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} (A_{1j} \times \dots \times A_{nj}) = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{1j} \right) \times \dots \times \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{nj} \right)$$

D Analogiczny do dowodu własności (kar2).

$$\begin{aligned}
 (\text{kar4}) \quad & \left(\bigcup_{j_1=1}^{m_1} A_{1j_1} \right) \times \dots \times \left(\bigcup_{j_n=1}^{m_n} A_{nj_n} \right) = \\
 & = \bigcup_{j_1=1}^{m_1} \dots \bigcup_{j_n=1}^{m_n} (A_{1j_1} \times \dots \times A_{nj_n})
 \end{aligned}$$

D Z definicji produktu kartezjańskiego

$$\left(\bigcup_{j_1=1}^{m_1} A_{1j_1} \right) \times \dots \times \left(\bigcup_{j_n=1}^{m_n} A_{nj_n} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 \in \bigcup_{j_1=1}^{m_1} A_{1j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in \bigcup_{j_n=1}^{m_n} A_{nj_n} \right\} = \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : (\alpha_1 \in A_{11} \vee \dots \vee \alpha_1 \in A_{1m_1}) \wedge \right. \\
&\quad \left. \wedge \alpha_2 \in \bigcup_{j_2=1}^{m_2} A_{2j_2} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in \bigcup_{j_n=1}^{m_n} A_{nj_n} \right\} = \\
&= \bigcup_{j_1=1}^{m_1} \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 \in A_{1j_1} \wedge (\alpha_2 \in A_{21} \vee \dots \vee \right. \\
&\quad \left. \vee \alpha_2 \in A_{2m_2}) \wedge \alpha_3 \in \bigcup_{j_3=1}^{m_3} A_{3j_3} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in \bigcup_{j_n=1}^{m_n} A_{nj_n} \right\} = \\
&= \bigcup_{j_1=1}^{m_1} \bigcup_{j_2=1}^{m_2} \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 \in A_{1j_1} \wedge \alpha_2 \in A_{2j_2} \wedge \right. \\
&\quad \left. \wedge \alpha_3 \in \bigcup_{j_3=1}^{m_3} A_{3j_3} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in \bigcup_{j_n=1}^{m_n} A_{nj_n} \right\} = \\
&= \dots = \bigcup_{j_1=1}^{m_1} \dots \bigcup_{j_n=1}^{m_n} \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 \in A_{1j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in A_{nj_n} \right\} = \\
&= \bigcup_{j_1=1}^{m_1} \dots \bigcup_{j_n=1}^{m_n} (A_{1j_1} \times \dots \times A_{nj_n})
\end{aligned}$$

Uwaga: Jak widać z powyższego dowodu, liczby m_1, \dots, m_n mogą być równe ∞ .

$$\begin{aligned}
5) \quad &\left(\sum_{j_1=1}^{m_1} A_{1j_1} \right) \times \dots \times \left(\sum_{j_n=1}^{m_n} A_{nj_n} \right) = \\
&= \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} (A_{1j_1} \times \dots \times A_{nj_n})
\end{aligned}$$

D Z definicji produktu kartezjańskiego

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1=1}^{m_1} A_{1j_1} \right) \times \dots \times \left(\sum_{j_n=1}^{m_n} A_{nj_n} \right) = \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 \in \sum_{j_1=1}^{m_1} A_{1j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in \sum_{j_n=1}^{m_n} A_{nj_n} \right\} = \\
&= \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \left[(\alpha_1 \in A_{11} \wedge \bigwedge_{j_1 \in \{2, \dots, m_1\}} \alpha_1 \notin A_{1j_1}) \vee \dots \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \vee (\alpha_1 \in A_{1m_1} \wedge \bigwedge_{j_1 \in \{1, \dots, m_1-1\}} \alpha_1 \notin A_{1j_1}) \wedge \\
& \wedge \alpha_2 \in \sum_{j_2=1}^{m_2} A_{2j_2} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in \sum_{j_n=1}^{m_n} A_{nj_n} \} = \\
& = \sum_{j_1=1}^{m_1} \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 \in A_{1j_1} \wedge \\
& \wedge [(\alpha_2 \in A_{21} \wedge \bigwedge_{j_2 \in \{2, \dots, m_2\}} \alpha_2 \notin A_{2j_2}) \dots \vee \\
& \vee (\alpha_2 \in A_{2m_2} \wedge \bigwedge_{j_2 \in \{1, \dots, m_2-1\}} \alpha_2 \notin A_{2j_2})] \wedge \\
& \wedge \alpha_3 \in \sum_{j_3=1}^{m_3} A_{3j_3} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in \sum_{j_n=1}^{m_n} A_{nj_n} \} = \\
& = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 \in A_{1j_1} \wedge \alpha_2 \in A_{2j_2} \wedge \\
& \wedge \alpha_3 \in \sum_{j_3=1}^{m_3} A_{3j_3} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in \sum_{j_n=1}^{m_n} A_{nj_n} \} = \dots = \\
& = \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_1 \in A_{1j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_n \in A_{nj_n} \} = \\
& = \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} (A_{1j_1} \times \dots \times A_{nj_n})
\end{aligned}$$

Uwaga: Jak widać z powyższego dowodu, liczby m_1, \dots, m_n mogą być równe ∞ .

$$6) \quad A_1 \times \dots \times A_n = 0 \iff \bigvee_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k = 0$$

D] Implikacja

$$\bigvee_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k = 0 \Rightarrow A_1 \times \dots \times A_n = 0$$

jest oczywista, gdyż brak elementów α_k należących do zbioru A_k powoduje brak ciągów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ należących do $A_1 \times \dots \times A_n$.

Odwrotnie

$$\bigvee'_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k = 0 \Rightarrow \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} \alpha_k \in A_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times \dots \times A_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 \times \dots \times A_n \neq 0$$

$$(\text{kar7}) \quad \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k \subset B_k \Rightarrow A_1 \times \dots \times A_n \subset B_1 \times \dots \times B_n$$

$$\text{D)} \quad \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} (A_k \subset B_k \Leftrightarrow \bigwedge_{\alpha_k} (\alpha_k \in A_k \Rightarrow \alpha_k \in B_k))$$

Zatem

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k \subset B_k \Rightarrow \\ & \Rightarrow \bigwedge_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} ((\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times \dots \times A_n \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B_1 \times \dots \times B_n) \Rightarrow \\ & \Rightarrow A_1 \times \dots \times A_n \subset B_1 \times \dots \times B_n \end{aligned}$$

$$(\text{kar8}) \quad (A_1 \times \dots \times A_n \subset B_1 \times \dots \times B_n) \wedge (A_1 \times \dots \times A_n \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k \subset B_k$$

$$\text{D)} \quad A_1 \times \dots \times A_n \neq 0 \Rightarrow \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} \bigvee_{\alpha_k} \alpha_k \in A_k$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} & (A_1 \times \dots \times A_n \subset B_1 \times \dots \times B_n) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} \{ (x_1, \dots, x_n) : x_1 = \alpha_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1} = \\ & = \alpha_{k-1} \wedge x_k \in A_k \wedge x_{k+1} = \alpha_{k+1} \wedge \dots \wedge x_n = \alpha_n \} \subset \\ & \subset \{ (x_1, \dots, x_n) : x_1 = \alpha_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1} = \alpha_{k-1} \wedge x_k \in B_k \wedge \\ & \wedge x_{k+1} = \alpha_{k+1} \wedge \dots \wedge x_n = \alpha_n \} \Rightarrow \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k \subset B_k \end{aligned}$$

Uwaga. Założenia, że $A_1 \times \dots \times A_n \neq 0$ nie można się pozbyć, gdyż, na przykład dla $A_n = 0$ jest $A_1 \times \dots \times A_n = 0$ i

$$\exists A_1 \times \dots \times A_n \subset B_1 \times \dots \times B_n$$

pomimo że zbiory A_1, \dots, A_{n-1} mogą być dowolne.

$$(kar9) \quad A_1 \times \dots \times A_n = B_1 \times \dots \times B_n \neq 0 \implies \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k = B_k$$

D Wynika z własności (kar8) oraz z faktu, że

$$\begin{aligned} & (A_1 \times \dots \times A_n = B_1 \times \dots \times B_n) \iff \\ & \iff (A_1 \times \dots \times A_n \subset B_1 \times \dots \times B_n) \wedge (B_1 \times \dots \times B_n \subset A_1 \times \dots \times A_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (kar10) \quad & \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k \subset B_k \implies \\ & \implies A_1 \times \dots \times A_n = \bigcap_{k=1}^n (B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times A_k \times B_{k+1} \times \dots \\ & \times B_n) \end{aligned}$$

D Na mocy własności (kar2)

$$\begin{aligned} & \bigcap_{k=1}^n (B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times A_k \times B_{k+1} \times \dots \times B_n) = \\ & = (A_1 \cap B_1) \times \dots \times (A_n \cap B_n) = A_1 \times \dots \times A_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (kar11) \quad & B_1 \times \dots \times B_n - A_1 \times \dots \times A_n = \\ & = \bigcup_{k=1}^n (B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times (B_k - A_k \cap B_k) \times B_{k+1} \times \dots \\ & \times B_n) \end{aligned}$$

D Na mocy własności (kar10) i (kar2)

$$\begin{aligned} & B_1 \times \dots \times B_n - A_1 \times \dots \times A_n = B_1 \times \dots \times B_n - \\ & - (A_1 \cap B_1 \times \dots \times A_n \cap B_n) = B_1 \times \dots \times B_n - \\ & - \bigcap_{k=1}^n (B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times (A_k \cap B_k) \times B_{k+1} \times \dots \times B_n) = \\ & = \bigcup_{k=1}^n (B_1 \times \dots \times B_n - B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times (A_k \cap B_k) \times \\ & \times B_{k+1} \times \dots \times B_n) = \bigcup_{k=1}^n (B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times \\ & \times (B_k - A_k \cap B_k) \times B_{k+1} \times \dots \times B_n) \end{aligned}$$

$$(\text{kar12}) \quad B_1 \times \dots \times B_n - A_1 \times \dots \times A_n =$$

$$= \sum_{j_2=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (C_{12} \times C_{2j_2} \times \dots \times C_{nj_n}) +$$

$$+ \sum_{j_3=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (C_{11} \times C_{22} \times C_{3j_3} \times \dots \times C_{nj_n}) + \dots +$$

$$+ \sum_{j_n=1}^2 (C_{11} \times C_{21} \times \dots \times C_{n-2,1} \times C_{n-1,2} \times C_{nj_n}) +$$

$$+ (C_{11} \times C_{21} \times \dots \times C_{n-1,1} \times C_{n2})$$

gdzie

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} C_{k1} = B_k \cap A_k \wedge C_{k2} = B_k - A_k$$

D] Ponieważ

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} B_k = C_{k1} + C_{k2}$$

więc na mocy własności (kar5)

$$B_1 \times \dots \times B_n = \left(\sum_{j_1=1}^2 C_{1j_1} \right) \times \dots \times \left(\sum_{j_n=1}^2 C_{nj_n} \right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (C_{1j_1} \times \dots \times C_{nj_n}) =$$

$$= \sum_{j_2=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (C_{12} \times C_{2j_2} \times \dots \times C_{nj_n}) +$$

$$+ \sum_{j_2=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (C_{11} \times C_{2j_2} \times \dots \times C_{nj_n}) =$$

$$= \sum_{j_2=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (C_{12} \times C_{2j_2} \times \dots \times C_{nj_n}) +$$

$$+ \sum_{j_3=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (C_{11} \times C_{22} \times C_{3j_3} \times \dots \times C_{nj_n}) +$$

$$+ \sum_{j_3=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (C_{11} \times C_{21} \times C_{3j_3} \times \dots \times C_{nj_n}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \dots = \sum_{j_2=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (C_{12} \times C_{2j_2} \times \dots \times C_{nj_n}) + \\
&+ \sum_{j_3=1}^2 \dots \sum_{j_n=1}^2 (C_{11} \times C_{22} \times C_{3j_3} \times \dots \times C_{nj_n}) + \dots + \\
&+ \sum_{j_n=1}^2 (C_{11} \times C_{21} \times \dots \times C_{n-2,1} \times C_{n-1,2} \times C_{nj_n}) + \\
&+ C_{11} \times C_{21} \times \dots \times C_{n-1,1} \times C_{n2} + (B_1 \cap A_1) \times \dots \\
&\times (B_n \cap A_n)
\end{aligned}$$

skąd wynika żądana własność.

§ 174. Ciała produktowe

Ciałem produktowym $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$, gdzie $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ są ciałami zbiorów odpowiednio przestrzeni X_1, \dots, X_n , nazywamy najmniejsze ciało zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ zawierające wszystkie zbiory postaci

$$(*) \quad X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times A_k \times X_{k+1} \times \dots \times X_n$$

gdzie

$$k \in \{1, \dots, n\} \wedge A_k \in \mathcal{K}_k$$

Wykażemy, że dla danych ciał zbiorów $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ istnieje dokładnie jedno ciało produktowe $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$.

Niech Ω oznacza klasę wszystkich takich ciał zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$, które zawierają wszystkie zbiory postaci (*). Klasa Ω nie jest pusta, gdyż należy do niej ciało wszystkich podzbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$. Analogicznie do dowodu twierdzenia § 27 dowodzi się, że

$$(**) \quad \mathcal{K}^* = \bigcap_{\mathcal{K} \in \Omega} \mathcal{K}$$

jest też ciałem zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$. Ponieważ zawiera na mocy definicji (**) wszystkie zbiory postaci (*), więc należy do klasy Ω , a wzór (**) gwarantuje, że jest jedynym najmniejszym ciałem zbiorów z klasy Ω , czyli jedynym ciałem produktowym

$$\mathcal{K}^* = \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$$

Ciało produktowe jako ciało zbiorów przestrzeni $X = X_1 \times \dots \times X_n$ ma wszystkie własności podane w § 23. Udowodnimy dalsze jeszcze własności ciał produktowych.

(cp1) Ciało produktowe $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$ jest najmniejszym ciałem zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ zawierającym wszystkie zbiory postaci

$$(***) \quad A_1 \times \dots \times A_n$$

gdzie

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k \in \mathcal{K}_k$$

D Jeśli jakieś ciało zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ zawiera wszystkie zbiory postaci (*), to zawiera również ich iloczyny, a więc na mocy własności (kar10), w której kładziemy $B_1 = X_1, \dots, B_n = X_n$, zawiera także wszystkie zbiory postaci (**). Odwrotnie, jeśli jakieś ciało zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ zawiera wszystkie zbiory postaci (**), to w szczególności zawiera wszystkie zbiory postaci (*). Wynika stąd, że klasa Ω , określona wyżej, jest również klasą wszystkich ciał zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ zawierających wszystkie zbiory postaci (**). Wobec tego ze wzoru (**) wynika żądana własność.

(cp2) $(\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m) * (\mathcal{K}_{m+1} * \dots * \mathcal{K}_n) = \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$

D Z definicji $(\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m) * (\mathcal{K}_{m+1} * \dots * \mathcal{K}_n)$ jest najmniejszym ciałem zbiorów przestrzeni $(X_1 \times \dots \times X_m) \times (X_{m+1} \times \dots \times X_n)$, czyli - na mocy umowy (kar1) - przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$, zawierającym wszystkie zbiory postaci

$$(o) \quad A \times (X_{m+1} \times \dots \times X_n) \text{ i } (X_1 \times \dots \times X_m) \times B$$

gdzie

$$A \in \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m \wedge B \in \mathcal{K}_{m+1} * \dots * \mathcal{K}_n$$

Wobec tego, że ciało produktowe $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m$ zawiera wszystkie zbiory postaci

$$(oo) \quad X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times A_k \times X_{k+1} \times \dots \times X_m$$

gdzie

$$k \in \{1, \dots, m\} \wedge A_k \in \mathcal{K}_k$$

a ciało produktowe $\mathcal{K}_{m+1} * \dots * \mathcal{K}_n$ wszystkie zbiory postaci

$$X_{m+1} \times \dots \times X_{k-1} \times A_k \times X_{k+1} \times \dots \times X_n$$

gdzie

$$k \in \{m+1, \dots, n\} \wedge A_k \in \mathcal{K}_k$$

wobec tego między zbiorami postaci (o) znajdują się wszystkie zbiory postaci (*). $(\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m) * (\mathcal{K}_{m+1} * \dots * \mathcal{K}_n)$ jest zatem ciałem zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ zawierającym wszystkie zbiory postaci (*) i na mocy (**) jest
(ooo) $(\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m) * (\mathcal{K}_{m+1} * \dots * \mathcal{K}_n) \supset \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$

Rozpatrzmy teraz klasę Q tych wszystkich zbiorów A przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_m$, dla których

$$A \times (X_{m+1} \times \dots \times X_n) \in \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n.$$

Klasa Q nie jest pusta, gdyż zawiera zbiór $X_1 \times \dots \times X_m$. Spełnia zatem warunek (x1) dla ciał zbiorów.

Jeśli $A \in Q$, to

$$A^c \times (X_{m+1} \times \dots \times X_n) = (X_1 \times \dots \times X_m - A) \times (X_{m+1} \times \dots \times X_n) = X_1 \times \dots \times X_n - A \times (X_{m+1} \times \dots \times X_n) \in$$

$$\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$$

skąd $A^c \in Q$. Klasa Q spełnia zatem warunek (x2) dla ciał zbiorów.

Jeśli $A, B \in Q$, to na mocy własności (kar4)

$$(A \cup B) \times (X_{m+1} \times \dots \times X_n) = A \times (X_{m+1} \times \dots \times X_n) \cup B \times (X_{m+1} \times \dots \times X_n) \in \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$$

skąd $A \cup B \in Q$. Zatem klasa Q spełnia także warunek ($\alpha 3$) dla ciał zbiorów i jest ciałem zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_m$. Sprawdzamy bezpośrednio, że klasa Q zawiera wszystkie zbiory postaci (oo), wobec czego

$$Q \supset \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m$$

W konsekwencji wszystkie zbiory postaci

$$A \times (X_{m+1} \times \dots \times X_n)$$

gdzie

$$A \in \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m$$

należą do ciała produktowego $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$. Analogicznie wykazujemy, że ciało produktowe $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$ zawiera wszystkie zbiory postaci (o), co wobec definicji ciała produktowego $(\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m) * (\mathcal{K}_{m+1} * \dots * \mathcal{K}_n)$ daje

$$(\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_m) * (\mathcal{K}_{m+1} * \dots * \mathcal{K}_n) \subset \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$$

Po uwzględnieniu (ooo) otrzymujemy stąd żadaną własność.

$$(cp3) \quad A \in \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n \Leftrightarrow A = \bigcup_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj})$$

gdzie

$$(i) \quad \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} \bigwedge_{j \in \{1, \dots, m\}} A_{kj} \in \mathcal{K}_k$$

D Ciało produktowe $\mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n$ na mocy własności (cp1) zawiera wszystkie zbiory postaci (***), a ponieważ jest ciałem zbiorów, więc zawiera również wszystkie zbiory postaci

$$(ii) \quad A = \bigcup_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj})$$

gdzie jest spełniony warunek (i). Wobec tego wystarczy wykazać, że

$$(iii) \quad A \in \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n \Rightarrow A = \bigcup_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj})$$

Rozpatrzmy klasę \mathcal{H} wszystkich zbiorów postaci (ii). Wykażemy, że \mathcal{H} jest ciałem zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$.

Klasa \mathcal{H} nie jest pusta, gdy należy do niej zbiór $X_1 \times \dots \times X_n$. Wobec tego spełnia warunek (x1) dla ciał zbiorów.

Jeśli $A \in \mathcal{H}$, to

$$\begin{aligned} A^c &= X_1 \times \dots \times X_n - A = (X_1 \times \dots \times X_n) - \bigcup_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj}) \\ &= \bigcap_{j=1}^m (X_1 \times \dots \times X_n - A_{1j} \times \dots \times A_{nj}) \quad (\text{kar11}) \\ &\stackrel{(\text{kar11})}{=} \bigcap_{j=1}^m \bigcup_{k_j=1}^n (X_1 \times \dots \times X_{k_j-1} \times (X_{k_j} - A_{kj}) \times X_{k_j+1} \times \dots \\ &\quad \times X_n) = \bigcup_{k_1=1}^n \dots \bigcup_{k_n=1}^n \bigcap_{j=1}^m (X_1 \times \dots \times X_{k_j-1} \times (X_{k_j} - A_{kj}) \times \\ &\quad \times X_{k_j+1} \times \dots \times X_n) \end{aligned}$$

Na mocy własności (kar2) zbiory

$$\bigcap_{j=1}^m (X_1 \times \dots \times X_{k_j-1} \times (X_{k_j} - A_{kj}) \times X_{k_j+1} \times \dots \times X_n)$$

dają się przedstawić w postaci (ii) i wobec tego A^c też daje się przedstawić w postaci (ii), co dowodzi, że klasa \mathcal{H} spełnia również warunek (x2) dla ciał zbiorów.

Jeśli $A, B \in \mathcal{H}$, czyli mają postać (ii), to $A \cup B$ ma również taką postać, co dowodzi, że klasa \mathcal{H} spełnia także warunek (x3) dla ciał zbiorów i jest ciałem zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$. Ale klasa \mathcal{H} zawiera wszystkie zbiory postaci (*), wobec czego na mocy (**)

$$X_1 * \dots * X_n \in \mathcal{H}$$

skąd wynika implikacja (iii). Tym samym własność (cp3) została udowodniona.

$$(\text{cp4}) \quad A \in X_1 * \dots * X_n \Leftrightarrow A = \sum_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj})$$

gdzie

$$(\text{iv}) \quad \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} \bigwedge_{j \in \{1, \dots, m\}} A_{kj} \in X_k$$

D] Na mocy własności (cp3) mamy

$$A = \sum_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj}) \Rightarrow A = \bigcup_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj}) \Rightarrow \\ \Rightarrow A \in \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n.$$

Wystarczy zatem wykazać, że

$$(v) \quad A \in \mathcal{K}_1 * \dots * \mathcal{K}_n \Rightarrow A = \sum_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj})$$

Analogicznie, jak w dowodzie własności (cp3), rozpatrzmy klasę \mathcal{H} wszystkich zbiorów postaci

$$(vi) \quad \sum_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj})$$

ze spełnieniem warunku (iv). Wykażemy, że klasa \mathcal{H} jest ciałem zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$.

Klasa \mathcal{H} nie jest pusta, gdyż należy do niej zbiór $X_1 \times \dots \times X_n$. Wobec tego klasa \mathcal{H} spełnia warunek (x1) dla ciał zbiorów.

Jeśli

$$A = \sum_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj}) \in \mathcal{H}$$

to

$$A^c = X_1 \times \dots \times X_n - A = X_1 \times \dots \times X_n - \sum_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj}) = \\ = \left(\dots \left((X_1 \times \dots \times X_n - A_{11} \times \dots \times A_{n1}) - A_{12} \times \dots \times A_{n2} \right) - \dots \right) - A_{1m} \times \dots \times A_{nm}$$

Wykażemy przez indukcję, że zbiór A^c jest postaci (vi). Na mocy własności (kar12) zbiór

$$X_1 \times \dots \times X_n - A_{11} \times \dots \times A_{n1}$$

można przedstawić w postaci (vi). Niech dla ustalonego $j \in \{1, \dots, m-1\}$

$$\left(\dots \left((X_1 \times \dots \times X_n - A_{11} \times \dots \times A_{n1}) - A_{12} \times \dots \times A_{n2} \right) - \dots \right) - A_{1j} \times \dots \times A_{nj} = \sum_{q_j=1}^{p_j} (B_{1q_j}^{(j)} \times \dots \times B_{nq_j}^{(j)}),$$

gdzie

$$k \in \bigwedge_{1, \dots, n} \quad q_j \in \bigwedge_{1, \dots, p_j} \quad B_{kq_j}^{(j)} \in \mathcal{X}_k$$

Z uwagi na rozłączność zbiorów $A_{11} \times \dots \times A_{n1}, \dots, A_{1m} \times \dots \times A_{nm}$ jest

$$A_{1,j+1} \times \dots \times A_{n,j+1} \subset \sum_{q_j=1}^{p_j} (B_{1q_j}^{(j)} \times \dots \times B_{nq_j}^{(j)})$$

Wobec tego

$$A_{1,j+1} \times \dots \times A_{n,j+1} = \sum_{q_j=1}^{p_j} (C_{1q_j}^{(j)} \times \dots \times C_{nq_j}^{(j)})$$

gdzie

$$\begin{aligned} C_{1q_j}^{(j)} \times \dots \times C_{nq_j}^{(j)} &= (A_{1,j+1} \times \dots \times A_{n,j+1}) \cap \\ &\cap (B_{1q_j}^{(j)} \times \dots \times B_{nq_j}^{(j)}) \quad (\text{kar 2}) \quad (A_{1,j+1} \cap B_{1q_j}^{(j)}) \times \dots \times \\ &\times (A_{n,j+1} \cap B_{nq_j}^{(j)}) \subset B_{1q_j}^{(j)} \times \dots \times B_{nq_j}^{(j)} \end{aligned}$$

i stąd

$$k \in \bigwedge_{1, \dots, n} \quad q_j \in \bigwedge_{1, \dots, p_j} \quad C_{kq_j}^{(j)} \in \mathcal{X}_k$$

Z powyższego wynika, że

$$\begin{aligned} & \left(\dots \left((\chi_1 \times \dots \times \chi_n - A_{11} \times \dots \times A_{n1}) - A_{12} \times \dots \times \right. \right. \\ & \times A_{n2}) - \dots \left. \right) - A_{1,j+1} \times \dots \times A_{n,j+1} = \\ & = \sum_{q_j=1}^{p_j} (B_{1q_j}^{(j)} \times \dots \times B_{nq_j}^{(j)} - C_{1q_j}^{(j)} \times \dots \times C_{nq_j}^{(j)}) \end{aligned}$$

i na mocy własności (kar12) zbiór

$$\begin{aligned} & \left(\dots \left((\chi_1 \times \dots \times \chi_n - A_{11} \times \dots \times A_{n1}) - A_{12} \times \dots \times \right. \right. \\ & \times A_{n2}) - \dots \left. \right) - A_{1,j+1} \times \dots \times A_{n,j+1} \end{aligned}$$

też daje się wówczas przedstawić w postaci

$$\sum_{q_{j+1}=1}^{p_{j+1}} (B_{1q_{j+1}}^{(j+1)} \times \dots \times B_{nq_{j+1}}^{(j+1)})$$

gdzie

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} \bigwedge_{q_{j+1} \in \{1, \dots, p_{j+1}\}} B_{kq_{j+1}}^{(j+1)} \in \mathcal{K}_k$$

Na tym kończy się krok indukcyjny. Wykazaliśmy w ten sposób, że jeśli $A \in \mathcal{H}$, to $A^c \in \mathcal{H}$, czyli że klasa \mathcal{H} spełnia także warunek ($\kappa 2$) dla ciał zbiorów.

Niech teraz

$$A = \sum_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj}) \in \mathcal{H}$$

$$B = \sum_{q=1}^p (B_{1q} \times \dots \times B_{nq}) \in \mathcal{H}$$

gdzie

$$k \in \{1, \dots, n\} \left(\bigwedge_{j \in \{1, \dots, m\}} A_{kj} \in \mathcal{K}_k \wedge \bigwedge_{q \in \{1, \dots, p\}} B_{kq} \in \mathcal{K}_k \right)$$

Wykażemy, że $A \cup B \in \mathcal{H}$, czyli że $A \cup B$ daje się przedstawić w postaci (vi). Otóż

$$A \cup B = A \cap B + (A - B) + (B - A)$$

i wystarczy wykazać, że każdy ze zbiorów $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ daje się przedstawić w postaci (vi). Ze względu na własność ($\kappa 2$), już udowodnioną, oraz wzory

$$A - B = A \cap B^c \quad B - A = B \cap A^c$$

wystarczy wykazać, że $A \cap B$ daje się przedstawić w postaci (vi). Ale

$$\begin{aligned} A \cap B &= \left[\sum_{j=1}^m (A_{1j} \times \dots \times A_{nj}) \right] \cap \left[\sum_{q=1}^p (B_{1q} \times \dots \times B_{nq}) \right] = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^p [(A_{1j} \times \dots \times A_{nj}) \cap (B_{1q} \times \dots \times B_{nq})] = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^p (A_{1j} \cap B_{1q}) \times \dots \times (A_{nj} \cap B_{nq}) \end{aligned}$$

Ponieważ

$$k \in \{1, \dots, n\} \quad j \in \{1, \dots, m\} \quad q \in \{1, \dots, p\} \quad A_{kj} \cap B_{kq} \in \mathcal{K}_k$$

więc $A \cap B \in \mathcal{H}$ i w konsekwencji $A \cup B \in \mathcal{H}$. Zatem klasa spełnia także warunek ($\kappa 3$) i jest ciałem zbiorów przestrzeni.

$X_1 \times \dots \times X_n$. Ze względu na to, że zbiory postaci (*) są także postaci (vi), więc klasa \mathcal{H} jest ciałem zbiorów przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ zawierającym wszystkie zbiory postaci (*) i na mocy (**)

$$X_1 * \dots * X_n \in \mathcal{H}$$

W konsekwencji otrzymujemy implikację (v), co kończy dowód własności (cp 4).

§ 175. σ -ciała produktowe

σ -ciałem produktowym $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$, gdzie $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ są σ -ciałami odpowiednio przestrzeni X_1, \dots, X_n , nazywamy najmniejsze σ -ciało przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ zawierające wszystkie zbiory postaci

$$(*) \quad X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times A_k \times X_{k+1} \times \dots \times X_n$$

gdzie

$$k \in \{1, 2, \dots, n\} \wedge A_k \in \mathcal{S}_k$$

Analogicznie, jak wykazaliśmy istnienie i jednoznaczność ciała produktowego, dowodzi się, że dla danych σ -ciał $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ istnieje dokładnie jedno σ -ciało produktowe $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$.

σ -ciało produktowe jako σ -ciało przestrzeni $X = X_1 \times \dots \times X_n$ ma wszystkie własności podane w § 24. Ma ponadto jeszcze następujące własności.

(σp_1) σ -ciało produktowe $\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$ jest najmniejszym σ -ciałem przestrzeni $X_1 \times \dots \times X_n$ zawierającym wszystkie zbiory postaci

$$(**) \quad A_1 \times \dots \times A_n$$

gdzie

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k \in \mathcal{S}_k$$

D] Analogiczny do dowodu własności (cp1).

(σp_2) $(\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_m) \otimes (\mathcal{S}_{m+1} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n) = \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$

D] Analogiczny do dowodu własności (cp2).