

VIII. ZMIENNE LOSOWE

§ 258. Określenie zmiennej losowej

Niech będzie dana przestrzeń probabilistyczna (X, \mathcal{S}, ρ) . Zmienną losową nazywamy funkcję rzeczywistą skończoną mierzalną na całej przestrzeni X .

Zgodnie z definicją funkcji mierzalnej z § 181 zmienna losowa jest określona dla każdego zdarzenia elementarnego $e \in X$.

Zmienne losowe będziemy w niniejszym opracowaniu oznaczać małymi literami greckimi, ich wartości małymi literami łacińskimi.

W zastosowaniach praktycznych zmienne losowe mają zazwyczaj prostą interpretację. Często są to wielkości mierzone na zbiorze obiektów X lub funkcje tych wielkości. Jeśli np. X jest zbiorem studentów, a ξ ich wzrostem, to ξ jest zmienną losową w przestrzeni (X, \mathcal{S}, ρ) , gdzie ze względu na skończoność przestrzeni X , można by przyjąć, że \mathcal{S} jest klasą wszystkich podzbiorów przestrzeni X , a ρ rozkładem prawdopodobieństwa określonym na \mathcal{S} .

W porównaniu do ogólnej definicji funkcji mierzalnych na zbiorze z § 181 zachodzi tutaj ta różnica, że zmienne losowe definiujemy z reguły w przestrzeni z miarą, podczas gdy w § 181 było wymagane określenie tylko przestrzeni X i σ -ciała \mathcal{S} . Ponadto nie każda funkcja mierzalna na całej przestrzeni X może być zmienną losową, gdyż definicja tej ostatniej nakłada warunek, by funkcja była skończona.

§ 259. Własności zmiennych losowych

Wprost z definicji zmiennych losowych wynika sporo własności, będących po prostu własnościami funkcji mierzalnych skończonych. Podajemy te własności niżej, zakładając, że dana jest przestrzeń probabilistyczna (X, \mathcal{S}, ρ) , a symbole $\xi, \eta, \xi_1, \xi_2 \dots$ oznaczają zmienne losowe w tej przestrzeni. Ponadto symbolem \mathcal{B} będziemy oznaczać ciało zbiorów borelowskich na prostej \mathbb{R}

$$(\xi 1) \quad \bigwedge_{B \in \mathcal{B}} \{e: \xi(e) \in B\} \in \mathcal{S}$$

D] Na mocy twierdzenia § 183.

$$\begin{aligned}
 (\xi 2) \quad & \{e : \xi(e) < a\} \in S, & \{e : a < \xi(e) < b\} \in S, \\
 & \{e : \xi(e) > a\} \in S, & \{e : a \leq \xi(e) < b\} \in S, \\
 & \{e : \xi(e) \leq a\} \in S, & \{e : a < \xi(e) \leq b\} \in S, \\
 & \{e : \xi(e) \geq a\} \in S, & \{e : a \leq \xi(e) \leq b\} \in S, \\
 & \{e : \xi(e) = a\} \in S, & \{e : \xi(e) \neq a\} \in S
 \end{aligned}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}_0$

D] Na mocy twierdzenia § 184.

$$\begin{aligned}
 (\xi 3) \quad & \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} c \xi \text{ jest zmienną losową,} \\
 & \bigwedge_{\substack{c \in \mathbb{R} \\ c > 0}} |\xi|^c \text{ jest zmienną losową.}
 \end{aligned}$$

D] Na mocy twierdzenia § 185.

(\xi 4) Jeśli h jest skończoną funkcją borelowską w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n , to

$$h[\xi_1(e), \dots, \xi_n(e)]$$

jest zmienną losową.

D] Na mocy twierdzenia § 186.

$$(\xi 5) \quad \sum_{k=1}^n \xi_k \text{ jest zmienną losową}$$

D] Na mocy twierdzenia § 188.

$$(\xi 6) \quad \xi_1 - \xi_2 \text{ jest zmienną losową.}$$

D] Na mocy twierdzenia § 190.

$$(\xi 7) \quad \prod_{k=1}^n \xi_k \text{ jest zmienną losową.}$$

D] Na mocy twierdzenia § 192.

$$(\xi 8) \quad \text{Jeśli } \bigwedge_{e \in X} \xi(e) \neq 0, \text{ to } \frac{1}{\xi} \text{ jest zmienną losową.}$$

D] Na mocy twierdzenia § 193.

(§9) Jeśli $\bigwedge_{e \in \mathcal{X}} \eta(e) \neq 0$, to $\frac{\xi}{\eta}$ jest zmienną losową.

D] Na mocy twierdzenia § 195.

$$(\S 10) \begin{cases} \{e: \xi(e) < \eta(e)\} \in \mathcal{S}, \\ \{e: \xi(e) \leq \eta(e)\} \in \mathcal{S}, \\ \{e: \xi(e) = \eta(e)\} \in \mathcal{S} \end{cases}$$

D] Na mocy twierdzenia § 196.

$$(\S 11) \eta_1(e) = \max [\xi_1(e), \dots, \xi_n(e)]$$

$$\eta_2(e) = \min [\xi_1(e), \dots, \xi_n(e)]$$

są zmiennymi losowymi.

D] Na mocy twierdzenia § 197.

$$(\S 12) \eta_1(e) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \sup_n \xi_n(e) = \infty \\ \sup_n \xi_n(e) & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

$$\eta_2(e) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \inf_n \xi_n(e) = -\infty \\ \inf_n \xi_n(e) & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

$$\eta_3(e) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n(e) \right| = \infty \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n(e) & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

$$\eta_4(e) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \left| \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n(e) \right| = \infty \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n(e) & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

$$\eta_5(e) = \begin{cases} 0 & \text{dla tych } e \in \mathcal{X}, \text{ dla których ciąg } (\xi_n(e)) \text{ jest} \\ & \text{rozbieżny lub zbieżny do granicy nieskończonej} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(e) & \text{dla tych } e \in \mathcal{X}, \text{ dla których ciąg} \\ & (\xi_n(e)) \text{ jest zbieżny do granicy skończonej} \end{cases}$$

są zmiennymi losowymi.

D] Wynika z twierdzeń § 198 i § 182.

(§13) Funkcja charakterystyczna zbioru mierzalnego $A \subset \mathcal{X}$ jest zmienną losową.

D] Wynika z definicji z § 201.

(§14) Funkcja prosta mierzalna w przestrzeni \mathcal{X} jest zmienną losową.

D] Wynika z definicji z § 202.

Uwaga. Zmienną losową, będącą funkcją charakterystyczną zbioru będziemy nazywać zmienną losową charakterystyczną. Zmienną losową, będącą funkcją prostą, będziemy nazywać zmienną losową prostą.

(§15) Każda zmienna losowa nieujemna jest granicą ciągu niemalejącego zmiennych losowych prostych.

D] Wynika z twierdzenia § 203.

§ 260. Ciągi zmiennych losowych

Ciągi zmiennych losowych traktujemy jako ciągi skończonych funkcji mierzalnych na całej przestrzeni \mathcal{X} , a ich zbieżność będzie nas interesować tylko w przypadku, gdy zachodzi na całej przestrzeni \mathcal{X} i granicą jest zmienna losowa, a więc gdy granica jest skończona. Z tego względu zbieżność na zbiorze ciągu zmiennych losowych (ξ_n) będziemy rozważać tylko w przypadku, gdy tym zbiorem jest cała przestrzeń \mathcal{X} i gdy granica jest skończona, tzn. będziemy mówić, że ciąg (ξ_n) jest zbieżny do zmiennej losowej ξ i pisać

$$\xi_n \rightarrow \xi \text{ albo } \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$$

wtedy i tylko wtedy, gdy ξ, ξ_1, ξ_2, \dots są zmiennymi losowymi i

$$(312) \bigwedge_{e \in \mathcal{X}} \xi(e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(e), \text{ gdzie } \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(e) \right| < \infty$$

Z powyższej definicji wynikają następujące własności.

$$(\xi 16) \xi_n \rightarrow \xi \wedge \xi_n \rightarrow \eta \Rightarrow \xi = \eta \quad (\text{na mocy własności (nz1)})$$

$$(\xi 17) \xi_n \rightarrow \xi \Rightarrow \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathcal{N}} \xi_{m_n} \rightarrow \xi$$

na mocy własności (nz2))

(ξ18) $\xi_n \rightarrow \xi \iff$ ciąg (ξ_n) spełnia warunek Cauchy'ego \iff

$$\iff \bigwedge_{e \in X} \bigwedge_{\substack{\xi \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_q \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_q}} \left| \xi_m(e) - \xi_n(e) \right| < \varepsilon$$

(na mocy własności (nz6))

(ξ19) $\xi_n \rightarrow \xi \wedge \eta_n \rightarrow \eta \Rightarrow \xi_n + \eta_n \rightarrow \xi + \eta$

(na mocy własności (nz7))

(ξ20) $\xi_n \rightarrow \xi \wedge \eta_n \rightarrow \eta \Rightarrow \xi_n - \eta_n \rightarrow \xi - \eta$

(na mocy własności (nz8))

(ξ21) $\xi_n \rightarrow \xi \wedge \eta_n \rightarrow \eta \Rightarrow \xi_n \eta_n \rightarrow \xi \eta$

(na mocy własności (nz9))

(ξ22) $\xi_n \rightarrow \xi \Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \xi_n^k \rightarrow \xi^k$

(na mocy własności (nz10))

(ξ23) $\xi_n \rightarrow \xi \Rightarrow \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} c \xi_n \rightarrow c \xi$

(na mocy własności (nz11))

(ξ24) $\xi_n \rightarrow \xi \wedge \bigwedge_{e \in X} \left(\xi(e) \neq 0 \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(e) \neq 0 \right) \Rightarrow \frac{1}{\xi_n} \rightarrow \frac{1}{\xi}$

(na mocy własności (nz12))

(ξ25) $\xi_n \rightarrow \xi \wedge \eta_n \rightarrow \eta \wedge \left(\bigwedge_{e \in X} \eta(e) \neq 0 \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \eta_n(e) \neq 0 \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\xi_n}{\eta_n} \rightarrow \frac{\xi}{\eta}$$

(na mocy własności (nz13))

(ξ26) Jeśli h jest skończoną funkcją rzeczywistą o dziedzinie $H \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na prostej \mathbb{R} , ciągłą na zbiorze $Y \subset H$ domkniętym w przestrzeni H i takim, że $\xi(X), \xi_1(X), \xi_2(X), \dots \subset Y$, to

$$\xi_n \rightarrow \xi \Rightarrow h(\xi_n) \rightarrow h(\xi)$$

(wynika z własności (nz14))

Zbieżność jednostajną ciągu zmiennych losowych rozpatrujemy również tylko na całej przestrzeni \mathcal{X} i piszemy

$$\xi_n \xrightarrow{j} \xi \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \stackrel{j}{=} \xi$$

Zatem

$$(313) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \iff \xi, \xi_1, \xi_2, \dots \text{ są zmiennymi losowymi } \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{e \in \mathcal{X}} |\xi_n(e) - \xi(e)| < \varepsilon$$

Na mocy powyższej definicji otrzymujemy następujące własności

$$(\xi 27) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \wedge \xi_n \xrightarrow{j} \eta \implies \xi = \eta$$

(na mocy własności (jz1))

$$(\xi 28) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \implies \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} \xi_{m_n} \xrightarrow{j} \xi$$

(na mocy własności (jz2))

$$(\xi 29) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \iff \text{ciąg } (\xi_n) \text{ spełnia jednostajnie warunek Cauchy'ego} \iff$$

$$\iff \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_0}} \bigwedge_{e \in \mathcal{X}} |\xi_m(e) - \xi_n(e)| < \varepsilon$$

(na mocy własności (jz5))

$$(\xi 30) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \implies \xi_n \rightarrow \xi \quad (\text{na mocy własności (jz6)})$$

$$(\xi 31) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \implies \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} c \xi_n \xrightarrow{j} c \xi \quad \text{na mocy własności (jz7))}$$

$$(\xi 32) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{j} \eta \implies \xi_n + \eta_n \xrightarrow{j} \xi + \eta$$

(na mocy własności (jz8))

$$(\xi 33) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{j} \eta \implies \xi_n - \eta_n \xrightarrow{j} \xi - \eta$$

(na mocy własności (jz9))

$$(\xi 34) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{j} \eta \wedge \bigvee_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ a > 0}} \bigwedge_{e \in \mathcal{X}} (|\xi(e)| < a \wedge |\eta(e)| < a) \implies \\ \implies \xi_n \eta_n \xrightarrow{j} \xi \eta \quad (\text{na mocy własności (jz10)})$$

$$(\xi 35) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \wedge \bigvee_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ a > 0}} \bigwedge_{e \in X} |\xi(e)| < a \Rightarrow \bigwedge_{\kappa \in \mathbb{N}} \xi_n^\kappa \xrightarrow{j} \xi^\kappa$$

(na mocy własności (jz11))

$$(\xi 36) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \wedge \bigwedge_{e \in X} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(e) \neq 0 \wedge \bigvee_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ a > 0}} \bigwedge_{e \in X} |\xi(e)| > a \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\xi_n} \xrightarrow{j} \frac{1}{\xi} \quad (\text{na mocy własności (jz12)})$$

$$(\xi 37) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{j} \eta \wedge \bigwedge_{e \in X} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \eta_n(e) \neq 0 \wedge$$

$$\wedge \left(\bigvee_{\substack{a, b \in \mathbb{R} \\ a, b > 0}} \bigwedge_{e \in X} (|\xi(e)| < a \wedge |\eta(e)| > b) \right) \Rightarrow \frac{\xi_n}{\eta_n} \xrightarrow{j} \frac{\xi}{\eta}$$

(na mocy własności (jz13))

$$(\xi 38) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{\substack{a_n \in \mathbb{R} \\ a_n > 0}} \bigwedge_{e \in X} |\xi_n(e)| < a_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ a > 0}} \bigwedge_{e \in X} |\xi(e)| < a \quad (\text{na mocy własności (jz14)})$$

(\xi 39) Jeśli X jest przestrzenią metryczną, ξ_1, ξ_2, \dots są ciągłe i $\xi \stackrel{j}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \xi$, to ξ jest ciągła
(na mocy własności (jz15))

(\xi 40) Jeśli h jest skończoną funkcją rzeczywistą o dziedzinie $H \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na prostej \mathbb{R} , jednakowo ciągłą na zbiorze $\gamma \subset H$ domkniętym w przestrzeni H i takim, że $\xi(X), \xi_1(X), \xi_2(X), \dots \subset \gamma$, to $\xi_n \xrightarrow{j} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{j} h(\xi)$

(na mocy własności (jz16))

Na mocy własności (prj11) zbieżność prawie wszędzie i zbieżność prawie jednostajna dla ciągów zmiennych losowych oznaczają jedno i to samo. W języku probabilistycznym taka zbieżność ciągów zmiennych losowych nazywa się zbieżnością z prawdopodobieństwem 1. Będziemy pisać

$$\xi_n \xrightarrow{1} \xi \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi = \xi$$

Zatem

$$(314) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \stackrel{\text{def}}{\iff} \bigvee_{\substack{A \subset X \\ A \in \mathcal{S}}} \xi_n \xrightarrow{A} \xi \wedge P(A)=1 \iff$$

$$\iff P(\{e: \xi_n(e) \rightarrow \xi(e)\}) = 1$$

Z powyższej definicji wynika, że zbieżność z prawdopodobieństwem 1 ma następujące własności, w zapisie których przyjmujemy umowę, że

$$\xi \stackrel{1}{=} \eta \stackrel{\text{def}}{\iff} P(\{e: \xi(e) = \eta(e)\}) = 1$$

$$(\xi 41) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \wedge \xi_n \xrightarrow{1} \eta \Rightarrow \xi \stackrel{1}{=} \eta$$

(na mocy własności (prw1))

$$(\xi 42) \quad \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \xi_n \stackrel{1}{=} \eta_n \right) \wedge \xi \stackrel{1}{=} \eta \Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{1} \xi \iff \eta_n \xrightarrow{1} \eta \right)$$

(na mocy własności (prw2))

$$(\xi 43) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \Rightarrow \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} \xi_{m_n} \xrightarrow{1} \xi$$

(na mocy własności (prw3))

$$(\xi 44) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \iff \text{ciąg}_{\text{def}} (\xi_n) \text{ spełnia warunek Cauchy'ego z prawdopodobieństwem 1} \iff$$

$$\iff P\left(\left\{e: \bigwedge_{\substack{\xi \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\eta \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_\varepsilon}} |\xi_m(e) - \xi_n(e)| < \varepsilon\right\}\right) = 1$$

(na mocy własności (prw8))

$$(\xi 45) \quad \xi_n \rightarrow \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{1} \xi$$

(na mocy własności (prw9))

$$(\xi 46) \quad \xi_n \xrightarrow{j} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{1} \xi$$

(na mocy własności (prw10))

$$(\xi 47) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \Rightarrow \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} c \xi_n \xrightarrow{1} c \xi$$

(na mocy własności (prw11))

$$(\xi 48) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{1} \eta \Rightarrow \xi_n + \eta_n \xrightarrow{1} \xi + \eta$$

(na mocy własności (prw12))

$$(\xi 49) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{1} \eta \Rightarrow \xi_n - \eta_n \xrightarrow{1} \xi - \eta$$

(na mocy własności (prw13))

$$(\xi 50) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{1} \eta \Rightarrow \xi_n \eta_n \xrightarrow{1} \xi \eta$$

(na mocy własności (prw14))

$$(\xi 51) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \xi_n^k \xrightarrow{1} \xi^k$$

(na mocy własności (prw15))

$$(\xi 52) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \wedge \bigwedge_{e \in X} \left(\xi(e) \neq 0 \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(e) \neq 0 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\xi_n} \xrightarrow{1} \frac{1}{\xi} \quad (\text{na mocy własności (prw16)})$$

$$(\xi 53) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{1} \eta \wedge \bigwedge_{e \in X} \left(\eta(e) \neq 0 \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \eta_n(e) \neq 0 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_n}{\eta_n} \xrightarrow{1} \frac{\xi}{\eta} \quad (\text{na mocy własności (prw17)})$$

(\xi 54) Jeśli h jest skończoną funkcją rzeczywistą o dziedzinie $H \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na prostej \mathbb{R} , ciągłą na zbiorze $Y \subset H$, domkniętym w przestrzeni H i takim, że $\xi(X), \xi_1(X), \xi_2(X), \dots \subset Y$, to

$$\xi_n \xrightarrow{1} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{1} h(\xi)$$

(na mocy własności (prw18))

$$(\xi 55) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{\xi \in \mathbb{R} \\ \xi > 0}} \bigvee_{C \in \mathcal{S}} P(C) > 1 - \varepsilon \wedge \xi_n \xrightarrow{j \cdot C} \xi$$

(na mocy własności (prj11) i definicji zbieżności prawie jednostajnej)

(\xi 56) $\xi_n \xrightarrow{1} \xi \Leftrightarrow$ ciąg (ξ_n) spełnia prawie jednostajnie warunek Cauchy'ego \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon, \delta \in \mathbb{R} \\ \varepsilon, \delta > 0}} \bigvee_{\substack{C \in \mathcal{S} \\ P(C) > 1 - \varepsilon}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_0}} \bigwedge_{e \in C} |\xi_m(e) - \xi_n(e)| < \delta$$

(na mocy własności (prj8)).

Zbieżność ciągu zmiennych losowych według miary będziemy nazywać zbieżnością według prawdopodobieństwa i pisać

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \stackrel{P}{=} \xi$$

Zatem

$$(315) \quad \xi_n \xrightarrow{P} \xi \stackrel{\text{def}}{\iff} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{e: |\xi_n(e) - \xi(e)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Z powyższej definicji wynikają następujące własności.

$$(\xi 57) \quad \xi_n \xrightarrow{P} \xi \wedge \xi_n \xrightarrow{P} \eta \Rightarrow \xi \stackrel{1}{=} \eta$$

(na mocy własności (wμ1))

$$(\xi 58) \quad \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \xi_n \stackrel{1}{=} \eta_n \right) \wedge \xi \stackrel{1}{=} \eta \Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{P} \xi \iff \eta_n \xrightarrow{P} \eta \right)$$

(na mocy własności (wμ4))

$$(\xi 59) \quad \xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} \xi_{m_n} \xrightarrow{P} \xi$$

(na mocy własności (wμ5))

$$(\xi 60) \quad \xi_n \xrightarrow{P} \xi \iff \text{ciąg } (\xi_n) \text{ spełnia warunek Cauchy'ego według prawdopodobieństwa} \iff$$

$$\iff \bigwedge_{\substack{\delta, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \delta, \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ m, n > n_0}} P(\{e: |\xi_m(e) - \xi_n(e)| \geq \delta\}) < \varepsilon$$

(na mocy własności (wμ8))

$$(\xi 61) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$$

(na mocy własności (wμ9))

$$(\xi 62) \quad \xi_n \xrightarrow{1} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi \quad (\text{na mocy własności (wμ10)})$$

$$(\xi 63) \quad \xi_n \rightarrow \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi \quad (\text{na mocy własności (wμ12)})$$

$$(\xi 64) \quad \xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \bigvee_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} \xi_{m_n} \xrightarrow{1} \xi$$

(na mocy własności (wμ13))

$$(\xi 65) \quad \xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} c \xi_n \xrightarrow{P} c \xi \quad (\text{na mocy własności (wμ14)})$$

$$(\xi 66) \quad \xi_n \xrightarrow{p} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{p} \eta \Rightarrow \xi_n + \eta_n \xrightarrow{p} \xi + \eta$$

(na mocy własności (wł15))

$$(\xi 67) \quad \xi_n \xrightarrow{p} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{p} \eta \Rightarrow \xi_n - \eta_n \xrightarrow{p} \xi - \eta$$

(na mocy własności (wł16))

$$(\xi 68) \quad \xi_n \xrightarrow{p} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{p} \eta \Rightarrow \xi_n \eta_n \xrightarrow{p} \xi \eta$$

(na mocy własności (wł18))

$$(\xi 69) \quad \xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \xi_n^k \xrightarrow{p} \xi^k$$

(na mocy własności (wł20))

$$(\xi 70) \quad \xi \xrightarrow{p} \xi \wedge \bigwedge_{e \in X} \left(\xi(e) \neq 0 \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(e) \neq 0 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\xi_n} \xrightarrow{p} \frac{1}{\xi} \quad (\text{na mocy własności (wł22)})$$

$$(\xi 71) \quad \xi_n \xrightarrow{p} \xi \wedge \eta_n \xrightarrow{p} \eta \wedge \bigwedge_{e \in X} \left(\eta(e) \neq 0 \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \eta_n(e) \neq 0 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_n}{\eta_n} \xrightarrow{p} \frac{\xi}{\eta} \quad (\text{na mocy własności (wł24)})$$

(\xi 72) Jeśli h jest skończoną funkcją rzeczywistą o dziedzinie $H \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na prostej \mathbb{R} , ciągłą na przedziale $(a; b) \subset H$, $a, b \in \mathbb{R}_0$, takim, że $\xi(X), \xi_1(X), \xi_2(X), \dots \subset (a; b)$, to

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \xrightarrow{p} h(\xi)$$

(na mocy własności (wł25))

§ 261. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej

Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej ξ będziemy nazywać rozkład prawdopodobieństwa p_ξ na prostej określony zgodnie ze wzorem (143), jak następuje

$$(316) \quad \bigwedge_{B \in \mathcal{B}} p_\xi(B) \stackrel{\text{def}}{=} p\left(\{e: \xi(e) \in B\}\right)$$

Zgodnie ze wzorem (144) dystrybuantą zmiennej losowej ξ nazywamy funkcję

$$(317) \quad \bigwedge_{x \in \mathbb{R}_0} F_{\xi}(x) \stackrel{\text{def}}{=} P_{\xi} [(-\infty; x)] = P(\{e: \xi(e) < x\})$$

Zgodnie z powyższą definicją dystrybuanta zmiennej losowej ma własności (145)–(149) i na mocy twierdzenia § 217 ma co najwyżej przeliczalnie wiele punktów nieciągłości.

Zmienną losową będziemy nazywać dyskretną wtedy i tylko wtedy, gdy jej rozkład prawdopodobieństwa jest dyskretny. Zmienną losową będziemy nazywać ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy jej rozkład prawdopodobieństwa jest ciągły.

Gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej będziemy nazywać gęstość jej rozkładu prawdopodobieństwa.

Przyjmujemy umowę, że dla prostoty zapisu zamiast

$$P(\{e: \alpha(\xi(e))\})$$

gdzie α oznacza pewien warunek nałożony na zmienną losową ξ , będziemy również pisać

$$P(\alpha(\xi))$$

Na przykład, zamiast

$$P(\{e: a < \xi(e) \leq b\})$$

będziemy również pisać

$$P(a < \xi \leq b)$$

Wartością średnią albo wartością oczekiwaną $E\xi$ zmiennej losowej ξ nazywamy zgodnie z definicją (178)

$$(318) \quad E\xi \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \xi \, dP = \int_{\mathbb{R}} \xi(e) \, dP(e)$$

Twierdzenie (A)

Wartość średnia zmiennej losowej jest równa wartości średniej jej rozkładu prawdopodobieństwa, czyli na mocy (179)

$$(319) \quad E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dP_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF_{\xi}(x)$$

przy założeniu istnienia tej wartości średniej.

D] Równość całek (318) i (319) wynika z własności (c53) całek Lebesgue'a, czyli reguły całkowania przez podstawienie, jeśli wziąć

$$\mu = P, \quad Y = \mathcal{R}, \quad T = \mathcal{B}, \quad \nu = P_{\xi}, \quad Z = \xi, \quad g = 1, \quad f(x) = x$$

i zauważyć, że na mocy (316)

$$\bigwedge_{B \in \mathcal{B}} P_{\xi}(B) = \int_{\xi^{-1}(B)} dP(e)$$

Twierdzenie (B)

Jeśli ξ i η są zmiennymi losowymi o rozkładach prawdopodobieństwa odpowiednio P_{ξ} i P_{η} i

$$\eta = h(\xi)$$

gdzie h jest skończoną funkcją borelowską na prostej \mathcal{R} , to

$$E\eta = \int_{\mathcal{X}} \eta dP = \int_{\mathcal{X}} h(\xi) dP = \int_{-\infty}^{+\infty} y dP_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dP_{\xi}(x)$$

przy założeniu istnienia tej wartości średniej.

D] Ponieważ pierwsze dwie równości otrzymujemy z definicji, a trzecią na mocy twierdzenia (A), wystarczy udowodnić równość ostatnią. Wynika ona z własności (c53) całek Lebesgue'a, czyli wzoru na całkowanie przez podstawienie, gdy wziąć

$$X = Y = \mathcal{R}, \quad S = T = \mathcal{B}, \quad \mu = P_{\xi}, \quad \nu = P_{\eta}, \quad Z = h$$

$$g = 1, \quad f(y) = y$$

i zauważyć, że

$$\begin{aligned} \bigwedge_{B \in \mathcal{B}} P_{\eta}(B) &= P(\{e: \eta(e) \in B\}) = P(\{e: h(\xi(e)) \in B\}) = \\ &= P(\{e: \xi(e) \in h^{-1}(B)\}) = P_{\xi}(h^{-1}(B)) = \int_{h^{-1}(B)} dP_{\xi}(x) \end{aligned}$$

Dla zmiennych losowych dyskretnych wzór (319) przyjmuje postać (185), a dla zmiennych losowych ciągłych postać (187). Jak

wiemy z § 234 i § 249, istnieją zmienne losowe, dla których wartość średnia nie istnieje, jak również takie, dla których wartość średnia co prawda istnieje, ale jest nieskończona.

Wartości oczekiwane zmiennych losowych mają na mocy wzorów (188)–(190) jak również na mocy (318) i (319) następujące własności.

$$(320) \quad E(a\xi + b) = aE\xi + b, \text{ gdy istnieje } E\xi, a, b \in \mathbb{R} \vee a, b \in \mathbb{B},$$

$$(321) \quad E(\xi_1 + \dots + \xi_n) = E\xi_1 + \dots + E\xi_n, \text{ gdy istnieje suma } E\xi_1 + \dots + E\xi_n$$

$$(322) \quad E(a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n) = a_1E\xi_1 + \dots + a_nE\xi_n, \text{ gdy istnieje suma } a_1E\xi_1 + \dots + a_nE\xi_n, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

$$(323) \quad E\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}\right) = \frac{E\xi_1 + \dots + E\xi_n}{n}, \text{ gdy istnieje suma } E\xi_1 + \dots + E\xi_n$$

a na mocy własności (c18) całek Lebesgue'a

$$(324) \quad \xi \leq \eta \Rightarrow E\xi \leq E\eta$$

pod warunkiem istnienia wartości średnich $E\xi$ i $E\eta$. W szczególności ze wzoru (324) wynika, że

$$(325) \quad \xi \geq 0 \Rightarrow E\xi \geq 0, \quad \xi \leq 0 \Rightarrow E\xi \leq 0$$

Z własności (c22) całek Lebesgue'a wynika, że gdy istnieje wartość średnia $E\xi$, to

$$(326) \quad |E\xi| \leq E|\xi|$$

Momenty zmiennej losowej ξ definiujemy wzorem

$$(327) \quad m_k \stackrel{\text{def}}{=} E\xi^k = \int_{\mathcal{X}} \xi^k dP, \quad k \in \mathbb{N}$$

momenty centralne zmiennej losowej ξ wzorem

$$(328) \quad \mu_k \stackrel{\text{def}}{=} E(\xi - E\xi)^k = \int_{\mathcal{X}} (\xi - E\xi)^k dP, \quad k \in \mathbb{N}$$

a bezwzględne momenty centralne zmiennej losowej ξ wzorem

$$(329) \quad \mu_{|\kappa|} \stackrel{\text{def}}{=} E |\xi - E\xi|^\kappa = \int_{\mathcal{X}} |\xi - E\xi|^\kappa dP, \quad \kappa \in \mathbb{N}$$

Podobnie jak wartość średnia, momenty, momenty centralne, bezwzględne momenty centralne mogą nie istnieć, jak również mogą przyjmować wartości nieskończone.

Twierdzenie (C)

Momenty, momenty centralne, bezwzględne momenty centralne zmiennej losowej ξ są równe odpowiednim momentom jej rozkładu prawdopodobieństwa, czyli na mocy (191), (195) i (210)

$$\bigwedge_{\kappa \in \mathbb{N}} m_\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\kappa dP_\xi(x), \quad \mu_\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^\kappa dP_\xi(x)$$

$$\mu_{|\kappa|} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{x}|^\kappa dP_\xi(x)$$

gdzie na mocy twierdzenia (A) $\bar{x} = E\xi$.

D] Twierdzenie wynika z własności (c53) całek Lebesgue'a, czyli wzoru na całkowanie przez podstawienie, gdy wziąć

$$\mu = P, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{T} = \mathcal{B}, \quad \nu = P_\xi, \quad \tau = \xi, \quad g = 1$$

i odpowiednio

$$f(x) = x^\kappa, \quad f(x) = (x - \bar{x})^\kappa, \quad f(x) = |x - \bar{x}|^\kappa$$

Na mocy twierdzenia (C) wzór (327) przechodzi w przypadku zmiennej losowej dyskretnej we wzór (192), a w przypadku zmiennej losowej ciągłej we wzór (194). Analogicznie wzór (328) przechodzi w przypadku zmiennej losowej dyskretnej we wzór (196), a w przypadku zmiennej losowej ciągłej we wzór (198).

Między momentami zwykłymi i momentami centralnymi zmiennej losowej zachodzą związki (199), (200), (201), (208), (209).

Wariancją zmiennej losowej nazywamy jej drugi moment centralny μ_2 . Tym samym wariancja zmiennej losowej jest równa wariancji jej rozkładu prawdopodobieństwa.

Zgodnie z (202) standardowym odchyleniem zmiennej losowej nazywamy pierwiastek z jej wariancji, przy założeniu istnienia tej wariancji,

$$(330) \quad D\xi \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mu_2}, \quad \text{skąd} \quad \mu_2 = D^2\xi$$

Na mocy (328) i (320) mamy

$$(331) \quad D^2(a\xi+b) = a^2 D^2\xi, \quad \text{czyli} \quad D(a\xi+b) = |a| D\xi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Kwantylami zmiennej losowej nazywamy kwantyle jej rozkładu prawdopodobieństwa.

Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej ξ nazywamy

$$(332) \quad \varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} E e^{it\xi} = \int_{\mathbb{X}} e^{it\xi} dP$$

Twierdzenie (D)

Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej ξ jest funkcją charakterystyczną rozkładu prawdopodobieństwa P_ξ tej zmiennej losowej, czyli

$$(333) \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dP_\xi(x)$$

D Analogiczny do dowodu twierdzenia (C).

Z twierdzenia (D) wynika, że dla funkcji charakterystycznych zmiennych losowych zachowują prawdziwość twierdzenia (A) i (B) z § 237 oraz własności (fchar1)-(fchar5).

§ 262. Zbieżność ciągu zmiennych losowych według dystrybuant

Zbieżność ciągu zmiennych losowych według dystrybuant określamy jak w § 219, tzn.

$$(334) \quad \xi_n \xrightarrow{\text{dys}} \xi \stackrel{\text{def}}{\iff} F_n \xrightarrow{\text{SI}} F$$

gdzie F, F_1, F_2, \dots są odpowiednio dystrybuantami zmiennych losowych ξ, ξ_1, ξ_2, \dots . Wobec tego zbieżność zmiennych losowych według dystrybuant ma następujące własności.

(§73) Zmienne losowe ξ i η mają wspólną dystrybuantę \wedge

$$\wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \text{zmienne } \xi_n \text{ i } \eta_n \text{ mają wspólną dystrybuantę} \Rightarrow$$