

$$\mu_2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

a

$$\mu_3 = 0, \quad \mu_4 = \frac{(b-a)^4}{80}$$

skąd współczynniki asymetrii i spłaszczenia

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = -\frac{6}{5}$$

Funkcją charakterystyczną jest

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{ixt} dx = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{(b-a)it}$$

Entropia jest równa

$$\mathcal{E} = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log_2 f(x) dx = - \int_a^b \frac{1}{b-a} \log_2 \frac{1}{b-a} dx = \log_2(b-a)$$

§ 246. Rozkład normalny

Rozkład normalny jest bezspornie najważniejszym rozkładem w teorii prawdopodobieństwa, co znalazło swój wyraz już w samej nazwie. Jest to rozkład ciągły o gęstości prawdopodobieństwa

$$(230) \quad f(x) = N(x; a, s) = N(a, s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}$$

gdzie $a, s \in \mathcal{R} \wedge s > 0$.

Gdy $a = 0$ i $s = 1$, tzn.

$$(231) \quad f(x) = N(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

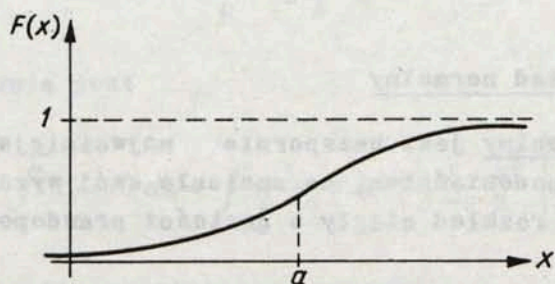
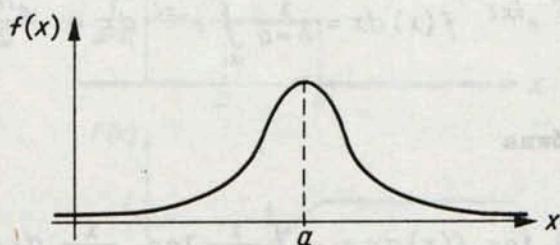
rozkład będziemy nazywać standardowym rozkładem normalnym. Symbolem Φ będziemy oznaczać dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego, tzn.

$$(232) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Rozpowszechnione są tablice wartości funkcji Φ .

Ogólnie dystrybuantą rozkładu normalnego jest

$$(233) \quad F(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-a)^2}{2s^2}} du \stackrel{v=\frac{u-a}{s}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{s}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \Phi\left(\frac{x-a}{s}\right)$$



Wykażemy teraz, że zgodnie z warunkiem $\Phi(\infty) = 1$ jest

$$(234) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$$

W tym celu rozpatrzmy całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \stackrel{(c61)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) dy \stackrel{(c17)}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)^2$$

Całka powyższa istnieje, gdyż funkcja podcałkowa jest nieujemna. Niech teraz

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} g_n(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & \text{gdy } \frac{1}{n^2} < x^2 + y^2 < n^2 \\ 1 & \text{gdy } x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2} \text{ albo } x^2 + y^2 \geq n^2 \end{cases}$$

Mamy $g_1 \geq g_2 \geq \dots$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, więc na mocy własności (c40) całek Lebesgue'a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x, y) dx dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \end{aligned}$$

gdzie

$$B_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, y) : \frac{1}{n^2} < x^2 + y^2 < n^2 \right\}$$

Podstawmy teraz

$$(x, y) = \tau(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} (u \cos v, u \sin v)$$

gdzie $u \geq 0$, $0 \leq v < 2\pi$. Przekształcenie to jest jedno-jednoznaczne na każdym zbiorze B_n i jego jacobian jest równy

$$D = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \neq 0$$

na tym zbiorze ($n = 1, 2, \dots$). Ponieważ

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \tau^{-1}(B_n) = \left\{ (u, v) : (x, y) \in B_n \right\} =$$

$$= \left\{ (u, v) : \frac{1}{n^2} < x^2 + y^2 < n^2 \right\} = \left\{ (u, v) : \frac{1}{n^2} < u^2 < n^2 \right\} =$$

$$= \left\{ (u, v) : \frac{1}{n} < u < n \wedge 0 \leq v < 2\pi \right\}$$

więc na mocy własności (c65) całek Lebesgue'a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} e^{-\frac{u^2}{2}} u du dv =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{n}}^n e^{-\frac{u^2}{2}} u du \right) dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - e^{-\frac{n^2}{2}} \right) dv =$$

$$= 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - e^{-\frac{n^2}{2}} \right) = 2\pi$$

Otrzymaliśmy zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)^2 = 2\pi$$

skąd równość (234).

Obliczmy teraz momenty rozkładu normalnego. Na mocy (194)

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a+sy)^k e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} s^j y^j e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} s^j \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^j e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Otrzymaliśmy zatem wzór

$$(235) \quad m_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} s^j \cdot M_j$$

gdzie przez M_j oznaczyliśmy j -ty moment standardowego rozkładu normalnego. Obliczymy te momenty. Mamy na mocy (234)

$$(i) \quad M_0 = 1$$

a dla $j = 1$

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 y e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad \substack{y=u \\ -y=u} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0 \end{aligned}$$

Ogólnie z uwagi na nieparzystość funkcji podcałkowej mamy

$$(ii) \quad M_j = 0 \quad \text{dla } j \text{ nieparzystych}$$

Funkcja

$$v(y) = y^j e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad j \geq 1$$

ma pochodną

$$v'(y) = e^{-\frac{y^2}{2}} (j y^{j-1} - y^{j+1}) = y^{j-1} e^{-\frac{y^2}{2}} (j - y^2)$$

i dla j parzystego ma skończone minimum w punkcie $y = 0$ i dwa skończone maksima w punktach $y = -\sqrt{j}$ i $y = \sqrt{j}$, a dla j nieparzystego skończone minimum w punkcie $y = -\sqrt{j}$ i skończone maksimum w punkcie $y = \sqrt{j}$. Ponadto

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} v(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} v(y) = 0$$

skąd wynika, że dla każdego $j \geq 1$ funkcja v ma skończone wahanie. Wobec tego na mocy własności (c77) możemy dla $j \geq 2$ całkować przez części jak następuje:

$$M_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^j e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^{j-1} \left(-e^{-\frac{y^2}{2}} \right)' dy =$$

$$= -y^{j-1} e^{-\frac{y^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{j-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^{j-2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = (j-1) M_{j-2}$$

skąd na mocy (i) i (ii)

$$(236) \quad M_j = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \text{ nieparzystych} \\ 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (j-1) = (j-1)!! & \text{dla } j \text{ parzystych} \end{cases}$$

Na mocy (235) otrzymujemy stąd kolejno

$$(237) \quad \begin{aligned} m_1 &= \bar{x} = a \\ m_2 &= a^2 + s^2 \\ m_3 &= a^3 + 3as^2 \\ m_4 &= a^4 + 6a^2s^2 + 3s^4 \end{aligned}$$

Obliczymy teraz momenty centralne rozkładu normalnego. Mamy

$$\mu_k = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx \stackrel{y=\frac{x-a}{s}}{=} \frac{s^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^k e^{-\frac{y^2}{2}} dy = s^k M_k$$

i na mocy (236)

$$(238) \quad \mu_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ s^k (k-1)!! & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}$$

W szczególności wariancja rozkładu normalnego jest równa

$$\mu_2 = s^2$$

Zatem parametry a i s występujące w definicji (230) mają prostą interpretację: a jest wartością średnią, s standardowym odchyleniem rozkładu normalnego.

Wobec powyższego standardowy rozkład normalny jest to rozkład normalny o wartości średniej 0 i standardowym odchyleniu 1.

Na mocy (238) i wzorów definiujących (206) i (207) obliczamy współczynniki asymetrii i spłaszczenia dla rozkładu normalnego. Otrzymujemy

$$\mathcal{J}_1 = 0, \quad \mathcal{J}_2 = 0$$

Znajdujemy teraz wytłumaczenie definicji (207) dla współczynnika spłaszczenia. O ile bowiem dla współczynników asymetrii punktem odniesienia były rozkłady symetryczne względem wartości średniej \bar{x} , dla których jest zawsze $\mathcal{J}_1 = 0$, i wobec tego wartość współczynnika \mathcal{J}_1 informuje o odchyleniu rozkładu od symetrii, o tyle trzeba było stworzyć jakiś punkt odniesienia dla współczynników spłaszczenia. Definicja (207) została tak skonstruowana, aby $\mathcal{J}_2 = 0$ właśnie dla rozkładu normalnego, a w konsekwencji, aby współczynnik \mathcal{J}_2 informował o spłaszczeniu rozkładu w porównaniu do rozkładu normalnego.

Obliczmy teraz funkcję charakterystyczną rozkładu normalnego. Mamy

$$\varphi(t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx$$

i na mocy wzoru (221) z § 237

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{i}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx = \\ &= \frac{ia}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx + \frac{is}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot \frac{x-a}{s^2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx = \\ &= ia \cdot \varphi(t) - \frac{is}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left(e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} \right)' dx \end{aligned}$$

Wykażemy teraz, że funkcja $e^{itx} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}$ ma skończone wahanie, czyli, że funkcje

$$(*) \quad \cos tx \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}, \quad \sin tx \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}$$

mają skończone wahanie na przedziale $\langle -\infty ; +\infty \rangle$. Dla $t = 0$ jest to oczywiste, a dla t i $-t$ wahania są identyczne, więc wystar-

czy rozpatrzyć przypadek $t > 0$. Rozważmy przedziały $I_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle a_k; b_k \rangle$, $k = \dots, -1, 0, +1, \dots$, gdzie dla pierwszej funkcji $a_k = \frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{t}$, $b_k = \frac{2k+1}{2} \frac{\pi}{t}$, a dla drugiej $a_k = k \cdot \frac{\pi}{t}$, $b_k = (k+1) \frac{\pi}{t}$. Niech $k_0 \in \mathbb{Z}$ będzie taką liczbą, że $a \in I_{k_0}$. Wzanie każdej z funkcji (*) na każdym z przedziałów I_{k_0-1} , I_{k_0} , I_{k_0+1} jest mniejsze od 2, a więc wahanie na sumie tych przedziałów mniejsze od 6. Dla $k < k_0-1$ wahanie na przedziale I_k dla każdej z funkcji (*) jest mniejsze niż

$$2 \cdot e^{-\frac{(b_k-a)^2}{2s^2}} < \frac{t}{\pi} \int_{I_{k+1}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx$$

a dla $k > k_0+1$ mniejsze niż

$$2 \cdot e^{-\frac{(a_k-a)^2}{2s^2}} < \frac{t}{\pi} \int_{I_{k-1}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx$$

Zatem wahanie każdej z funkcji (*) na przedziale $\langle -\infty; +\infty \rangle$ jest mniejsze niż

$$6 + \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx \underset{u=\frac{x-a}{s}}{=} 6 + \frac{st}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \stackrel{(234)}{=} 6 + st \sqrt{\frac{2}{\pi}} < \infty$$

Całkując zatem przez części, zgodnie z własnością (c77) całek Lebesgue'a, mamy

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= ia \cdot \varphi(t) - \frac{is}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} \bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{st}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} dx = \\ &= (ia - s^2 t) \varphi(t) \end{aligned}$$

skąd

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = ia - s^2 t$$

czyli

$$(\log \varphi(t))' = \left(iat - \frac{s^2 t^2}{2} \right)'$$

czyli

$$\log \varphi(t) = iat - \frac{s^2 t^2}{2} + \log C, \quad C = \text{const}, \quad C > 0$$

a stąd

$$\varphi(t) = Ce^{iat - \frac{s^2 t^2}{2}}$$

Z warunku $\varphi(0) = 1$ (własność (fchar2)) otrzymujemy $C=1$ i ostatecznie

$$(239) \quad \varphi(t) = e^{iat - \frac{s^2 t^2}{2}}$$

W szczególności funkcja charakterystyczna standardowego rozkładu normalnego ma postać

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Wykorzystując własność (fchar5) funkcji charakterystycznej łatwo można wyprowadzić wzór rekurencyjny na obliczanie momentów (235).

Z łatwością dowodzimy bowiem przez indukcję, że

$$\bigwedge_{k \in \mathcal{N}} \varphi^{(k+1)}(t) = \varphi^{(k)}(t) \cdot (ia - s^2 t) - k s^2 \varphi^{(k-1)}(t)$$

skąd na mocy (fchar5)

$$(240) \quad \bigwedge_{k \in \mathcal{N}} m_{k+1} = a \cdot m_k + k s^2 \cdot m_{k-1}, \quad m_0 = 1, \quad m_1 = a$$

Obliczymy jeszcze entropię rozkładu normalnego

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= - \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} \log_2 \left(\frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}} \right) dx \Big|_{u=\frac{x-a}{s}} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \log_2 \left(\frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \right) du = \end{aligned}$$

$$= \frac{\log_2(s\sqrt{2\pi})}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{\log_2 e}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

i na mocy (234) oraz (239)

$$(241) \quad \mathcal{E} = \log_2 s + \log_2 \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \log_2 e = \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e s^2)$$

Na zakończenie udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie (A)

Ze wszystkich rozkładów ciągłych na prostej o danej wariancji s^2 ($0 < s^2 < \infty$) i skończonej entropii największą entropię ma tylko rozkład normalny.

D] Niech $g(x)$ będzie gęstością prawdopodobieństwa dowolnego rozkładu na prostej o wariancji s^2 . Jest zatem

$$g(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 g(x) dx = s^2 < \infty$$

gdzie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx = a$$

Ponadto istnieje całka

$$(iii) \quad \mathcal{E}_g \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \log_2 g(x) dx, |\mathcal{E}_g| < \infty$$

Niech

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}$$

będzie gęstością prawdopodobieństwa rozkładu normalnego o tej samej wartości średniej a i wariancji s^2 .

Rozpatrzmy funkcję

$$\tau(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} - [(1-\lambda)f(x) + \lambda g(x)] \log_2 [(1-\lambda)f(x) + \lambda g(x)]$$

Ponieważ $f > 0$ i $g \geq 0$, więc dla $0 \leq \lambda \leq 1$ jest

$$(1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x) \geq 0$$

i przyjmując, że $0 \log_2 0 = 0$, widzimy, że funkcja τ jest określona dla $0 \leq \lambda \leq 1$ i $x \in \mathcal{R}$. Wykażemy teraz, że funkcja τ jest całkowalna w przedziale $(-\infty; +\infty)$. W tym celu wystarczy wykazać, że są całkowalne funkcje

$$\begin{aligned} \tau_1(x, \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} -f(x) \log_2 [(1-\lambda)f(x) + \lambda g(x)] = \\ &= -f(x) \log_2 [f(x) + \lambda(g(x) - f(x))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2(x, \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} -g(x) \log_2 [(1-\lambda)f(x) + \lambda g(x)] = \\ &= -g(x) \log_2 [g(x) + (1-\lambda)(f(x) - g(x))] \end{aligned}$$

Mamy

$$\tau_1(x, \lambda) = -f(x) \log_2 f(x) - f(x) \log_2 \left[1 + \lambda \frac{g(x) - f(x)}{f(x)} \right]$$

Funkcja $-f(x) \log_2 f(x)$ jest całkowalna na prostej, co wykazaliśmy obliczając entropię rozkładu normalnego. Poza tym mamy

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad \left| f(x) \log_2 \left[1 + \lambda \frac{g(x) - f(x)}{f(x)} \right] \right| &\leq \log_2 e \cdot f(x) \cdot \lambda \frac{|g(x) - f(x)|}{f(x)} < \\ &\leq 2\lambda (g(x) + f(x)) \end{aligned}$$

Zatem funkcja τ_1 jest całkowalna na całej prostej. Niech teraz

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x : g(x) = 0\}$$

Funkcja τ_2 jest oczywiście całkowalna na zbiorze A , a na zbiorze $\mathcal{R} - A$ mamy

$$\tau_2(x, \lambda) = -g(x) \log_2 g(x) - g(x) \log_2 \left[1 + (1-\lambda) \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \right]$$

Funkcja $-g(x) \log_2 g(x)$ jest całkowalna na zbiorze $\mathcal{K} - A$ na mocy (iii). Ponadto

$$\left| g(x) \log_2 \left[1 + (1-\lambda) \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} \right] \right| \leq g(x) \log_2 e \cdot (1-\lambda) \frac{|f(x)-g(x)|}{g(x)} \leq 2(1-\lambda)(f(x) + g(x))$$

skąd wynika całkowalność funkcji τ_2 , a więc i całkowalność funkcji τ na całej prostej.

Mamy dalej

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{\substack{\lambda, \lambda_0 \in (0;1) \\ \lambda \neq \lambda_0}} \left| \frac{\tau(x, \lambda) - \tau(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right| = \\ & = \left| \frac{(1-\lambda)\tau_1(x, \lambda) + \lambda\tau_2(x, \lambda) - (1-\lambda_0)\tau_1(x, \lambda_0) - \lambda_0\tau_2(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right| = \\ & = \left| \frac{(1-\lambda_0)(\tau_1(x, \lambda) - \tau_1(x, \lambda_0)) - (\lambda - \lambda_0)\tau_1(x, \lambda) + \lambda_0(\tau_2(x, \lambda) - \tau_2(x, \lambda_0)) + (\lambda - \lambda_0)\tau_2(x, \lambda)}{\lambda - \lambda_0} \right| \leq \\ & \leq (1 - \lambda_0) \left| \frac{\tau_1(x, \lambda) - \tau_1(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right| + \lambda_0 \left| \frac{\tau_2(x, \lambda) - \tau_2(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right| + \\ & + \left| \tau_1(x, \lambda) \right| + \left| \tau_2(x, \lambda) \right| \end{aligned}$$

Ale

$$\begin{aligned} & (1-\lambda_0) \left| \frac{\tau_1(x, \lambda) - \tau_1(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right| = \\ & = (1-\lambda_0)f(x) \left| \frac{\log_2 \left[1 + \lambda \frac{g(x)-f(x)}{f(x)} \right] - \log_2 \left[1 + \lambda_0 \frac{g(x)-f(x)}{f(x)} \right]}{\lambda - \lambda_0} \right| = \\ & = (1-\lambda_0)f(x) \left| \frac{\log_2 \frac{1 + \lambda \frac{g(x)-f(x)}{f(x)}}{1 + \lambda_0 \frac{g(x)-f(x)}{f(x)}}}{\lambda - \lambda_0} \right| = \end{aligned}$$

$$= (1-\lambda_0)f(x) \left| \frac{\log_2 \left(1 + \frac{(\lambda-\lambda_0)(g(x)-f(x))}{(1-\lambda_0)f(x)+\lambda_0g(x)} \right)}{\lambda-\lambda_0} \right| \ll$$

$$\ll 2(1-\lambda_0)f(x) \left| \frac{g(x)-f(x)}{(1-\lambda_0)f(x)+\lambda_0g(x)} \right| \ll$$

$$\ll 2(1-\lambda_0)f(x) \left| \frac{g(x)-f(x)}{(1-\lambda_0)f(x)} \right| \ll 2(f(x)+g(x))$$

Następnie dla $x \in A$

$$\lambda_0 \left| \frac{\tau_2(x, \lambda) - \tau_2(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right| = 0$$

a dla $x \in \mathcal{K} - A$

$$\begin{aligned} \lambda_0 \left| \frac{\tau_2(x, \lambda) - \tau_2(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right| &= \lambda_0 g(x) \left| \frac{\log_2 \frac{1 + (1-\lambda) \frac{f(x)-g(x)}{g(x)}}{1 + (1-\lambda_0) \frac{f(x)-g(x)}{g(x)}}}{\lambda - \lambda_0} \right| = \\ &= \lambda_0 g(x) \left| \frac{\log_2 \left(1 - \frac{(\lambda-\lambda_0)(f(x)-g(x))}{(1-\lambda_0)f(x)+\lambda_0g(x)} \right)}{\lambda - \lambda_0} \right| \ll \\ &\ll 2\lambda_0 g(x) \left| \frac{f(x)-g(x)}{(1-\lambda_0)f(x)+\lambda_0g(x)} \right| \ll 2\lambda_0 g(x) \left| \frac{f(x)-g(x)}{\lambda_0g(x)} \right| \ll \\ &\ll 2(f(x)+g(x)) \end{aligned}$$

a wreszcie na mocy (iv)

$$\begin{aligned} |\tau_1(x, \lambda)| &\ll |f(x) \log_2 f(x)| + \left| f(x) \log_2 \left[1 + \lambda \frac{g(x)-f(x)}{f(x)} \right] \right| \ll \\ &\ll |f(x) \log_2 f(x)| + 2(f(x)+g(x)) \end{aligned}$$

i analogicznie

$$|\tau_2(x, \lambda)| \ll |g(x) \log_2 g(x)| + 2(f(x)+g(x))$$

Ostatecznie otrzymaliśmy

$$\bigwedge_{\substack{\lambda, \lambda_0 \in (0,1) \\ \lambda \neq \lambda_0}} \left| \frac{\tau(x, \lambda) - \tau(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right| < |f(x) \log_2 f(x)| + |g(x) \log_2 g(x)| +$$

$$+ 8f(x) + 8g(x)$$

Wobec tego na mocy własności (c59) dla funkcji

$$h(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(x, \lambda) dx$$

istnieje w przedziale $(0;1)$ pochodna

$$h'(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau'_\lambda(x, \lambda) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - g(x)] \log_2 [(1-\lambda)f(x) + \lambda g(x)] dx +$$

$$+ \log_2 e \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - g(x)] dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - g(x)] \log_2 [(1-\lambda)f(x) + \lambda g(x)] dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - g(x)] \log_2 [f(x) + \lambda(g(x) - f(x))] dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \log_2 f(x) dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - g(x)] \log_2 \left(1 + \lambda \frac{g(x) - f(x)}{f(x)} \right) dx$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}
& - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \log_2 f(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left[-\log_2 s - \log_2 \sqrt{2\pi} - \right. \\
& \left. - \log_2 e \cdot \frac{(x-a)^2}{2s^2} \right] dx = \log_2 s + \log_2 \sqrt{2\pi} + \frac{\log_2 e}{2s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 g(x) dx = \\
& = \log_2 s + \log_2 \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \log_2 e
\end{aligned}$$

i wobec tego na mocy (241)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \log_2 f(x) dx = 0$$

więc

$$h'(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - g(x)] \log_2 \left(1 + \lambda \frac{g(x) - f(x)}{f(x)} \right) dx$$

Ponieważ dla $0 < \lambda < 1$

$$f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow \log_2 \left(1 + \lambda \frac{g(x) - f(x)}{f(x)} \right) < 0$$

$$f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow \log_2 \left(1 + \lambda \frac{g(x) - f(x)}{f(x)} \right) > 0$$

więc

$$h'(\lambda) < 0, \quad \text{gdy } f \neq g$$

Oznacza to, że funkcja h maleje w przedziale $0 < \lambda < 1$. Ponieważ

$$\begin{aligned}
& |\tau(x, \lambda)| \leq |\tau_1(x, \lambda)| + |\tau_2(x, \lambda)| \leq |f(x) \log_2 f(x)| + \\
& + |g(x) \log_2 g(x)| + 4f(x) + 4g(x)
\end{aligned}$$

oraz

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tau(x, \lambda) = -f(x) \log_2 f(x)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \tau(x, \lambda) = -g(x) \log_2 g(x)$$

więc na mocy własności (c47) całek Lebesgue'a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} h(\lambda) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x) dx = \mathcal{E}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} h(\lambda) = - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \log_2 g(x) dx = \mathcal{E}_g$$

i wobec powyższego dla $g \neq f$ jest

$$\mathcal{E} > \mathcal{E}_g$$

co było do dowiedzenia.

§ 247. Rozkład gamma

Rozkładem gamma nazywamy rozkład ciągły o gęstości prawdopodobieństwa

$$(242) \quad f(x) = \gamma(x; b, r) = \gamma(b, r) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{b^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-bx} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

gdzie $b, r \in \mathcal{R} \wedge b, r > 0$ a $\Gamma(r)$ jest tzw. funkcją gamma Eulera

$$(243) \quad \Gamma(r) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx, \quad r > 0.$$

Zanim przejdziemy do omawiania rozkładu gamma, wyprowadzimy kilka podstawowych własności funkcji Γ . Mamy

$$(244) \quad \Gamma(1) = 1$$

ponieważ

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1$$

Dalej

$$(245) \quad \Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$$

ponieważ

$$\Gamma(r+1) = \int_0^{\infty} x^r e^{-x} dx = -x^r e^{-x} \Big|_0^{\infty} + r \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx = r \Gamma(r)$$

Całkowaliśmy tu przez części zgodnie z własnością (c77) całek Lebesgue'a, ponieważ funkcja $x^r e^{-x}$ ma wahanie skończone w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$, gdyż ma jedyne maksimum w punkcie $x = r$ i z uwagi na to, że $0^r \cdot e^{-0} = 0$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} x^r e^{-x} = 0$, wahanie jest równe $2^r e^{-r} < \infty$.

Ze wzorów (244) i (245) wynika, że

$$(246) \quad \bigwedge_{n \in \mathcal{N}} \Gamma(n) = (n-1)!$$

Funkcja Γ jest zatem uogólnieniem funkcji $n!$ na wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie.

Wykażemy jeszcze, że

$$(247) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Istotnie mamy

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \stackrel{u=\sqrt{2}x}{=} \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \stackrel{(234)}{=} \sqrt{\pi}$$

Ze wzorów (245), (246) i (247) wynika, że

$$(248) \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} \left(\frac{n}{2} - 1\right)! & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ \frac{(n-1)!}{2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!} \sqrt{\pi} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

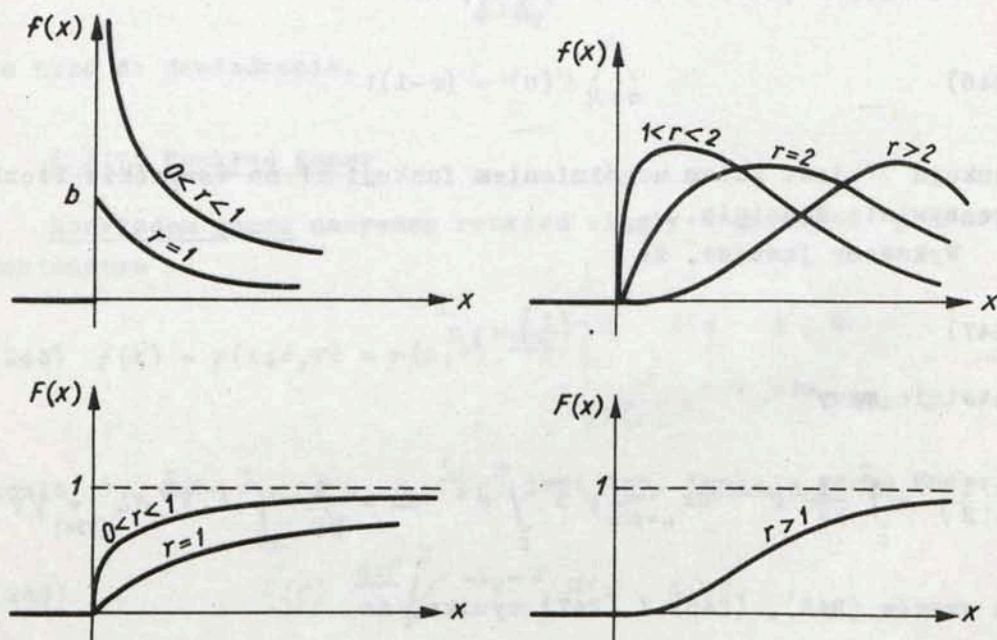
ponieważ dla $n \geq 3$ nieparzystych jest na mocy (245)

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) &= \frac{n-2}{2} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) = \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-4}{2} \Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right) = \dots = \\ &= \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-4}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot \dots \cdot 1} \sqrt{\pi} = \frac{(n-1)!}{2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Wracamy do omawiania rozkładu gamma. Dystrybuantą tego rozkładu jest

$$(249) \quad F(x; b, r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{b^r}{\Gamma(r)} \int_0^x u^{r-1} e^{-bu} du & \text{dla } x > 0 \end{cases} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{bx} v^{r-1} e^{-v} dv = F(bx; 1, r)$$

Wykresy gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty dla rozkładu gamma zależą głównie od wartości parametru r :



Obliczmy teraz funkcję charakterystyczną rozkładu gamma. Z definicji mamy

$$\varphi(t) = \frac{b^r}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} e^{itx} x^{r-1} e^{-bx} dx$$

i na mocy wzoru (221) z § 237

$$\varphi'(t) = \frac{ib^r}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} e^{itx} x^r e^{-bx} dx = - \frac{ib^r}{(b-it)\Gamma(r)} \int_0^{\infty} x^r e^{-(b-it)x} dx$$

Wykazujemy analogicznie, jak to uczyniliśmy przy wyprowadzaniu funkcji charakterystycznej dla rozkładu normalnego, że funkcja $x^r e^{-(b-it)x}$ ma skończone wahanie na przedziale $\langle 0; \infty \rangle$. Całkując przez części, zgodnie z własnością (c77), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= - \frac{ib^r}{(b-it)\Gamma(r)} x^r e^{-(b-it)x} \Big|_0^{+\infty} + \\ &+ \frac{ri \cdot b^r}{(b-it)\Gamma(r)} \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-(b-it)x} dx = \frac{ri}{b-it} \varphi(t) \end{aligned}$$

skąd

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{ri}{b-it}$$

czyli

$$(\log \varphi(t))' = (-r \log(b-it))'$$

czyli

$$\log \varphi(t) = -r \log(b-it) + \log C, \quad C = \text{const}, \quad C > 0$$

Zatem

$$\varphi(t) = \frac{C}{(b-it)^r}$$

Z warunku $\varphi(0) = 1$ (własność (fchar2)) otrzymujemy $C = b^r$ i stąd

$$(250) \quad \varphi(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{b}\right)^r}$$

Wykorzystując własność (fchar5) obliczymy teraz momenty rozkładu gamma. Z łatwością dowodzimy przez indukcję

$$\bigwedge_{k \in \mathcal{N}} \varphi^{(k)}(t) = \left(\frac{i}{b}\right)^k r(r+1)\dots(r+k-1) \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{b}\right)^{r+k}}$$

skąd

$$(251) \quad \bigwedge_{k \in \mathcal{N}} m_k = \frac{r(r+1)\dots(r+k-1)}{b^k} = \frac{\Gamma(r+k)}{b^k \cdot \Gamma(r)}$$

Mamy w szczególności

$$(252) \quad m_1 = \bar{x} = \frac{r}{b}$$

Momenty centralne liczymy ze wzoru (199) z § 235. Otrzymujemy w szczególności

$$\mu_2 = \frac{r(r+1)}{b^2} - \frac{r^2}{b^2} = \frac{r}{b^2}$$

$$\mu_3 = \frac{r(r+1)(r+2)}{b^3} - 3 \frac{r}{b} \cdot \frac{r(r+1)}{b^2} + 2 \frac{r^3}{b^3} = \frac{2r}{b^3}$$

$$\mu_4 = \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{b^4} - 4 \frac{r}{b} \cdot \frac{r(r+1)(r+2)}{b^3} + 6 \frac{r^2}{b^2} \cdot \frac{r(r+1)}{b^2} -$$

$$- 3 \frac{r^4}{b^4} = \frac{3r(r+2)}{b^4}$$

Wariancja rozkładu gamma jest zatem równa

$$(253) \quad \mu_2 = \frac{r}{b^2}$$

a na mocy (206) i (207) współczynniki asymetrii γ_1 i spłaszczenia γ_2

$$(254) \quad \gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{r}}, \quad \gamma_2 = \frac{6}{r}$$

Obliczymy jeszcze entropię rozkładu gamma. Na mocy definicji (226)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & - \int_0^{\infty} \frac{b^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-bx} (r \log_2 b - \log_2 \Gamma(r) + (r-1) \log_2 x - \\ & - bx \log_2 e) dx \stackrel{bx=u}{=} - \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} u^{r-1} e^{-u} (\log_2 b - \log_2 \Gamma(r) + \\ & + (r-1) \log_2 u - u \log_2 e) du = - \frac{\log_2 b - \log_2 \Gamma(r)}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} u^{r-1} e^{-u} du - \\ & - \frac{r-1}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} u^{r-1} \log_2 u \cdot e^{-u} du + \frac{\log_2 e}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} u^r e^{-u} du \end{aligned}$$

Na mocy (243) i (245) otrzymujemy

$$\mathcal{E} = r \cdot \log_2 e + \log_2 \Gamma(r) - \log_2 b - \frac{(r-1) \log_2 e}{\Gamma(r)} \int_0^\infty u^{r-1} \log_e u \cdot e^{-u} du$$

i na mocy własności (c59) całek Lebesgue'a

$$(255) \quad \mathcal{E} = \log_2 \left(\frac{1}{b} e^r \Gamma(r) \right) - (r-1) \log_2 e \cdot \frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)}$$

§ 248. Rozkład χ^2

Rozkładem χ^2 nazywamy szczególny przypadek rozkładu gamma, gdy

$$b = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

gdzie n nazywamy liczbą stopni swobody rozkładu χ^2 . Na mocy (242) gęstość prawdopodobieństwa rozkładu χ^2 wyraża się wzorem

$$(256) \quad f(x) = \chi_{[n]}^2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

a $\Gamma(\frac{n}{2})$ dane jest wzorem (248).

Na mocy (250) funkcja charakterystyczna rozkładu χ^2 ma postać

$$(257) \quad \varphi(t) = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}}$$

Momenty rozkładu χ^2 na mocy (251) wyrażają się wzorem

$$(258) \quad m_k = \frac{\Gamma(\frac{n+2k}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot 2^k$$

W szczególności wartością średnią jest na mocy (252)

$$(259) \quad m_1 = \bar{x} = n$$