

VII. ROZKŁADY PRAWDOPODOBIEŃSTWA NA PROSTEJ

§ 231. Wiadomości wstępne

Rozkładem prawdopodobieństwa na prostej będziemy nazywać każdy rozkład prawdopodobieństwa P w przestrzeni probabilistycznej $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, P)$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na prostej.

Rozkładom prawdopodobieństwa na prostej w sposób wzajemnie jednoznaczny odpowiadają dystrybuanty jednowymiarowe, mające zgodnie z § 216 własności (145)–(149). Na mocy wzoru (65) z § 137 mamy

$$(166) \quad \bigwedge_{x \in \mathfrak{R}_0} F(x) = P[\langle -\infty; x \rangle] = \int_{-\infty}^x dP(u) = \int_{-\infty}^x dF(u)$$

W szczególności mamy zawsze

$$(167) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dP(x) = P(\mathfrak{X}) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x)$$

Dla rozkładów prawdopodobieństwa P na prostej są prawdziwe wzory (76)–(85) z § 138.

Będą nas interesować przede wszystkim rozkłady prawdopodobieństwa dyskretne i ciągłe, które zdefiniujemy i omówimy w paragrafach następnych. Nie wyczerpują one klasy wszystkich możliwych rozkładów prawdopodobieństwa na prostej, ale w zastosowaniach odgrywają dominującą rolę.

§ 232. Rozkłady dyskretne prawdopodobieństwa na prostej

Rozkładem dyskretnym prawdopodobieństwa P na prostej, albo krócej rozkładem dyskretnym P , będziemy nazywać taki rozkład prawdopodobieństwa P na prostej, dla którego istnieje przestrzeń probabilistyczna co najwyżej przeliczalna (X, \mathcal{S}, μ) , gdzie $X \subset \mathfrak{R}$, taka, że

$$(168) \quad \bigwedge_{A \in \mathcal{B}} p(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(A \cap X)$$

Jak wiemy z § 135, \mathcal{S} jest klasą wszystkich podzbiorów przestrzeni X , które z definicji są co najwyżej przeliczalnymi sumami zbiorów jednoelementowych $\{x\}$, gdzie $x \in X$ i tym samym $x \in \mathcal{R}$. Zatem $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ i $X \in \mathcal{B}$, a z drugiej strony $A \cap X \subset X$, skąd $A \cap X \in \mathcal{S}$.

Wykażemy najpierw, że wzór (168) definiuje rozkład prawdopodobieństwa, czyli miarę unormowaną na σ -ciele \mathcal{B} . Warunki (v1) i (v2) miary unormowanej są dla funkcji p określonej wzorem (168) oczywiste. Mamy dalej

$$p(\mathcal{R}) = \mu(\mathcal{R} \cap X) = \mu(X) = 1$$

a więc jest spełniony warunek (v3). Mamy wreszcie dla $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} p\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap X\right) = \mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cap X)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap X) = \sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) \end{aligned}$$

i jest tym samym spełniony warunek (v4). Zatem, istotnie, wzór (168) określa rozkład prawdopodobieństwa na prostej.

Niech

$$X = \{x_1, x_2, \dots\}, \quad x_1, x_2, \dots \in \mathcal{R}, \quad x_i \neq x_j \quad \text{dla } i \neq j$$

i niech

$$(169) \quad \bigwedge_{k \in \mathcal{R}} p_k \stackrel{\text{def}}{=} \mu(x_k), \quad p_1 + p_2 + \dots = 1$$

Na mocy (168) mamy

$$(170) \quad p(A) = \sum_{\substack{k \in \mathcal{R} \\ x_k \in A}} p_k, \quad p(\mathcal{R}) = \sum_{k \in \mathcal{R}} p_k = 1$$

W szczególności na mocy (166) dla rozkładu dyskretnego p jest

$$(171) \quad \bigwedge_{x \in \mathbb{R}_0} F(x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ x_k < x}} p_k$$

Wynika stąd, że dystrybuanta rozkładu dyskretnego jest funkcją skokową i na mocy wzoru (85) z § 138 jest

$$(172) \quad \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} p_k = F(x_{k+}) - F(x_k)$$

Gdy przestrzeń X jest skończona, rozkład P będziemy nazywać rozkładem dyskretnym skończonym. Gdy przestrzeń X jest przeliczalna, rozkład P będziemy nazywać rozkładem dyskretnym przeliczalnym.

§ 233. Rozkłady ciągłe prawdopodobieństwa na prostej

Rozkład prawdopodobieństwa P na prostej będziemy nazywać ciągłym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja f mierzalna ω i nieujemna taka, że

$$(173) \quad \bigwedge_{A \in \mathcal{B}} P(A) = \int_A f(x) dx$$

Jak poprzednio, \mathcal{B} oznacza klasę zbiorów borelowskich na prostej, a ω miarę Lebesgue'a na prostej.

Na mocy własności (c54), gdzie przyjmujemy $X=Y=\mathbb{R}$, $S=T=\mathcal{B}$, $\mu=\omega$ i $\tau(x)=x$, każda funkcja P zdefiniowana wzorem (173), gdzie f jest funkcją mierzalną ω , nieujemną, taką, że

$$(174) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

jest rozkładem prawdopodobieństwa na prostej.

Funkcję f , mierzalną ω i nieujemną, spełniającą warunki (173) i (174), nazywamy gęstością prawdopodobieństwa rozkładu P .

Rozkład prawdopodobieństwa P jest zatem ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dla niego gęstość prawdopodobieństwa.

Twierdzenie A

Rozkład prawdopodobieństwa ρ o dystrybuancie F jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja f mierzalna ω i nieujemna taka, że

$$(175) \quad \bigwedge_{x \in \mathbb{R}_0} F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

D] Gdy rozkład ρ jest ciągły, to dla $A = \langle -\infty; x \rangle$ na mocy (166) i (173) otrzymujemy (175). Jeśli - odwrotnie - istnieje taka funkcja f mierzalna ω i nieujemna, że zachodzi (175), to wprowadźmy funkcję

$$(*) \quad \bigwedge_{A \in \mathcal{B}} \nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f(x) dx$$

Na mocy (175) jest spełniony warunek (174), a na mocy własności (c54) ν jest miarą unormowaną na prostej. Ze wzoru (175) wynika, że F jest dystrybuantą miary ν , a z twierdzenia § 115, że $\nu = \rho$. Wobec tego wzór (*) jest równoważny (173) i rozkład ρ jest ciągły. Dowód twierdzenia (A) został zakończony.

Na mocy własności (c72) z § 228

$$(176) \quad F'(x) = f(x) \quad \text{w każdym punkcie ciągłości funkcji } f$$

Na mocy (175) i własności (c68) dystrybuanta rozkładu ciągłego jest zawsze funkcją bezwzględnie ciągłą, a więc na mocy twierdzenia (B) z § 180 - jednostajnie ciągłą na całej prostej.

Twierdzenie (B)

Jeśli rozkład ciągły ρ ma dwie gęstości prawdopodobieństwa f i g , to $f \stackrel{\text{pr. w}}{=} g$.

D] Niech

$$A_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{x: f(x) > g(x)\}, \quad A_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x: f(x) < g(x)\}$$

$$A_3 \stackrel{\text{def}}{=} \{x: f(x) = g(x)\}$$

Na mocy twierdzenia § 196 zbiory A_1, A_2, A_3 są mierzalne. Mamy

$$\rho(A_1) = \int_{A_1} f(x) dx = \int_{A_1} g(x) dx \Rightarrow \int_{A_1} (f(x) - g(x)) dx =$$

$$= 0 \xRightarrow{(c13)} \omega(A_1) = 0$$

Analogicznie otrzymujemy $\omega(A_2) = 0$, a następnie $\omega(\mathbb{R} - A_3) = \omega(A_1 + A_2) = \omega(A_1) + \omega(A_2) = 0$, skąd wynika, że $f \stackrel{\text{pr.w}}{=} g$, co było do dowiedzenia.

Jeśli rozkład P jest ciągły, to

$$(177) \quad \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} P(\{x\}) = 0$$

ponieważ dla $A = \{x\}$ jest $\omega(A) = 0$ i na mocy własności (c1)

$$\rho(A) = \int_A f(x) dx = \int_A f(x) d\omega(x) = 0$$

Rozkłady ciągłe definiuje się najczęściej przez podanie ich gęstości prawdopodobieństwa.

§ 234. Wartość średnia

Wartością średnią funkcji h , rzeczywistej lub zespolonej, zmiennej rzeczywistej, mierzalnej ρ , ze względu na rozkład prawdopodobieństwa ρ na prostej, będziemy nazywać liczbę

$$(178) \quad \bar{h} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) d\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF(x)$$

gdzie F jest dystrybuantą rozkładu ρ .

Wartość średnia funkcji h nie zawsze istnieje, a jeśli istnieje, nie zawsze jest skończona.

W szczególności wartością średnią rozkładu prawdopodobieństwa ρ na prostej będziemy nazywać liczbę \bar{x} określoną wzorem

$$(179) \quad \bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x d\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

Liczba \bar{x} nie zawsze istnieje, a jeśli istnieje, nie zawsze jest skończona.

Pojęcie wartości średniej (178) jest naturalnym uogólnieniem pojęcia średniej wartości funkcji w przedziale $\langle a; b \rangle$ dla całek Riemanna

$$\bar{h} = \frac{1}{b-a} \int_a^b h(x) dx \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Otóż naturalnym uogólnieniem powyższego pojęcia na całki Lebesgue'a jest

$$\bar{h}_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu(A)} \int_A h d\mu$$

W przypadku $A = \mathbb{R}$, ze względu na to, że $P(\mathbb{R}) = 1$, wzór ten przechodzi dla $\mu = P$ we wzór (178).

Wykażemy, że dla rozkładów dyskretnych, dla których $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$, $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$, i dla których wzorem (169) są określone prawdopodobieństwa p_1, p_2, \dots takie, że $p_1 + p_2 + \dots = 1$, wzór (178) przyjmuje postać

$$(180) \quad \bar{h} = \sum_{k=1}^m p_k \cdot h(x_k), \quad m \in \mathbb{N} \vee m = \infty,$$

o ile w przypadku funkcji rzeczywistej h jest spełniony warunek

$$(181) \quad \sum_{k \in U} p_k \cdot h(x_k) < \infty \vee \sum_{k \in V} p_k \cdot h(x_k) > -\infty$$

gdzie

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{k : k \in \mathbb{N} \wedge k \leq m \wedge h(x_k) > 0\},$$

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{k : k \in \mathbb{N} \wedge k \leq m \wedge h(x_k) < 0\}$$

a w przypadku funkcji zespolonej $h = r + iu$, gdzie r i u są funkcjami rzeczywistymi, warunki

$$(182) \quad \sum_{k \in U_r} p_k \cdot r(x_k) < \infty \vee \sum_{k \in V_r} p_k \cdot r(x_k) > -\infty$$

$$(182) \quad \sum_{k \in U_u} p_k \cdot u(x_k) < \infty \vee \sum_{k \in V_u} p_k \cdot u(x_k) > -\infty$$

gdzie

$$U_r \stackrel{\text{def}}{=} \{k: k \in \mathfrak{R} \wedge k \leq m \wedge r(x_k) > 0\},$$

$$V_r \stackrel{\text{def}}{=} \{k: k \in \mathfrak{R} \wedge k \leq m \wedge r(x_k) < 0\}$$

$$U_u \stackrel{\text{def}}{=} \{k: k \in \mathfrak{R} \wedge k \leq m \wedge u(x_k) > 0\},$$

$$V_u \stackrel{\text{def}}{=} \{k: k \in \mathfrak{R} \wedge k \leq m \wedge u(x_k) < 0\}$$

Istotnie, na mocy (178) mamy

$$\bar{h} = \int_{\mathfrak{X}} h dP + \int_{\mathfrak{R}-\mathfrak{X}} h dP$$

a ponieważ na mocy (170) $P(\mathfrak{R}-\mathfrak{X}) = 0$, więc na mocy własności (c1)

$$\bar{h} = \int_{\mathfrak{X}} h dP$$

Przyjmując

$$A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}, \dots$$

mamy

$$\bar{h} \stackrel{\chi}{=} \sum_{k=1}^m h(x_k) \chi_{A_k}, \quad m \in \mathfrak{R} \vee m = \infty$$

a ponieważ na mocy (170)

$$P(A_k) = p_k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots$$

więc na mocy założeń (181) i (182) i własności (c23) otrzymujemy wzór (180).

Zauważmy jeszcze, że w przypadku funkcji rzeczywistej h warunek (181), a na mocy nierówności (ii) z § 230 w przypadku funkcji zespolonej $h = r + iu$ warunki (182) są spełnione, gdy

$$(183) \quad \sum_{k=1}^m p_k |h(x_k)| < \infty$$

Warunek (183) jest zatem wystarczający na to, by miała miejsce równość (180).

Wykażemy teraz, że dla rozkładów ciągłych ρ o gęstości prawdopodobieństwa f wzór (178) przyjmuje postać

$$(184) \quad \bar{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) dx$$

przy założeniu istnienia wartości średniej \bar{h} , tzn. istnienia całki (178).

Wzór powyższy wynika bezpośrednio z twierdzenia o podstawianiu, tzn. własności (c53), gdzie należy przyjąć $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \mathcal{T} = \mathcal{B}$, $\mu = \omega$, gdzie ω jest miarą Lebesgue'a na prostej, $\nu = \rho$, $g = f$ i $\tau(x) = x$.

Wartość średnia rozkładu dyskretnego na mocy (179) i (180) wyraża się wzorem

$$(185) \quad \bar{x} = \sum_{k=1}^m p_k x_k, \quad m \in \mathbb{N} \vee m = \infty$$

z tym, że w przypadku $m = \infty$ ma być spełniony warunek

$$(186) \quad \sum_{k \in U} p_k x_k < \infty \vee \sum_{k \in V} p_k x_k > -\infty$$

gdzie

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{k: k \in \mathbb{N} \wedge x_k > 0\}, \quad V \stackrel{\text{def}}{=} \{k: k \in \mathbb{N} \wedge x_k < 0\}$$

Wartość średnia rozkładu ciągłego na mocy (184) wyraża się wzorem

$$(187) \quad \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

przy założeniu istnienia tej całki.

Z definicji (178) wynika na podstawie odpowiednich własności całek Lebesgue'a

$$(188) \quad \overline{a\bar{x} + b} = a\bar{x} + b, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{albo} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$$(189) \quad \overline{h_1 + \dots + h_m} = \bar{h}_1 + \dots + \bar{h}_m,$$

$$m \in \mathbb{N} \wedge \bigwedge_{k \in \{1, \dots, m\}} |\bar{h}_k| < \infty$$

$$(190) \quad \overline{a_1 h_1 + \dots + a_m h_m} = a_1 \bar{h}_1 + \dots + a_m \bar{h}_m,$$

$$m \in \mathbb{N}, \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$$

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, m\}} |\bar{h}_k| < \infty$$

§ 235. Momenty

k -tym momentem zwykłym rozkładu prawdopodobieństwa P na prostej albo po prostu k -tym momentem rozkładu P nazywamy wartość średnią funkcji x^k , gdzie $k \in \mathbb{N}$, względem tego rozkładu tzn. liczbę

$$(191) \quad m_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dP(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x), \quad k \in \mathbb{N},$$

gdzie F jest dystrybuantą rozkładu P , przy założeniu, że taka liczba istnieje.

Z powyższej definicji wynika m. in., że

$$\bar{x} = m_1$$

jest pierwszym momentem danego rozkładu P .

W przypadku rozkładu dyskretnego mamy na mocy (180)

$$(192) \quad m_k = \sum_{j=1}^m p_j x_j^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N} \vee m = \infty$$

z założeniem, które dla k parzystego jest zawsze spełnione, że w przypadku $m = \infty$ jest

$$(193) \quad \sum_{j \in U} p_j x_j^k < \infty \vee \sum_{j \in V} p_j x_j^k > -\infty$$

gdzie

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{j: j \in \mathfrak{N} \wedge x_j^k > 0\}, \quad V \stackrel{\text{def}}{=} \{j: j \in \mathfrak{N} \wedge x_j^k < 0\}$$

W przypadku rozkładu ciągłego P mamy na mocy (184)

$$(194) \quad m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, \quad k \in \mathfrak{N}$$

przy założeniu, że taka całka istnieje. Założenie to dla k parzystego jest zawsze spełnione.

k -tym momentem centralnym rozkładu prawdopodobieństwa P na prostej albo po prostu k -tym momentem centralnym rozkładu P nazywamy wartość średnią funkcji $(x - \bar{x})^k$, gdzie $k \in \mathfrak{N}$ a \bar{x} jest wartością średnią rozkładu P , tzn. liczbę

$$(195) \quad \mu_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^k dP(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^k dF(x)$$

przy założeniu, że taka liczba istnieje, co jest uwarunkowane m. in. istnieniem wartości średniej \bar{x} .

W przypadku rozkładu dyskretnego P otrzymujemy na mocy (180) wzór

$$(196) \quad \mu_k = \sum_{j=1}^m p_j (x_j - \bar{x})^k, \quad k \in \mathfrak{N}, \quad m \in \mathfrak{N} \vee m = \infty$$

z założeniem, które w przypadku istnienia wartości średniej \bar{x} i k parzystego jest zawsze spełnione, że w przypadku $m = \infty$

$$(197) \quad \sum_{j \in U} p_j (x_j - \bar{x})^k < \infty \vee \sum_{j \in V} p_j (x_j - \bar{x})^k > -\infty$$

gdzie

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{j : j \in \mathfrak{N} \wedge (x_j - \bar{x})^k > 0\}$$

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{j : j \in \mathfrak{N} \wedge (x_j - \bar{x})^k < 0\}$$

W przypadku rozkładu ciągłego P na mocy (184)

$$(198) \quad \mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^k f(x) dx$$

przy założeniu, że taka całka istnieje. Gdy wartość średnia \bar{x} istnieje i k jest parzyste, założenie to jest zawsze spełnione.

W przypadku gdy wszystkie momenty m_1, \dots, m_k istnieją i są skończone, tzn. $|m_1| < \infty, \dots, |m_k| < \infty$, można łatwo wyrazić moment centralny μ_k przez momenty zwykłe, posługując się rozwinięciem dwumianu Newtona:

$$(x - \bar{x})^k = \binom{k}{0} x^k - \binom{k}{1} x^{k-1} \bar{x} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} x \bar{x}^{k-1} + (-1)^k \binom{k}{k} \bar{x}^k$$

Otrzymujemy stąd na mocy (191) i (195) wzór

$$\begin{aligned} \mu_k &= \binom{k}{0} m_k - \binom{k}{1} m_1 m_{k-1} + \dots + (-1)^{k-2} \binom{k}{k-2} m_1^{k-2} m_2 + \\ &+ (-1)^{k-1} \left[\binom{k}{k-1} - \binom{k}{k} \right] m_1^k \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} (199) \quad \mu_k &= m_k - \frac{k}{1} m_1 m_{k-1} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} m_1^2 m_{k-2} - \\ &- \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} m_1^3 m_{k-3} + \dots + (-1)^{k-2} \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} m_1^{k-2} m_2 + \\ &+ (-1)^{k-1} (k-1) m_1^k \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Dla $k = 1$ mamy zawsze w przypadku, gdy wartość średnia \bar{x} istnieje i jest skończona:

$$(200) \quad \mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x}) dP(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dP(x) - \bar{x} \int_{-\infty}^{+\infty} dP(\bar{x}) = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Dla $k = 2$ otrzymujemy na mocy (199)

$$(201) \quad \mu_2 = m_2 - m_1^2 = m_2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Moment μ_2 nazywamy wariancją rozkładu prawdopodobieństwa ρ , a liczbę

$$(202) \quad s = \sqrt{\mu_2}$$

standardowym odchyleniem rozkładu prawdopodobieństwa ρ . Należy tu zauważyć, że na mocy wzoru (195) wariancja rozkładu ρ istnieje, gdy istnieje wartość średnia \bar{x} , i zawsze jest nieujemna. Natomiast wzór (201) ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona wartość \bar{x} . Jeśli bowiem $\bar{x}^2 = \infty$, to na mocy nierówności Schwartza oraz wzorów (191) i (167)

$$\bar{x}^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x d\rho \right)^2 \ll \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\rho \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho = \overline{x^2}$$

skąd $\overline{x^2} = \infty$ i wzór (201) traci sens.

Zauważmy jeszcze, że wariancja $\mu_2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozkład ρ jest dyskretny jednopunktowy, tzn. istnieje tylko jeden punkt $x_1 \in \mathbb{R}$ taki, że $\rho(\{x_1\}) = 1$, a $\rho(\mathbb{R} - \{x_1\}) = 0$. Jeśli bowiem $\mu_2 = 0$, to na mocy (195)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 d\rho(x) = 0$$

i na mocy własności (c13)

$$(x - \bar{x})^2 \stackrel{\text{pr. w. } \mathbb{R}}{=} 0$$

co oznacza, że $|\bar{x}| < \infty$ i

$$\rho(\mathbb{R} - \{\bar{x}\}) = 0$$

Na mocy równości

$$\rho(\mathbb{R}) = \rho(\{\bar{x}\}) + \rho(\mathbb{R} - \{\bar{x}\}) = 1$$

otrzymujemy

$$P(\{\bar{x}\}) = 1$$

Jeśli - odwrotnie - P jest rozkładem dyskretnym jednopunktowym i

$$p_1 = P(\{x_1\}) = 1, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad P(\mathbb{R} - \{x_1\}) = 0$$

zgodnie ze wzorem (169), to na mocy (185) mamy

$$\bar{x} = x_1$$

a na mocy (196) $\mu_2 = 0$.

W przypadku rozkładu dyskretnego P wariancja μ_2 , zgodnie ze wzorem (196), jest równa

$$(203) \quad \mu_2 = \sum_{j=1}^m p_j (x_j - \bar{x})^2 \stackrel{(201)}{=} \sum_{j=1}^m p_j x_j^2 - \bar{x}^2, \quad m \in \mathbb{N} \vee m = \infty$$

Założenie (197) jest tu zawsze spełnione, gdy istnieje wartość średnia \bar{x} , ale ostatni człon we wzorze (203) ma sens tylko wtedy, gdy $\bar{x}^2 < \infty$.

W przypadku rozkładu ciągłego P wariancja μ_2 zgodnie ze wzorem (198) jest równa

$$(204) \quad \mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx \stackrel{(201)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \bar{x}^2$$

przy założeniu, że wartość średnia \bar{x} istnieje, z tym, że - analogicznie - ostatni człon ma sens tylko, gdy $\bar{x}^2 < \infty$.

Wariancja μ_2 rozkładu P ma następującą własność:

$$(205) \quad \mu_2 = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha)^2 dP(x), \quad \text{gdy } |\bar{x}| < \infty$$

Istotnie, w przypadku gdy $|\bar{x}| < \infty$, mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha)^2 dP(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [(x - \bar{x}) + (\bar{x} - \alpha)]^2 dP(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 d\rho(x) + 2(\bar{x} - \alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x}) d\rho(x) + (\bar{x} - \alpha)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho(x) \stackrel{(200)}{=} \mu_2 + (\bar{x} - \alpha)^2$$

skąd wynika, że minimum jest osiągnięte dla $\alpha = \bar{x}$. Wzór (205) jest zatem prawdziwy.

Wartość średnia \bar{x} i wariancja μ_2 są najczęściej używanymi parametrami rozkładu prawdopodobieństwa P na prostej. Nieco rzadziej używa się tzw. współczynnika asymetrii j_1^* określonego wzorem

$$(206) \quad j_1^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu_3}{\sqrt{(\mu_2)^3}}, \quad \text{gdy } \mu_2 \neq 0$$

oraz tzw. współczynnika spłaszczenia j_2^* określonego wzorem

$$(207) \quad j_2^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3, \quad \text{gdy } \mu_2 \neq 0$$

Uzasadnienie definicji (207) znajdziemy niżej w opisie tzw. rozkładu normalnego. Momenty μ_3 i μ_4 występujące we wzorach (206) i (207) można na mocy (199) wyrazić wzorami

$$(208) \quad \mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$$

$$(209) \quad \mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$$

Mniejsze znaczenie praktyczne mają tzw. momenty bezwzględne. k -ym bezwzględnym momentem centralnym rozkładu prawdopodobieństwa P na prostej albo krócej k -ym bezwzględnym momentem centralnym rozkładu P nazywamy wartość średnią funkcji $|x - \bar{x}|^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, tzn. liczbę

$$(210) \quad \mu_{|k|} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{x}|^k d\rho(x)$$

przy założeniu, że wartość średnia \bar{x} istnieje.

Moment $\mu_{|1|}$ nazywamy średnim odchyleniem bezwzględnym rozkładu P . Mamy na mocy (210)

$$(211) \quad \mu_{|1|} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{x}| dP(x)$$

Jak wynika z definicji (210), momenty $\mu_{|k|}$ zawsze istnieją, gdy istnieje wartość średnia \bar{x} , i są nieujemne.

Ponadto, jak łatwo zauważyć,

$$(212) \quad \mu_{|k|} = \mu_k \quad \text{dla } k \text{ parzystych}$$

§ 236. Kwantyle

Kwantylem rzędu p , gdzie $p \in (0;1)$, rozkładu prawdopodobieństwa P na prostej nazywamy każdą taką liczbę z_p , że

$$(213) \quad F(z_p) \leq p \leq F(z_p+)$$

gdzie F jest dystrybuantą rozkładu P . Innymi słowy, na mocy wzoru (81) z § 138, kwantylem rzędu p nazywamy każdą taką liczbę z_p , że

$$(214) \quad P(< -\infty; z_p) \leq p \leq P(< -\infty; z_p >)$$

Gdy rozkład P jest ciągły, wtedy na mocy definicji (213) kwantylem rzędu p nazywamy każdą taką liczbę z_p , że

$$(215) \quad F(z_p) = p = P(< -\infty; z_p)$$

Medianą nazywamy kwantyl rzędu $\frac{1}{2}$. Będziemy ją oznaczać symbolem \bar{m} .

Kwantyle dowolnego rzędu p ($p \in (0;1)$) i w szczególności mediana istnieją zawsze dla dowolnego rozkładu P , ale na ogół nie są określone jednoznacznie. Na mocy wzoru (213) kwantyle są zawsze skończone, tzn. $|z_k| < \infty$.

Mediana \bar{m} rozkładu P ma następującą własność:

$$(216) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{m}| dP(x) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \alpha| dP(x)$$