

$B + Z = C \wedge \omega(Z) = 0 \wedge C$  jest zbiorem typu  $G_\delta$

Jeśli  $B \subset H$ , to  $B \cap H = B$  i

$$B + Z \cap H = C \cap H$$

gdzie  $Z \cap H = H \wedge \omega(Z \cap H) = 0 \wedge C \cap H \subset H$  jest zbiorem typu  $G_\delta$ . Ponieważ wykazaliśmy już, że zbiory  $Z \cap H$  i  $C \cap H$  należą do klasy  $\mathcal{N}$  i  $\mu(Z \cap H) = \omega(Z \cap H)$  oraz  $\mu(C \cap H) = \omega(C \cap H)$ , więc

$$\mathcal{L}_H \subset \mathcal{N} \wedge \bigwedge_{B \in \mathcal{L}_H} \mu(B) = \omega(B)$$

gdzie  $\mathcal{L}_H$  jest klasą wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a i zawartych w zbiorze  $H$ . Przez analogię z klasą  $\mathcal{L}_G$ ,  $\mathcal{L}_H$  jest  $\sigma$ -ciałem przestrzeni  $H$ . Mamy zatem

$$(v) \quad \bigwedge_{B \in \mathcal{L}_H} \omega(B) = \int_{\tau^{-1}(B)} |D(x)| dx$$

gdzie na mocy twierdzenia § 199 funkcja  $|D(x)|$  jest mierzalna na zbiorze  $G$  względem  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{B}_n$ , a więc tym bardziej względem  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{L}$ , a tym samym jest mierzalna na zbiorze  $G$  względem  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{L}_G$ .

Wobec powyższego własność dowodzona wynika z własności (c53), gdzie należy przyjąć  $X = G$ ,  $S = \mathcal{L}_G$ ,  $\mu = \omega$ ,  $Y = H$ ,  $T = \mathcal{L}_H$ ,  $\nu = \omega$ ,  $q(x) = |D(x)|$ .

## § 228. Całka Lebesgue'a na prostej

Całka Lebesgue'a na prostej jest szczególnym przypadkiem całki Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej. Niech  $\mathcal{L}$  oznacza klasę wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a na prostej,  $\mathcal{B}$  klasę wszystkich zbiorów borelowskich na prostej, a  $\omega$  miarę Lebesgue'a na prostej. Symbolem  $\mu$  będziemy oznaczać dowolną miarę określoną na dowolnym  $\sigma$ -ciele  $S$  prostej  $\mathbb{R}$ .

Całka Lebesgue'a na prostej ma wszystkie własności całek Lebesgue'a (c1)-(c62) z § 225 oraz własności całek Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej (c63)-(c65) z § 227. Ponadto ma jeszcze inne własności, które podamy niżej.

(c66) Z W przestrzeni z miarą  $(\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mu)$  istnieją całki

$$\int_a^b f d\mu, \int_b^c f d\mu, \int_a^c f d\mu$$

T

$$\int_a^b f d\mu + \int_b^c f d\mu = \int_a^c f d\mu$$

z tym, że zamiast  $a$  można przyjąć  $a+$ , zamiast  $b$  można przyjąć  $b+$ , a zamiast  $c$  przyjąć  $c+$ .

D Gdy  $a \leq b \leq c$ , wtedy przyjmując

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \langle a; b \rangle, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \langle b; c \rangle,$$

otrzymujemy

$$A + B = \langle a; c \rangle$$

i własność (c66) wynika z własności (c4). Gdy zamiast  $a$  przyjąć  $a+$ , to

$$A = \langle a; b \rangle, \quad B = \langle b; c \rangle, \quad A + B = \langle a; c \rangle$$

i własność jest nadal prawdziwa. Gdy zamiast  $b$  przyjąć  $b+$ , to

$$A = \langle a; b \rangle, \quad B = \langle b; c \rangle, \quad A + B = \langle a; c \rangle$$

i własność jest też prawdziwa. Analogicznie, własność (c66) pozostaje prawdziwa, gdy zamiast  $c$  przyjąć  $c+$ , gdy zamiast  $a$  i  $b$  przyjąć  $a+$  i  $b+$ , gdy zamiast  $b$  i  $c$  przyjąć  $b+$  i  $c+$ , gdy zamiast  $a$  i  $c$  przyjąć  $a+$  i  $c+$ , i wreszcie, gdy zamiast  $a, b, c$  przyjąć  $a+, b+, c+$ .

Gdy  $a \leq c \leq b$ , to na mocy przypadku już udowodnionego

$$\int_a^c f d\mu + \int_c^b f d\mu = \int_a^b f d\mu$$

i na mocy umowy (164)

$$\int_a^c f d\mu - \int_b^c f d\mu = \int_a^b f d\mu$$



skąd otrzymujemy żadaną własność.

W pozostałych przypadkach, gdy  $b \leq a \leq c$  albo  $b \leq c \leq a$ , albo  $c \leq a \leq b$ , albo  $c \leq b \leq a$ , dowód jest analogiczny.

(c67) Z  $f$  jest funkcją prawie całkowaną na przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$

T Funkcja

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t) dt$$

ma skończone wahanie na przedziale  $\langle a; b \rangle$ .

D Niech  $x_0, \dots, x_n$  będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych takim, że

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} |F(x_{j+1}) - F(x_j)| &= \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) dt \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(t)| dt = \\ &= \int_a^b |f(t)| dt < \infty \end{aligned}$$

Stąd na mocy definicji wahanía funkcji

$$V_F, \langle a; b \rangle \leq \int_a^b |f(t)| dt < \infty$$

co było do wykazania.

(c68) Z  $f$  jest funkcją prawie całkowaną na przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$

T Funkcja

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t) dt$$

jest bezwzględnie ciągła w przedziale  $\langle a; b \rangle$ .

D Niech  $\langle a_0; b_0 \rangle$  będzie dowolnym przedziałem domkniętym i ograniczonym zawartym w  $\langle a; b \rangle$ . Niech

$$\langle a_1; b_1 \rangle, \dots, \langle a_m; b_m \rangle \subset \langle a_0; b_0 \rangle, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\langle a_i; b_i \rangle \cap \langle a_j; b_j \rangle = \emptyset \quad \text{dla} \quad i \neq j$$

$$\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta$$

Wtedy

$$\sum_{j=1}^m |F(b_j) - F(a_j)| = \sum_{j=1}^m \left| \int_{a_j}^{b_j} f(t) dt \right| \leq \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} |f(t)| dt =$$

$$= \int_B |f(t)| dt$$

gdzie

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \langle a_1; b_1 \rangle + \dots + \langle a_m; b_m \rangle$$

Na mocy własności (c52)

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subset \langle a; b \rangle}} \left( \mu(B) < \delta \Rightarrow \int_B |f(t)| dt < \varepsilon \right)$$

czyli

$$\bigwedge_{\substack{\langle a_0; b_0 \rangle \subset \langle a; b \rangle \\ a_0, b_0 \in \mathbb{R}}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{\substack{\langle a_1; b_1 \rangle, \dots, \langle a_m; b_m \rangle \subset \langle a_0; b_0 \rangle \\ m \in \mathbb{N}}} \left( \begin{aligned} &\langle a_i; b_i \rangle \cap \langle a_j; b_j \rangle = \emptyset \text{ dla } i \neq j \\ &\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta \end{aligned} \right)$$

$$\sum_{j=1}^m |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$$

co na mocy definicji oznacza, że funkcja  $F$  jest bezwzględnie ciągła w przedziale  $\langle a; b \rangle$ .



(c69) Z  $f$  jest funkcją ciągłą o wahaniu skończonym na przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$

T Pochodna  $f'$  funkcji  $f$  jest funkcją prawie całkowalną na przedziale  $\langle a; b \rangle$  i mierzalną na zbiorze  $Q \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in \langle a; b \rangle \wedge \text{istnieje pochodna } f'(x)\}$ .

D Na mocy twierdzenia (D) z § 179

$$\omega(\langle a; b \rangle - Q) = 0$$

oraz

$$\bigwedge_{x \in Q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} = f'(x)$$

gdzie  $h_1, h_2, \dots$  jest dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych takim, że  $h_1, h_2, \dots \neq 0$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ . W przypadku  $a=b$  twierdzenie jest w sposób trywialny prawdziwe, założmy więc, że  $a < b$ . Mamy wtedy

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0 \\ a + \varepsilon < b - \varepsilon}} & \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} & \bigwedge_{x \in \langle a + \varepsilon; b - \varepsilon \rangle} \end{array} \quad a < x + h_n < b$$

i na mocy twierdzenia § 199

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0 \\ a + \varepsilon < b - \varepsilon}} & \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} & \text{funkcja } \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \end{array}$$

jest mierzalna na przedziale  $\langle a + \varepsilon; b - \varepsilon \rangle$

Wobec tego na mocy twierdzenia § 198 funkcja  $f'$  jest mierzalna na zbiorze  $Q \cap \langle a + \varepsilon; b - \varepsilon \rangle$ . Ponieważ dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych dodatnich  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  takiego, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0 \quad \text{i} \quad \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} a + \varepsilon_k < b - \varepsilon_k, \quad \text{mamy}$$

$$Q = Q \cap \{a; b\} + \bigcup_{k=1}^{\infty} Q \cap (a + \varepsilon_k; b - \varepsilon_k)$$

więc na mocy twierdzenia (B) z § 181 funkcja  $f'$  jest mierzalna na zbiorze  $Q$ .

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy  $f$  jest funkcją nie-  
malejącą w przedziale  $\langle a; b \rangle$ . Wtedy

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0 \\ a+\varepsilon < b-\varepsilon}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \left( \bigwedge_{x \in \langle a+\varepsilon; b-\varepsilon \rangle} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \geq 0 \right) \wedge$$

$$\wedge \text{ istnieje całka } \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} dx$$

oraz

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0 \\ a+\varepsilon < b-\varepsilon}} f'(x) \geq 0 \text{ prawie wszędzie w przedziale}$$

$$\langle a+\varepsilon; b-\varepsilon \rangle \text{ i istnieje całka } \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f'(x) dx$$

Na mocy własności (c46)

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0 \\ a+\varepsilon < b-\varepsilon}} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} dx \geq \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f'(x) dx$$

Ale

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} dx = \frac{1}{h_n} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x+h_n) dx - \frac{1}{h_n} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

a na mocy (c65), gdzie  $\tau(u) = u - h_n$ ,  $D(u) = \tau'(u) = 1 \neq 0$ ,  
mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_n} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x+h_n) dx &= \frac{1}{h_n} \int_{a+\varepsilon+h_n}^{b-\varepsilon+h_n} f(x) dx = \\ &= \frac{1}{h_n} \int_{a+\varepsilon+h_n}^{b-\varepsilon} f(x) dx + \frac{1}{h_n} \int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon+h_n} f(x) dx \end{aligned}$$



skąd

$$\begin{aligned}
& \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} dx = \frac{1}{h_n} \int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon+h_n} f(x) dx - \frac{1}{h_n} \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon+h_n} f(x) dx = \\
& = \frac{1}{h_n} \int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon+h_n} f(b-\varepsilon) dx + \frac{1}{h_n} \int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon+h_n} [f(x) - f(b-\varepsilon)] dx - \\
& - \frac{1}{h_n} \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon+h_n} f(a+\varepsilon) dx - \frac{1}{h_n} \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon+h_n} [f(x) - f(a+\varepsilon)] dx = \\
& = f(b-\varepsilon) - f(a+\varepsilon) + \frac{1}{h_n} \int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon+h_n} [f(x) - f(b-\varepsilon)] dx - \\
& - \frac{1}{h_n} \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon+h_n} [f(x) - f(a+\varepsilon)] dx
\end{aligned}$$

Z ciągłości funkcji  $f$  w punkcie  $b-\varepsilon$  wynika, że

$$\begin{aligned}
& \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{n_1 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_1 \\ n > n_0}} \bigwedge_{\substack{x \in <b-\varepsilon; b-\varepsilon+h_n> \vee \\ x \in <b-\varepsilon+h_n; b-\varepsilon>}} |f(x) - f(b-\varepsilon)| < \delta \Rightarrow \\
& \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{n_1 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_1 \\ n > n_0}} \left| \frac{1}{h_n} \int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon+h_n} [f(x) - f(b-\varepsilon)] dx \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{|h_n|} \int_{b-\varepsilon-|h_n|}^{b-\varepsilon+|h_n|} |f(x) - f(b-\varepsilon)| dx < \frac{1}{|h_n|} \int_{b-\varepsilon-|h_n|}^{b-\varepsilon+|h_n|} \delta dx = 2\delta \Rightarrow \\
& \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon+h_n} [f(x) - f(b-\varepsilon)] dx = 0
\end{aligned}$$

Analogicznie wykazujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon+h_n} [f(x) - f(a+\varepsilon)] dx = 0$$

Wynika stąd, że

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} dx &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} dx = f(b-\varepsilon) - f(a+\varepsilon) \end{aligned}$$

i wobec nierówności podanej wyżej jest

$$\begin{array}{l} \wedge \\ \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0 \\ a + \varepsilon < b - \varepsilon \end{array} \quad f(b-\varepsilon) - f(a+\varepsilon) \geq \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f'(x) dx$$

Obierzmy dowolny ciąg  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \in \mathbb{R}$  taki, że

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k > 0 \wedge a + \varepsilon_k < b - \varepsilon_k$$

oraz

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$$

Na mocy własności (c43) otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \lim_{k \rightarrow \infty} [f(b-\varepsilon_k) - f(a+\varepsilon_k)] \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon_k}^{b-\varepsilon_k} f'(x) dx = \\ &= \int_a^b f'(x) dx \end{aligned}$$



co oznacza, że  $f'$  jest funkcją prawie całkowalną na przedziale  $\langle a; b \rangle$ . W ten sposób własność została udowodniona dla funkcji niemalejących w przedziale  $\langle a; b \rangle$ .

W przypadku ogólnym funkcję  $f$  przedstawiamy na mocy twierdzenia (B) z § 179 w postaci

$$f(x) = f(a) + v_{f,a}^+(x) - v_{f,a}^-(x)$$

Wahania  $v_{f,a}^+$  i  $v_{f,a}^-$  funkcji  $f$  są z założenia skończone a na mocy twierdzenia (C) z § 179 są funkcjami ciągłymi w przedziale  $\langle a; b \rangle$ . Ponadto z definicji są funkcjami niemalejącymi w przedziale  $\langle a; b \rangle$ . Na mocy przypadku już udowodnionego, pochodne  $(v_{f,a}^+)'$  i  $(v_{f,a}^-)'$  są prawie całkowalne na przedziale  $\langle a; b \rangle$  i na mocy własności (c31) i (c35) pochodna  $f'$  jest prawie całkowalna na przedziale  $\langle a; b \rangle$ , co było do wykazania.

(c70) Z  $f$  jest funkcją bezwzględnie ciągłą w przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ .

T Pochodna  $f'$  funkcji  $f$  jest funkcją prawie całkowalną na każdym przedziale ograniczonym  $\langle a_0; b_0 \rangle \subset \langle a; b \rangle$  i mierzalną na zbiorze  $Q \stackrel{\text{def}}{=} \{x: x \in \langle a; b \rangle \wedge \text{istnieje pochodna } f'(x)\}$ .

D Wynika z twierdzeń (A) i (B) z § 180, własności (c69) oraz twierdzenia (B) z § 181.

(c71) Z  $f$  jest funkcją prawie całkowalną na przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$

T  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dx = f(x)$

prawie wszędzie w przedziale  $\langle a; b \rangle$

D W przypadku  $a = -\infty$  można przedział  $\langle a; b \rangle$  przedstawić w postaci sumy  $\bigcup_{k=0}^{\infty} \langle b-k-1; b-k \rangle$  i dla każdego  $x \in \langle b-k-1; b-k \rangle$  rozpatrywać całkę

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt &= \frac{d}{dx} \left( \int_a^{b-k-1} f(t) dt + \int_{b-k-1}^x f(t) dt \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \int_{b-k-1}^x f(t) dx \end{aligned}$$

Możemy zatem założyć, że  $a \in \mathbb{R}$

Przeprowadzimy dowód najpierw w przypadku, gdy funkcja  $f$  jest ograniczona, tzn.

$$\bigvee_{r \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in \langle a; b \rangle} |f(x)| < r$$

Niech

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t) dt$$

Na mocy (c68) funkcja  $F$  jest bezwzględnie ciągła w przedziale  $\langle a; b \rangle$ , a na mocy (c70) pochodna  $F'$  jest prawie całkowalna w przedziale  $\langle a; b \rangle$ . Ponieważ

$$\bigwedge_{x \in \langle a; b \rangle} \bigwedge_{\substack{h_n \in \mathbb{R} \\ h_n \neq 0 \\ x+h_n \in \langle a; b \rangle}} \left| \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} \right| = \left| \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f(t) dt \right| < \\ < \frac{1}{|h_n|} r \cdot |h_n| = r$$

więc na mocy własności (c47) dla każdego ciągu  $h_1, h_2, \dots$  takiego, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ ,  $h_1, h_2, \dots \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^x F(t) dt &= \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \left( \int_a^x F(t+h_n) dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_a^x F(t) dt \right) \stackrel{(c65)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \left( \int_{a+h_n}^{x+h_n} F(u) du - \int_a^x F(t) dt \right) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \left( \int_{a+h_n}^x F(t) dt + \int_x^{x+h_n} F(t) dt - \int_{a+h_n}^x F(t) dt - \int_a^{a+h_n} F(t) dt \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \left( \int_x^{x+h_n} F(t) dt - \int_a^{a+h_n} F(t) dt \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \left( \int_x^{x+h_n} F(x) dt + \int_x^{x+h_n} (F(t) - F(x)) dt - \int_a^{a+h_n} F(a) dt - \right. \\
&\quad \left. - \int_a^{a+h_n} (F(t) - F(a)) dt \right) = \\
&= F(x) - F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \left( \int_x^{x+h_n} (F(t) - F(x)) dt - \right. \\
&\quad \left. - \int_a^{a+h_n} (F(t) - F(a)) dt \right)
\end{aligned}$$

Ze względu na ciągłość funkcji  $F$  w punkcie  $x$

$$\begin{aligned}
&\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > n_0}} \bigwedge_{x \leq t \leq x+h_n} |F(t) - F(x)| < \varepsilon \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left| \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} (F(t) - F(x)) dt \right| \leq \frac{1}{|h_n|} \cdot \varepsilon \cdot h_n = \varepsilon
\end{aligned}$$

skąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} (F(t) - F(x)) dt = 0$$

Analogicznie wykazujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \int_a^{x+h_n} (F(t) - F(x)) dt = 0$$

Biorąc jeszcze pod uwagę, że na mocy definicji  $F(a) = 0$ , otrzymujemy

$$(*) \quad F(x) = \int_a^x F'(t) dt = \int_a^x f(t) dt$$

czyli

$$\bigwedge_{x \in \langle a; b \rangle} \int_a^x (F'(t) - f(t)) dt = 0$$

Wynika stąd, że

$$\int_A (F'(t) - f(t)) = 0$$

dla każdego przedziału otwartego  $A$  zawartego w  $\langle a; b \rangle$ . Na mocy twierdzenia § 92 wzór ten zachodzi dla każdego zbioru otwartego  $A$  zawartego w  $\langle a; b \rangle$ . W dowodzie twierdzenia (A) z § 171 wykazaliśmy, że

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{L}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{G \text{ otwarty}} \bigvee_{B \in \mathcal{L}} A+B=G \wedge \omega(B) < \delta$$

skąd

$$\bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ A \subset \langle a; b \rangle}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{G_1 \text{ otwarty}} \bigvee_{B_1, B_2 \in \mathcal{L}} A+B_1=G_1+B_2 \wedge$$

$$\wedge \omega(B_1) < \delta \wedge \omega(B_2) = 0$$

gdzie

$$B_1 = B \cap \langle a; b \rangle, \quad G_1 = G \cap \langle a; b \rangle, \quad B_2 = G \cap \{a; b\}$$



Otrzymujemy stąd

$$\bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ A \subset \langle a; b \rangle}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{\substack{G_1 \text{ otwarty} \\ B_1 \in \mathcal{L}}} \bigvee_A \int_A (F'(t) - f(t)) dt + \\ + \int_{B_1} (F'(t) - f(t)) dt = \int_{G_1} (F'(t) - f(t)) dt = 0$$

skąd

$$\bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ A \subset \langle a; b \rangle}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{B_1 \in \mathcal{L}} \int_A (F'(t) - f(t)) dt = \\ = - \int_{B_1} (F'(t) - f(t)) dt \wedge \omega(B_1) < \delta$$

Ale na mocy własności (c52)

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{L}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{B_1 \in \mathcal{L}} \left| \int_{B_1} (F'(t) - f(t)) dt \right| < \varepsilon$$

wobec czego

$$(**) \quad \bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ A \subset \langle a; b \rangle}} \int_A (F'(t) - f(t)) dt = 0$$

Gdyby nie było prawdą, że  $F' = f$  prawie wszędzie na przedziale  $\langle a; b \rangle$ , istniałby zbiór  $A \in \mathcal{L}$ ,  $A \subset \langle a; b \rangle$  taki, że  $\omega(A) > 0$  i

$$\left( \bigwedge_{t \in A} F'(t) - f(t) > 0 \right) \vee \left( \bigwedge_{t \in A} F'(t) - f(t) < 0 \right)$$

co na mocy własności (c14) przeczyłoby (\*\*). Wynika stąd, że  $F' = f$  prawie wszędzie w przedziale  $\langle a; b \rangle$ . Tym samym

w przypadku, gdy  $f$  jest funkcją ograniczoną, własność (c71) została udowodniona.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy  $f$  jest funkcją nieujemną. Niech

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n \stackrel{\text{def}}{=} \min(n, f)$$

Na mocy twierdzenia § 197 funkcje  $f_1, f_2, \dots$  są mierzalne. Są one również nieujemne, ograniczone, a z nierówności

$$(***) \quad 0 \leq f_n \leq f$$

wynika na mocy własności (c30), że są prawie całkowalne na przedziale  $\langle a; b \rangle$ . Niech

$$G_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x [f(t) - f_n(t)] dt$$

Z nierówności (\*\*\*) wynika na mocy własności (c68) i twierdzenia (C) z § 180, że funkcja  $G_n$  jest niemalejąca i ma prawie wszędzie pochodną nieujemną w przedziale  $\langle a; b \rangle$

$$G'_n(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt - \frac{d}{dx} \int_a^x f_n(t) dt =$$

$$= f'(x) - f_n(x) \quad \text{prawie wszędzie w przedziale } \langle a; b \rangle$$

Skorzystaliśmy tu w stosunku do  $f_n(x)$  z przypadku już udowodnionego. Niech

$$\bigwedge_{x \in \langle a; b \rangle} H_{nk}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G_n(x + h_k) - G_n(x)}{h_k}$$

gdzie  $h_1, h_2, \dots$  jest dowolnie ustalonym ciągiem liczb rzeczywistych nierównych zer i takim, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_k = 0$ . Na mocy własności (c46) jest

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_a^x H_{nk}(t) dt \geq \int_a^x G'(t) dt$$



Analogicznie do (\*) wykazujemy, że

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_a^x H_{nk}(t) dt = G_n(x)$$

Wobec powyższego jest

$$G_n(x) \geq \int_a^x G'(t) dt = \int_a^x F'(t) dt - \int_a^x f_n(t) dt$$

czyli na mocy definicji funkcji  $G_n$

$$\int_a^x f(t) dt - \int_a^x f_n(t) dt \geq \int_a^x F'(t) dt - \int_a^x f_n(t) dt$$

Ponieważ z prawie-całkowalności funkcji  $f_n$  wynika, że

$$0 \leq \int_a^x f_n(t) dt < \infty$$

więc

$$(***) \quad \int_a^x f(t) dt \geq \int_a^x F'(t) dt$$

Z drugiej strony z faktu, że prawie wszędzie w przedziale  $\langle a, b \rangle$

$$G'_n(x) = F'(x) - f_n(x) \geq 0 \Rightarrow F'(x) \geq f_n(x)$$

wynika na mocy (c18), że

$$\int_a^x F'(t) dt \geq \int_a^x f_n(t) dt$$

Ponieważ

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

więc na mocy własności (c39)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x f(t) dt$$

skąd

$$\int_a^x F'(t) dt \geq \int_a^x f(t) dt$$

i na mocy (\*\*\*\*)

$$\int_a^x F'(t) dt = \int_a^x f(t) dt$$

skąd dla  $x = b$

$$\int_a^b [F'(t) - f(t)] dt = 0$$

gdzie - jak wykazaliśmy poprzednio -

$$F'(x) - f(x) \geq 0 \quad \text{prawie wszędzie w przedziale } \langle a; b \rangle$$

Na mocy własności (c13) otrzymujemy

$$F'(x) = f(x) \quad \text{prawie wszędzie w przedziale } \langle a; b \rangle$$

Tym samym własność (c71) została udowodniona w przypadku  $f \geq 0$ .

W przypadku ogólnym niech  $f^+$  oznacza część dodatnią, a  $f^-$  część ujemną funkcji  $f$ . Na mocy przypadku już udowodnionego mamy

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} \int_a^x f^+(t) dt - \frac{d}{dx} \int_a^x f^-(t) dt =$$



$$= f^+(x) - f^-(x) = f(x) \quad \text{prawie wszędzie w przedziale } \langle a; b \rangle$$

Tym samym własność (c71) została w pełni udowodniona.

(c72) Z  $f$  jest funkcją prawie całkowalną na przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$

T  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$  w każdym punkcie  $x \in (a; b)$ , w którym

funkcja  $f$  jest ciągła.

D Na mocy (c27) funkcja  $f$  jest prawie całkowalna w każdym przedziale  $\langle a; x \rangle \subset \langle a; b \rangle$ . Istnieje zatem skończona całka

$$\int_a^x f(t) dt$$

dla każdego  $x \in \langle a; b \rangle$ . Niech  $x_0 \in (a; b)$  będzie punktem ciągłości funkcji  $f$ . Na mocy twierdzenia § 161 i twierdzenia (B) z § 168

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset (a; b) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Mamy wobec tego

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \frac{1}{2\delta} \left( \int_a^{x_0+\delta} f(t) dt - \int_a^{x_0-\delta} f(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t) dt = \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x_0) dt + \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [f(t) - f(x_0)] dt = \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [f(t) - f(x_0)] dt \wedge \end{aligned}$$

$$\wedge \left| \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [f(t) - f(x_0)] dt \right| \leq \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(t) - f(x_0)| dt < \\ < \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varepsilon dt = \varepsilon$$

skąd

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \left( \int_a^{x_0+\delta} f(t) dt - \int_a^{x_0-\delta} f(t) dt \right) = f(x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt \right)_{x=x_0} = f(x_0)$$

co było do dowiedzenia.

(c73)  $f$  jest funkcją bezwzględnie ciągłą w przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigwedge_{x_0, x \in \langle a; b \rangle} f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

D] Na mocy własności (c70) pochodna  $f'$  jest funkcją prawie całkowaną na każdym przedziale  $\langle x_0; x \rangle$  lub  $\langle x; x_0 \rangle$ . Niech

$$\bigwedge_{x \in \langle a; b \rangle} g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

Na mocy własności (c71)

$$g'(x) = f'(x) \quad \text{prawie wszędzie w przedziale } \langle a; b \rangle$$

a na mocy (c68) i twierdzenia (D) z § 180 funkcja  $g - f$  jest bezwzględnie ciągła w przedziale  $\langle a; b \rangle$ , skąd na mocy twierdzenia (F) z § 180

$$g(x) - f(x) = \text{const}$$

czyli

$$\bigwedge_{x \in \langle a; b \rangle} f(x) = g(x) + r, \quad r \in \mathbb{R}$$



czyli

$$\bigwedge_{x \in \langle a; b \rangle} f(x) = r + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

Podstawiając tu  $x = x_0$  otrzymujemy  $r = f(x_0)$ , a stąd żądaną własność.

(c74)  $f$  jest funkcją bezwzględnie ciągłą o wahanu skończonym na przedziale  $\langle -\infty; b \rangle \subset \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigwedge_{x \in \langle -\infty; b \rangle} f(x) = f(-\infty) + \int_{-\infty}^x f'(t) dt$$

D] Na mocy własności (c69) pochodna  $f'$  jest funkcją prawie całkowalną na przedziale  $\langle -\infty; b \rangle$ . Dalszy dowód jest analogiczny jak dla własności (c73).

(c75) Całkowanie przez podstawienie na prostej

Z] 1<sup>o</sup>  $\tau$  jest funkcją monotoniczną, bezwzględnie ciągłą, określoną na przedziale  $T \subset \mathbb{R}$  i odwzorowującą ten przedział na przedział  $U = \tau(T)$ .

2<sup>o</sup>  $f$  jest funkcją mierzalną  $\omega$  na zbiorze  $A \in \mathcal{L}$ ,  $A \subset U$ .

3<sup>o</sup> istnieje całka

$$\int_A f(y) dy$$

T]

$$\int_A f(y) dy = \int_{X \cap \tau^{-1}(A)} f(\tau(x)) |\tau'(x)| dx$$

gdzie

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{x: \tau'(x) \neq 0\} \cap T$$

D] Na mocy twierdzenia (C) z § 180 pochodna  $\tau'(x)$  istnieje prawie wszędzie na zbiorze  $T$ , a więc i na zbiorze  $X \cap \tau^{-1}(A)$ , a na mocy własności (c70) i (c25) funkcja  $|\tau'|$  jest prawie całkowalna na każdym przedziale ograniczonym zawartym w przedziale  $T$ . Wprowadzamy funkcję rzeczywistą zbioru

$$\bigwedge_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subset U}} \mu(B) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau^{-1}(B)} |\tau'(x)| dx$$

Na mocy własności (c54) oraz twierdzenia § 169 funkcja  $\mu$  jest miarą określoną na  $\sigma$ -ciele  $\mathcal{B}|U$  (patrz § 26), czyli na mocy twierdzeń § 163 i § 164 na  $\sigma$ -ciele wszystkich zbiorów borelowskich zawartych w przedziale  $U$ .

Gdy  $B = (c; d) \subset U$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ , wtedy

$$\tau^{-1}(B) = \begin{cases} (\max \tau^{-1}(c); \min \tau^{-1}(d)), & \text{gdy } \tau' \geq 0 \\ (\max \tau^{-1}(d); \min \tau^{-1}(c)), & \text{gdy } \tau' \leq 0 \end{cases}$$

i na mocy własności (c73)

$$\mu(B) = \begin{cases} \int_{\max \tau^{-1}(c)}^{\min \tau^{-1}(d)} \tau'(x) dx = \tau(\min \tau^{-1}(d)) - \tau(\max \tau^{-1}(c)) = d - c, & \text{gdy } \tau'(x) \geq 0 \\ - \int_{\max \tau^{-1}(d)}^{\min \tau^{-1}(c)} \tau'(x) dx = -\tau(\min \tau^{-1}(c)) + \tau(\max \tau^{-1}(d)) = d - c, & \text{gdy } \tau'(x) \leq 0 \end{cases}$$

czyli

$$\mu(B) = \omega(B)$$

Miara  $\mu$  pokrywa się zatem z miarą Lebesgue'a  $\omega$  w klasie wszystkich przedziałów otwartych, ograniczonych, zawartych w przedziale  $U$  i na mocy twierdzenia § 92 w klasie wszystkich zbiorów otwartych zawartych w przedziale  $U$ , czyli w jego wnętrzu  $U^0$ . Analogicznie jak w dowodzie własności (c65) wykazujemy, że miary  $\mu$  i  $\omega$  pokrywają się w klasie zbiorów typu  $G_\delta$  zawartych w przedziale  $U^0$ , oraz na mocy twierdzenia (A) z § 171, że dla każdego zbioru  $Z \subset U^0$ , takiego, że  $\omega(Z) = 0$ , istnieje taki zbiór  $Z^* \subset U^0$  typu  $G_\delta$ , że  $Z \subset Z^*$  i  $\mu(Z^*) = \omega(Z^*) = \omega(Z) = 0$ . Wobec tego  $\mu(Z) \leq \mu(Z^*) = 0$ , czyli  $\mu(Z) = 0$ . Wynika stąd, że miary  $\mu$  i  $\omega$  pokrywają się na wszystkich zbiorach miary Lebesgue'a zero zawartych w przedziale  $U^0$ . Na mocy twierdzenia (A) z § 171



$$\bigwedge_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subset U^0}} \omega(B) = \int_{\tau^{-1}(B)} |\tau'(x)| dx$$

Ponieważ dla końców  $a, b$  przedziału  $I$  mamy w przypadku  $a, b \in \mathfrak{R}$ ,

$$C_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tau^{-1}(\tau(a)) = \langle \min \tau^{-1}(\tau(a)); \max \tau^{-1}(\tau(a)) \rangle$$

więc

$$\begin{aligned} \int_{C_1} |\tau'(x)| dx &= \left| \int_{\min \tau^{-1}(\tau(a))}^{\max \tau^{-1}(\tau(a))} \tau'(x) dx \right| = \\ &= \left| \tau[\max \tau^{-1}(\tau(a))] - \tau[\min \tau^{-1}(\tau(a))] \right| = \\ &= \left| \tau(a) - \tau(a) \right| = 0 = \omega(\{\tau(a)\}) \end{aligned}$$

i analogicznie, dla

$$C_2 \stackrel{\text{def}}{=} \tau^{-1}(\tau(b)) = \langle \min \tau^{-1}(\tau(b)); \max \tau^{-1}(\tau(b)) \rangle$$

jest

$$\int_{C_2} |\tau'(x)| dx = 0 = \omega(\{\tau(b)\})$$

Wobec powyższego

$$(*) \quad \bigwedge_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subset U}} \omega(B) = \int_{\tau^{-1}(B)} |\tau'(x)| dx$$

Niech teraz

$$X = \{x: \tau'(x) \neq 0\} \cap I$$

Na mocy twierdzenia § 184 i własności (c70) zbiór  $X$  jest mierzalny  $\omega$ . Zatem

$$(**) \quad \bigwedge_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subset U}} \omega(B) = \int_{X \cap \tau^{-1}(B)} |\tau'(x)| dx$$

Niech teraz  $A \in \mathcal{L}$ ,  $A \subset U$ . Na mocy twierdzenia (A) z § 171

$$(***) \quad A + Z = B$$

gdzie  $B, Z \subset U$ ,  $B \in \mathcal{B}$  i  $\omega(Z) = 0$ .

Na mocy twierdzenia (A) z § 171 istnieje taki zbiór  $Z^*$ , że

$$Z^* \in \mathcal{B} \wedge Z \subset Z^* \wedge \omega(Z^*) = 0$$

a na mocy (\*\*)

$$\int_{X \cap \tau^{-1}(Z^*)} |\tau'(x)| dx = \omega(Z^*) = 0$$

skąd na mocy własności (c13) i faktu, że

$$\bigwedge_{x \in X \cap \tau^{-1}(Z^*)} |\tau'(x)| > 0$$

otrzymujemy

$$\omega(X \cap \tau^{-1}(Z^*)) = 0$$

Wobec tego na mocy twierdzenia § 111 zbiór  $X \cap \tau^{-1}(Z) \subset X \cap \tau^{-1}(Z^*)$  jest też mierzalny i

$$\omega(X \cap \tau^{-1}(Z)) = 0$$

a stąd i z (\*\*\*) zbiór  $X \cap \tau^{-1}(A)$  jest mierzalny i

$$\omega(X \cap \tau^{-1}(A)) = \omega(X \cap \tau^{-1}(B))$$

Ponadto na mocy (\*\*\*) i (\*\*)

$$\bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{L} \\ A \subset U}} \int_{X \cap \tau^{-1}(A)} |\tau'(x)| dx + \int_{X \cap \tau^{-1}(Z)} |\tau'(x)| dx =$$

$$= \int_{X \cap \tau^{-1}(B)} |\tau'(x)| dx = \omega(B) = \omega(A)$$



czyli

$$\begin{aligned}
 (****) \quad \bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{G} \\ A \subset U}} \int_{X \cap \tau^{-1}(A)} |\tau'(x)| dx &= \int_{X \cap \tau^{-1}(B)} |\tau'(x)| dx = \\
 &= \omega(B) = \omega(A)
 \end{aligned}$$

Na mocy własności (c53) i (\*) mamy

$$\begin{aligned}
 (o) \quad \bigwedge_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subset U}} \int_B f(y) dy &= \int_{\tau^{-1}(B)} f(\tau(x)) \cdot |\tau'(x)| dx = \\
 &= \int_{X \cap \tau^{-1}(B)} f(\tau(x)) \cdot |\tau'(x)| dx
 \end{aligned}$$

i na mocy (\*) oraz (\*\*\*\*)

$$\begin{aligned}
 \bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{G} \\ A \subset U}} \int_A f(y) dy &= \int_B f(y) dy = \int_{X \cap \tau^{-1}(B)} f(\tau(x)) \cdot |\tau'(x)| dx = \\
 &= \int_{X \cap \tau^{-1}(A)} f(\tau(x)) \cdot |\tau'(x)| dx
 \end{aligned}$$

co było do wykazania.

- (c76) Całkowanie przez podstawienie dla przedziałów na prostej
- Z] 1<sup>o</sup>  $\tau$  jest funkcją monotoniczną, bezwzględnie ciągłą, odwzorowującą przedział  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$  na przedział  $P = \langle \tau(a); \tau(b) \rangle \subset \mathbb{R}$ , gdy  $\tau$  jest funkcją nie malejącą i  $P = \langle \tau(b); \tau(a) \rangle \subset \mathbb{R}$ , gdy  $\tau$  jest funkcją nierosnącą.
- 2<sup>o</sup>  $f$  jest funkcją prawie całkowalną na przedziale  $P$ .

$$\text{T]} \quad \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\tau(x)) \tau'(x) dx$$

D] Na mocy wzoru (o) wykazanego w dowodzie własności (c75) mamy

$$\int_{\tau(\alpha)}^{\tau(b)} f(y) dy = \begin{cases} \int_{\min \tau^{-1}(\tau(\alpha))}^{\max \tau^{-1}(\tau(b))} f(\tau(x)) |\tau'(x)| dx, & \text{gdy } \tau' \geq 0 \\ - \int_{\min \tau^{-1}(\tau(\alpha))}^{\max \tau^{-1}(\tau(b))} f(\tau(x)) |\tau'(x)| dx, & \text{gdy } \tau' \leq 0 \end{cases}$$

czyli

$$(i) \quad \int_{\tau(\alpha)}^{\tau(b)} f(y) dy = \int_{\min \tau^{-1}(\tau(\alpha))}^{\max \tau^{-1}(\tau(b))} f(\tau(x)) \cdot \tau'(x) dx$$

Ale wobec monotoniczności funkcji  $\tau$  i faktu, że

$$\tau(\min \tau^{-1}(\tau(\alpha))) = \tau(\alpha)$$

funkcja  $\tau$  ma stałą wartość w przedziale  $\langle \min \tau^{-1}(\tau(\alpha)); a \rangle$  i analogicznie w przedziale  $\langle b; \max \tau^{-1}(\tau(b)) \rangle$ . Wobec tego  $\tau'(x) = 0$  w obu tych przedziałach i

$$\begin{aligned} \int_{\min \tau^{-1}(\tau(\alpha))}^a f(\tau(x)) \cdot \tau'(x) dx &= 0 \wedge \\ \wedge \int_b^{\max \tau^{-1}(\tau(b))} f(\tau(x)) \cdot \tau'(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

wobec czego na mocy (i)

$$\begin{aligned} \int_{\tau(\alpha)}^{\tau(b)} f(y) dy &= \int_{\min \tau^{-1}(\tau(\alpha))}^a f(\tau(x)) \cdot \tau'(x) dx + \int_a^b f(\tau(x)) \cdot \tau'(x) dx \\ + \int_b^{\max \tau^{-1}(\tau(b))} f(\tau(x)) \cdot \tau'(x) dx &= \int_a^b f(\tau(x)) \cdot \tau'(x) dx \end{aligned}$$

co było do wykazania.



## (c77) Całkowanie przez części

Jeśli  $f$  i  $g$  są funkcjami bezwzględnie ciągłymi w przedziale  $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ , a w przypadku, gdy przedział ten jest nieograniczony, funkcja  $fg$  ma wahanie skończone na tym przedziale, to

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

D] Na mocy twierdzenia (E) z § 180 funkcja  $fg$  jest bezwzględnie ciągła w przedziale  $\langle a; b \rangle$  i na mocy własności (c73) i (c74)

$$f(b) g(b) = f(a) g(a) + \int_a^b (f(x) g(x))'$$

skąd otrzymujemy tezę, gdyż  $(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$  prawie wszędzie w przedziale  $\langle a; b \rangle$ , a na mocy własności (c37) funkcje  $f'g$  i  $fg'$  są prawie całkowalne na przedziale  $\langle a; b \rangle$ .

### § 229. Całki niewłaściwe Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$

Jak wynika z własności (c64) całka niewłaściwa Riemanna może być równa całce Lebesgue'a. Mogą jednak zaistnieć przypadki, gdy tak nie jest. Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy obie całki

$$\int_A f^+(x) dx \quad \text{ i } \quad \int_A f^-(x) dx, \quad A \subset \mathbb{R}^n$$

gdzie  $f^+$  oznacza część dodatnią, a  $f^-$  część ujemną funkcji  $f$ , są nieskończone, a mimo to całka niewłaściwa Riemanna funkcji  $f$  na przedziale  $A$  istnieje.

Całkę niewłaściwą Lebesgue'a definiuje się analogicznie jak całkę niewłaściwą Riemanna: