

$$\wedge f(B), f_1(B), f_2(B), \dots \subset Y \wedge f_n \xrightarrow{B} f \xrightarrow{(nz14)} \\ \xrightarrow{(nz14)} h(f_n) \xrightarrow{B} h(f) \implies h(f_n) \xrightarrow{\text{pr. w. } A} h(f)$$

§ 213. Zbieżność prawie jednostajna

Mówimy, że ciąg (f_n) jest zbieżny prawie jednostajnie do funkcji f na zbiorze A i piszemy

$$f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} f \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} f$$

wtedy i tylko wtedy, gdy w danej przestrzeni z miarą (X, \mathcal{S}, μ) :
 $A \in \mathcal{S} \wedge f, f_1, f_2, \dots$ są funkcjami mierzalnymi μ na zbiorze $A \wedge$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{C \subset A} \mu(A-C) < \varepsilon \wedge f_n \xrightarrow{j \cdot C} f$$

Gdy ponadto $A = X$, to mówimy po prostu, że ciąg (f_n) jest zbieżny prawie jednostajnie do funkcji f i piszemy

$$f_n \xrightarrow{\text{pr. j.}} f \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \xrightarrow{\text{pr. j.}} f$$

Zbieżność prawie jednostajna ma następujące własności:

$$\begin{aligned} (\text{prj1}) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} f &\implies f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f \\ \Downarrow \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} f &\implies \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{C_m \subset A} \mu(A-C_m) < \frac{1}{m} \wedge f_n \xrightarrow{j \cdot C_m} f \end{aligned}$$

Niech

$$C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$$

$$\text{Mamy } C \in \mathcal{S} \wedge C \subset A \wedge \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \mu(A-C) \leq \mu(A-C_m) < \frac{1}{m}$$

skąd $\mu(A-C) = 0$. Z drugiej strony na mocy własności (jz6) i (nz5)

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} f_n \xrightarrow{j \cdot C_m} f \implies f_n \xrightarrow{C} f \implies f_n \xrightarrow{\text{pr. w. } A} f$$

$$(\text{prj2}) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} f \wedge f_n \xrightarrow{\text{pr. j. } A} g \implies f \xrightarrow{\text{pr. w. } A} g$$

$$\begin{aligned}
& \text{D)} \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \wedge f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} g \xRightarrow{(\text{pr.j1})} \\
& \xRightarrow{(\text{prj1})} f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} f \wedge f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} g \xRightarrow{(\text{prw1})} f \xrightarrow{\text{pr.w. } A} g \\
& (\text{prj3}) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \wedge B \in S \wedge B \subset A \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } B} f \\
& \text{D)} \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \wedge B \in S \wedge B \subset A \Rightarrow \\
& \Rightarrow A \in S \wedge B \in S \wedge B \subset A \wedge \\
& \wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{C \subset A} \mu(A-C) < \varepsilon \wedge f_n \xrightarrow{j.C} f \Rightarrow \\
& \Rightarrow B \in S \wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{D \in S} D = B \cap C \wedge D \subset A \wedge \\
& \wedge \mu(B-D) = \mu(B-C) \leq \mu(A-C) < \varepsilon \wedge f_n \xrightarrow{j.D} f \Rightarrow \\
& \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } B} f \\
& (\text{prj4}) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \wedge B \in S \wedge B \supset A \wedge \mu(B-A) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } B} f \\
& \text{D)} \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \wedge B \in S \wedge B \supset A \wedge \mu(B-A) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow A \in S \wedge B \in S \wedge B \supset A \wedge \mu(B-A) = 0 \wedge \\
& \wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{C \subset A} \mu(A-C) < \varepsilon \wedge f_n \xrightarrow{j.C} f \Rightarrow \\
& \Rightarrow B \in S \wedge \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{C \subset A} \mu(B-C) = \mu(B-A) + \mu(A-C) < \varepsilon \wedge \\
& \wedge f_n \xrightarrow{j.C} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } B} f \\
& (\text{prj5}) \quad \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n \xRightarrow{\text{pr.w. } A} g_n \right) \wedge f \xRightarrow{\text{pr.w. } A} g \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left(f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \Leftrightarrow g_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} g \right)
\end{aligned}$$

(Własność ta oznacza, że zbieżność prawie jednostajna jest w istocie określona na zbiorze klas funkcji równoważnych).

D] Na mocy twierdzenia § 208

$$\bigvee_{B \in \mathcal{S}} B \subset A \wedge \mu(A-B) = 0 \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n \stackrel{B}{=} g_n \wedge f \stackrel{B}{=} g \xRightarrow[\text{(prj4)}]{\text{(prj3)}} \\ \xRightarrow[\text{(prj4)}]{\text{(prj3)}} (f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } B} f \Leftrightarrow g_n \xrightarrow{\text{pr.j. } B} g \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} g)$$

$$\text{(prj6)} \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \Rightarrow \bigwedge_{m_1 < m_2 < \dots \in \mathbb{N}} f_{m_n} \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f$$

D] Wynika z definicji zbieżności prawie jednostajnej i własności (jz2).

$$\text{(prj7)} \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A_1} f \wedge \dots \wedge f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A_m} f \Rightarrow \\ \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } \bigcup_{k=1}^m A_k} f$$

$$\text{D]} \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A_1} f \wedge \dots \wedge f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A_m} f \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{k \in \{1, \dots, m\}} \bigvee_{C_k \subset A_k} \mu(A_k - C_k) < \frac{\varepsilon}{m} \wedge \\ \wedge f_n \xrightarrow{\text{j. } C_k} f \xRightarrow[\text{(jz4)}]{\text{(jz4)}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{C = \bigcup_{k=1}^m C_k} \mu\left(\bigcup_{k=1}^m A_k - C\right) = \\ = \mu\left[\bigcup_{k=1}^m (A_k - C_k) - C\right] \leq \mu\left[\bigcup_{k=1}^m (A_k - C_k)\right] \leq \sum_{k=1}^m \mu(A_k - C_k) < \\ < \varepsilon \wedge f_n \xrightarrow{\text{j. } C} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } \bigcup_{k=1}^m A_k} f$$

(prj8) $f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \Leftrightarrow$ ciąg (f_n) spełnia prawie jednostajnie warunek Cauchy'ego na zbiorze $A \stackrel{\text{def}}{=} A \in \mathcal{S} \wedge f_1, f_2, \dots$ są funkcjami mierzalnymi μ na zbiorze A i skończonymi prawie wszędzie na zbiorze $A \wedge$

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon, \delta \in \mathbb{R} \\ \varepsilon, \delta > 0}} \bigvee_{\substack{C \in \mathcal{S} \\ C \subset A \\ \mu(A-C) < \varepsilon}} \bigvee_{\substack{n_0 \in \mathbb{N} \\ m, n > n_0}} \bigwedge_{m, n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{x \in C} |f_m(x) - f_n(x)| < \delta$$

D] Wynika z definicji zbieżności prawie jednostajnej i własności (jz5).

(prj9) $f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \Rightarrow f, f_1, f_2, \dots$ są prawie wszędzie skończone na zbiorze A

$$\underline{D}] \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \Rightarrow \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{C_m \subset A} \mu(A - C_m) < \frac{1}{m} \wedge$$

$$\wedge f_n \xrightarrow{j. C_m} f \Rightarrow \bigvee_{C \in \mathcal{S}} C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m \wedge C \subset A \wedge$$

$$\wedge \left(\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \mu(A - C) \leq \mu(A - C_m) < \frac{1}{m} \Rightarrow \mu(A - C) = 0 \right)$$

$\wedge f, f_1, f_2, \dots$ skończone na zbiorze $C \Rightarrow f, f_1, f_2, \dots$ są prawie wszędzie skończone na zbiorze A .

(prj10) $f_n \xrightarrow{j. A} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f$

D] Wynika z definicji zbieżności prawie jednostajnej.

(prj11) Jeżeli funkcje f, f_1, f_2, \dots są prawie wszędzie skończone na zbiorze A i $\mu(A) < \infty$, to

$$f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} f$$

D] Wobec własności (prj1) wystarczy dowieść, że przy danych założeniach

$$f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f$$

Jest to tzw. twierdzenie Jegorowa.

Aby je udowodnić, zauważmy najpierw, że na mocy założenia i twierdzenia § 208

$$\bigvee_{D \in \mathcal{S}} D \subset A \wedge \mu(A - D) = 0 \wedge f_n \xrightarrow{D} f \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{x \in D} (|f(x)| < \infty \wedge \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty)$$

Wprowadźmy zbiory

$$D_{mk} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=k}^{\infty} D \cap \left\{ x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\} \begin{matrix} \in \mathcal{S} \\ \text{§ 190} \\ \text{§ 185} \end{matrix}$$

Mamy

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} D_{m1} \subset D_{m2} \subset \dots \wedge D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{mk}$$

gdyż

$$f_n \xrightarrow{D} f \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in D} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{k_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > k_0}} |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigwedge_{x \in D} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{k_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > k_0}} x \in D_{mk}$$

Na mocy własności (m7) miary i założenia $\mu(A) < \infty$ jest zatem

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \mu(D) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(D_{mk}) < \infty$$

skąd na mocy własności (m9) miary

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{k_m \in \mathbb{N}} \mu(D - D_{mk_m}) = \mu(D) - \mu(D_{mk_m}) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

Wprowadźmy teraz zbiór

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{m=1}^{\infty} D_{mk_m} \in \mathcal{S}$$

Spełnia on warunek

$$E \subset D \subset A$$

oraz

$$\begin{aligned} \mu(A - E) &= \mu\left(A - \bigcap_{m=1}^{\infty} D_{mk_m}\right) = \mu\left[(A - D) + \left(D - \bigcap_{m=1}^{\infty} D_{mk_m}\right)\right] = \\ &= \mu\left[(A - D) + \bigcup_{m=1}^{\infty} (D - D_{mk_m})\right] \leq \mu(A - D) + \sum_{m=1}^{\infty} \mu(D - D_{mk_m}) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \mu(D - D_{mk_m}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon \end{aligned}$$

Ponadto

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{k_m \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > k_m}} \bigwedge_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \Rightarrow f_n \xrightarrow{j.E} f$$

Otrzymaliśmy ostatecznie

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{E \in \mathcal{S}} E \subset A \wedge \mu(A - E) < \varepsilon \wedge f_n \xrightarrow{j.E} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr.j.} A} f$$

$$(prj12) \quad f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \Rightarrow \bigwedge_{c \in \mathfrak{R}} cf_n \xrightarrow{pr.j.A} cf$$

D) Wynika z definicji zbieżności prawie jednostajnej i własności (jz7).

$$(prj13) \quad f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{pr.j.A} g \Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{pr.j.A} f + g$$

$$\underline{D)} \quad f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{pr.j.A} g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{C, D \in S} C, D \subset A \wedge \mu(A-C) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \mu(A-D) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \\ \wedge f_n \xrightarrow{j.C} f \wedge g_n \xrightarrow{j.D} g$$

Niech

$$E \stackrel{\text{def}}{=} C \cap D$$

Mamy

$$E \in S \wedge E \subset A \wedge \mu(A-E) = \mu[(A-C) \cup (A-D)] \leq \mu(A-C) + \mu(A-D) < \varepsilon$$

Zatem

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{E \in S} E \subset A \wedge \mu(A-E) < \varepsilon \wedge f_n \xrightarrow{j.E} f \wedge g_n \xrightarrow{j.E} g \Rightarrow_{(jz8)} \\ (jz8) \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{E \in S} E \subset A \wedge \mu(A-E) < \varepsilon \wedge f_n + g_n \xrightarrow{j.E} f + g \Rightarrow \\ \Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{pr.j.A} f + g$$

gdyż na mocy własności (prj9) funkcje $f+g$, f_1+g_1 , f_2+g_2 , ... są określone prawie wszędzie na zbiorze A i mierzalne μ na zbiorze A , zgodnie z twierdzeniem § 187.

$$(prj14) \quad f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{pr.j.A} g \Rightarrow f_n - g_n \xrightarrow{pr.j.A} f - g$$

D) Wynika z (prj13) i (prj12).

$$(prj15) \quad f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{pr.j.A} g \wedge$$

$$\wedge \bigvee_{\substack{B \in S \\ B \subset A \\ \mu(A-B)=0}} \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathfrak{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in B} (|f(x)| < \alpha \wedge |g(x)| < \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{pr.j.A} fg$$

D] Analogiczny do dowodu własności (prj13).

$$(prj16) \quad f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{pr.j.A} g \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{pr.j.A} fg$$

D] Na mocy własności (prj9)

$$\bigvee_{\substack{C \in S \\ C \subset A \\ \mu(A-C)=0}} \bigwedge_{x \in C} |f(x)| < \infty$$

Zatem jeśli

$$C_k \stackrel{\text{def}}{=} \{x: |f(x)| < k \wedge x \in C\} \in S$$

to

$$\bigwedge_{x \in C} \bigvee_{k \in \mathbb{N}} x \in C_k$$

skąd

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \wedge C_1 \subset C_2 \subset \dots$$

Na mocy własności (m7) miary i założenia $\mu(A) < \infty$ otrzymujemy

$$\mu(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(C_k) < \infty$$

skąd na mocy własności (m9) miary

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{p \in \mathbb{N}} \mu(C - C_p) < \frac{\varepsilon}{4} \wedge \bigwedge_{x \in C_p} |f(x)| < p$$

Z drugiej strony

$$f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{D \subset A} \mu(A - D) < \frac{\varepsilon}{4} \wedge f_n \xrightarrow{j.D} f$$

Niech

$$E \stackrel{\text{def}}{=} C_p \cap D \in S$$

Mamy

$$\begin{aligned} \mu(A - E) &= \mu[(A - C_p) \cup (A - D)] = \mu[(A - C) \cup (C - C_p) \cup (A - D)] \leq \\ &\leq \mu(A - C) + \mu(C - C_p) + \mu(A - D) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

a następnie

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{p \in \mathfrak{R}} \bigvee_{\substack{E \in \mathcal{S} \\ E \subset A}} \mu(A-E) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge f_n \xrightarrow{j.E} f \wedge \\ \wedge \bigwedge_{x \in E} |f(x)| < p$$

i analogicznie

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{r \in \mathfrak{R}} \bigvee_{\substack{F \in \mathcal{S} \\ F \subset A}} \mu(A-F) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge g_n \xrightarrow{j.F} g \wedge \\ \wedge \bigwedge_{x \in F} |g(x)| < r$$

Kładąc

$$\alpha = \max(p, r)$$

oraz

$$B \stackrel{\text{def}}{=} E \cap F \in \mathcal{S}$$

skąd

$$\mu(A-B) = \mu[(A-E) \cup (A-F)] \leq \mu(A-E) + \mu(A-F) < \varepsilon$$

otrzymujemy, że

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{B \subset A} \mu(A-B) < \varepsilon \wedge f_n \xrightarrow{j.B} f \wedge g_n \xrightarrow{j.B} g \wedge$$

$$\bigvee_{\substack{\alpha \in \mathfrak{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in B} (|f(x)| < \alpha \wedge |g(x)| < \alpha) \xrightarrow{(jz10)}$$

$$\xrightarrow{(jz10)} f_n g_n \xrightarrow{j.B} fg \wedge f_n g_n \xrightarrow{\text{pr.j.A}} fg$$

$$(\text{prj17}) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.j.A}} f \wedge \bigvee_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A \\ \mu(A-B)=0}} \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathfrak{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in B} |f(x)| < \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathfrak{R}} f_n^k \xrightarrow{\text{pr.j.A}} f^k$$

D] Wynika z własności (prj15).

$$(\text{prj18}) \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.j.A}} f \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathfrak{R}} f_n^k \xrightarrow{\text{pr.j.A}} f^k$$

D] Wynika z własności (prj16).

(prj19) $f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \wedge f_1, f_2, \dots$ różne od zera prawie wszędzie na zbiorze $A \wedge$

$$\bigwedge_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A \\ \mu(A-B)=0}} \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathbb{R} \\ \alpha > 0}} \bigwedge_{x \in B} |f(x)| > \alpha \Rightarrow \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\text{pr.j. } A} \frac{1}{f}$$

D Po wykorzystaniu twierdzenia § 208 dowód wynika z definicji zbieżności prawie jednostajnej i z własności (jz12).

(prj20) $\left(f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A_1} f \wedge f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A_2} f \wedge \dots \right) \wedge \mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) < \infty \Rightarrow$
 $\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} f$

$$\underline{D} \quad f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A_1} f \wedge f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A_2} f \wedge \dots \xrightarrow{(\text{prj1})}$$

$$\xrightarrow{(\text{prj1})} f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A_1} f \wedge f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } A_2} f \wedge \dots \xrightarrow{(\text{prw7})}$$

$$\xrightarrow{(\text{prw7})} f_n \xrightarrow{\text{pr.w. } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} f \xrightarrow{(\text{prj9})} f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} f$$

(prj21) $f_n \xrightarrow{\text{pr.j. } A} f \wedge f, f_1, f_2, \dots$ różne od zera prawie wszędzie na zbiorze $A \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\text{pr.j. } A} \frac{1}{f}$$

D Na mocy twierdzenia § 208

$$\bigvee_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A}} \mu(A-B)=0 \wedge f, f_1, f_2, \dots \text{ różne od zera na zbiorze } B$$

Niech

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} B_m \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x : |f(x)| > \frac{1}{m} \wedge x \in B \right\} \in \mathcal{S}$$

skąd

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \in \mathcal{S}$$

Na mocy własności (prj3) i (prj19)

$$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\text{pr.j. } B_m} \frac{1}{f} \xRightarrow{(\text{prj20})} \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\text{pr.j. } B} \frac{1}{f} \xRightarrow{(\text{prj4})}$$

$$\xRightarrow{(\text{prj4})} \frac{1}{f_n} \xrightarrow{\text{pr.j. } A} \frac{1}{f}$$

$$(prj22) \quad f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{pr.j.A} g \wedge$$

$$\bigvee_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset A \\ \mu(A-B)=0}} \bigvee_{\substack{\alpha, b \in \mathbb{R} \\ \alpha, b > 0}} \bigwedge_{x \in B} (|f(x)| < \alpha \wedge |g(x)| > b) \wedge g_1, g_2, \dots$$

różne od zera prawie wszędzie na zbiorze $A \Rightarrow \frac{f_n}{g_n} \xrightarrow{pr.j.A} \frac{f}{g}$

D] Wynika z własności (prj15) i (prj19).

$$(prj23) \quad f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \wedge g_n \xrightarrow{pr.j.A} g \wedge g, g_1, g_2, \dots \text{różne od zera prawie wszędzie na zbiorze } A \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \frac{f_n}{g_n} \xrightarrow{pr.j.A} \frac{f}{g}$$

D] Wynika z własności (prj16) i (prj21).

(prj24) Z] 1° f, f_1, f_2, \dots są funkcjami mierzalnymi μ i skończonymi prawie wszędzie na zbiorze A w przestrzeni z miarą (X, \mathcal{S}, μ) .

2° h jest skończoną funkcją rzeczywistą o dziedzinie $H \in \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{B} jest σ -ciałem zbiorów borelowskich na prostej \mathbb{R} .

3° Y jest zbiorem domkniętym w przestrzeni H i takim, że $f(A), f_1(A), f_2(A), \dots \subset Y$.

4° $\mu(A) < \infty \wedge h$ jest funkcją ciągłą na zbiorze Y albo $\mu(A) = \infty \wedge h$ jest funkcją jednostajnie ciągłą na zbiorze Y .

$$T] \quad f_n \xrightarrow{pr.j.A} f \Rightarrow h(f_n) \xrightarrow{pr.j.A} h(f)$$

D] Gdy $\mu(A) < \infty$, własność powyższa wynika z własności (prj11) i (prw18). Gdy natomiast $\mu(A) = \infty$, to z definicji zbieżności prawie jednostajnej i własności (jz16)

§ 214. Zbieżność według miary

Mówimy, że ciąg (f_n) jest zbieżny według miary na zbiorze A do funkcji f i piszemy

$$f_n \xrightarrow{\mu.A} f \text{ albo } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \xrightarrow{\mu.A} f$$

wtedy i tylko wtedy, gdy w danej przestrzeni z miarą (X, \mathcal{S}, μ) : $A \in \mathcal{S} \wedge f, f_1, f_2, \dots$ są funkcjami mierzalnymi μ na zbiorze A i skończonymi prawie wszędzie na zbiorze $A \wedge$