

### § 164. Twierdzenie

- Z] 1<sup>o</sup> Dana jest przestrzeń metryczna  $X$ .  
 2<sup>o</sup>  $\mathcal{B}$  jest  $\sigma$ -ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni  $X$ .  
 3<sup>o</sup>  $D \in \mathcal{B} \wedge D \neq \emptyset$ .  
 4<sup>o</sup>  $\mathcal{D}$  jest  $\sigma$ -ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni  $D$ .  
T]  $\mathcal{D}$  jest klasą wszystkich zbiorów borelowskich przestrzeni  $X$  zawartych w  $D$ .  
D] Jeśli  $A \in \mathcal{D}$ , to na mocy twierdzenia § 163 istnieje taki zbiór  $B$  borelowski w przestrzeni  $X$ , że  $A = B \cap D$ , skąd  $A \in \mathcal{B} \wedge A \subset D$ .  
 Jeśli - odwrotnie -  $A \in \mathcal{B} \wedge A \subset D$ , to z uwagi na równość  $A = A \cap D$  jest  $A \in \mathcal{B}/D = \mathcal{D}$ .

### § 165. Obrazy i przeciwobrazy zbiorów i ich klas

W niniejszym paragrafie uściślimy pojęcia obrazów i przeciwobrazów podane w § 7.

Niech będą dane dwie przestrzenie  $X$  i  $Y$  oraz funkcja  $\tau$  o dziedzinie  $T \subset X$  i przeciwdziedzinie  $U \subset Y$ .

Obrazem dowolnego zbioru  $A \subset T$  nazwalimy zbiór

$$(100) \quad \tau(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{y : y = \tau(x) \wedge x \in A\} \subset U$$

Z tej definicji wynika, że

$$(101) \quad x \in A \Rightarrow \tau(x) \in \tau(A)$$

ale nie zawsze jest na odwrót, gdyż może się zdarzyć, że na przykład

$$(102) \quad \bigvee_{A_1, A_2 \subset T} \tau(A_1) = \tau(A_2) \wedge A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$$

jak w przypadku funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej  $c(x) = x^2$  dla  $A_1 = \langle -2; -1 \rangle$  i  $A_2 = \langle 1; 2 \rangle$ .

Ze wzoru (100) wynika, że

$$U = \tau(T)$$

Zgodnie z powyższą symboliką funkcję  $\tau$  można traktować jako funkcję zbioru, której dziedziną jest klasa  $\mathcal{T}$  wszystkich podzbiorów zbioru  $T$ , a przeciwdziedziną klasa  $\mathcal{U}$  wszystkich podzbiorów zbioru  $U$ , z założeniem, że obrazem zbioru jednoelementowego jest zawsze zbiór jednoelementowy i umową, że



$$(*) \quad \bigwedge_{x \in T} \{x\} = x \wedge \bigwedge_{y \in U} \{y\} = y$$

Z kolei obrazem dowolnej klasy zbiorów  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$  będziemy nazywać klasę zbiorów

$$(103) \quad \tau(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{B : B = \tau(A) \wedge A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{U}$$

Z tej definicji wynika, że

$$(104) \quad A \in \mathcal{A} \implies \tau(A) \in \tau(\mathcal{A})$$

ale nie zawsze bywa odwrotnie, analogicznie do przypadku (102).

Ze wzoru (103) wynika w szczególności, że

$$\mathcal{U} = \tau(\mathcal{T})$$

Zgodnie z powyższą symboliką funkcję  $\tau$  można traktować jako funkcję klas zbiorów, której dziedziną jest zbiór wszystkich podklas klasy  $\mathcal{T}$ , a przeciwdziedziną zbiór wszystkich podklas klasy  $\mathcal{U}$ , z przyjęciem umowy, że klasę składającą się z jednego tylko zbioru z klasy  $\mathcal{T}$  czy  $\mathcal{U}$  utożsamiamy z tym zbiorem i nazywamy klasą jednozbiorową, z założeniem, że obrazem klasy jednozbiorowej jest zawsze klasa jednozbiorowa, a obrazem klasy pustej jest klasa pusta. Klasą pustą nazywamy klasę nie zawierającą żadnego zbioru albo zawierającą tylko zbiór pusty. Klasę pustą identyfikujemy ze zbiorem pustym.

W przypadku gdy zachodzi kolizja między symbolem liczby 0 i symbolem zbioru pustego, ten ostatni będziemy oznaczać symbolem  $\emptyset$ .

Przeciwbrazem dowolnego zbioru  $B \subset U$  będziemy nazywać zbiór

$$(105) \quad \tau^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \tau(x) \in B\}$$

Z tej definicji wynika bezpośrednio, że

$$(106) \quad x \in \tau^{-1}(B) \iff \tau(x) \in B$$

$$(107) \quad B = \tau(\tau^{-1}(B)), \text{ w szczególności } y = \tau(\tau^{-1}(y)), \text{ gdzie } y \in U$$

$$(108) \quad A \subset \tau^{-1}(\tau(A)), \text{ w szczególności } x \subset \tau^{-1}(\tau(x)), \text{ gdzie } x \in T$$

(w ogólnym ujęciu we wzorze tym nie można zastąpić znaku  $\subset$  znakiem równości ze względu, na przykład, na przypadek (102))

Ze wzorów (107) i (108) wynikają bezpośrednio wzory

$$(109) \quad A = \tau^{-1}(B) \implies B = \tau(A)$$



$$(110) \quad B = \tau(A) \Rightarrow A \subset \tau^{-1}(B)$$

Z definicji (105) wynika, że

$$(111) \quad \tau = \tau^{-1}(U)$$

Funkcja  $\tau^{-1}$  jest funkcją zbioru. Jej dziedziną jest klasa  $\mathcal{U}$ , a przeciwdziedziną pewna podklasa klasy  $\mathcal{T}$ . Jak widać bowiem z przypadku (102), mogą w klasie  $\mathcal{T}$  występować zbiory  $A$ , dla których  $\tau(A) = B$ , a które nie są przeciwobrazami zbioru  $B$ , a więc zbiory  $A$  nie będące wartościami funkcji  $\tau^{-1}$ .

Przyjmując umowę (\*), przeciwobrazy zbiorów jednopunktowych  $\{y\}$ , gdzie  $y \in U$ , będziemy oznaczać symbolem  $\tau^{-1}(y)$ . Nie muszą być one zbiorami jednopunktowymi.

Przeciwobrazem dowolnej klasy zbiorów  $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$  będziemy nazywać klasę zbiorów

$$(112) \quad \tau^{-1}(\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A : \tau(A) \in \mathcal{B}\}$$

Analogicznie do wzorów (106), ..., (110) otrzymujemy wzory

$$(113) \quad A \in \tau^{-1}(\mathcal{B}) \iff \tau(A) \in \mathcal{B}$$

$$(114) \quad \mathcal{B} = \tau(\tau^{-1}(\mathcal{B}))$$

$$(115) \quad \mathcal{A} \subset \tau^{-1}(\tau(\mathcal{A}))$$

$$(116) \quad \mathcal{A} = \tau^{-1}(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B} = \tau(\mathcal{A})$$

$$(117) \quad \mathcal{B} = \tau(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A} \subset \tau^{-1}(\mathcal{B})$$

Z uwagi na to, że przeciwdziedziną funkcji zbioru  $\tau^{-1}$  nie jest na ogół cała klasa  $\mathcal{T}$ , nie otrzymujemy wzoru analogicznego do (111), ale

$$(118) \quad \tau^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{T}$$

Klasa przeciwobrazów zbiorów należących do klasy  $\mathcal{B}$  zawiera się w przeciwobrazie tej klasy, tzn.

$$(119) \quad \{A : A = \tau^{-1}(B) \wedge B \in \mathcal{B}\} \subset \tau^{-1}(\mathcal{B})$$

Wynika to z definicji (112) i implikacji (109). We wzorze (119) nie można na ogół zastąpić znaku  $\subset$  znakiem równości, ponieważ – jak to już było powiedziane – mogą występować zbiory  $A$  należące

do klasy (112), a nie będące przeciwobrazami żadnych zbiorów z klasy  $\mathcal{B}$ .

Funkcja  $\tau^{-1}$  tak rozpatrywana jest funkcją klas zbiorów. Jej dziedziną jest zbiór wszystkich podklas klasy  $\mathcal{U}$ , a przeciwdziedziną zbiór pewnych podklas klasy  $\mathcal{T}$ . Jeśli klasa  $\mathcal{B}$  składa się z jednego tylko zbioru  $B \in \mathcal{U}$ , przyjmujemy umowę, że  $\tau^{-1}(\mathcal{B}) = \tau^{-1}(B)$ .

Udowodnimy jeszcze kilka własności obrazów i przeciwobrazów, zachowując poprzednią symbolikę.

$$(120) \quad A_1 \subset A_2 \Rightarrow \tau(A_1) \subset \tau(A_2)$$

$$\begin{aligned} \text{D)} \quad A_1 \subset A_2 &\Leftrightarrow \left( \bigwedge_{x \in T} x \in A_1 \Rightarrow x \in A_2 \right) \xrightarrow{(101)} \\ &\xrightarrow{(101)} \left( \bigwedge_{x \in T} x \in A_1 \Rightarrow \tau(x) \in \tau(A_2) \right) \xrightarrow{(100)} \\ &\xrightarrow{(100)} \left( \bigwedge_{\tau(x) \in U} \tau(x) \in \tau(A_1) \Rightarrow \tau(x) \in \tau(A_2) \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tau(A_1) \subset \tau(A_2) \end{aligned}$$

$$(121) \quad \tau \left( \bigcup_{k=1}^m A_k \right) = \bigcup_{k=1}^m \tau(A_k)$$

$$\begin{aligned} \text{D)} \quad \tau \left( \bigcup_{k=1}^m A_k \right) &\xrightarrow{(100)} \{ y : y = \tau(x) \wedge x \in \bigcup_{k=1}^m A_k \} = \\ &= \{ y : y = \tau(x) \wedge (x \in A_1 \vee \dots \vee x \in A_m) \} = \\ &= \bigcup_{k=1}^m \{ y : y = \tau(x) \wedge x \in A_k \} \xrightarrow{(100)} \bigcup_{k=1}^m \tau(A_k) \end{aligned}$$

$$(122) \quad \tau \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tau(A_k)$$

D) Analogiczny do poprzedniego.

$$(123) \quad \tau(A_1 - A_2) \supset \tau(A_1) - \tau(A_2)$$

$$\begin{aligned} \text{D)} \quad (A_1 - A_2) \cup A_2 &\supset A_1 \xrightarrow[(121)]{(120)} \\ &\xrightarrow[(121)]{(120)} \tau(A_1 - A_2) \cup \tau(A_2) \supset \tau(A_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tau(A_1 - A_2) \cup \tau(A_2) - \tau(A_2) \supset \tau(A_1) - \tau(A_2) \Rightarrow \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau(A_1 - A_2) - \tau(A_2) &\supset \tau(A_1) - \tau(A_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau(A_1 - A_2) &\supset \tau(A_1) - \tau(A_2) \end{aligned}$$

Przykład (102) pokazuje, że we wzorze (123) nie można znaku  $\supset$  zastąpić w przypadku ogólnym znakiem równości.

$$(124) \quad \tau \left( \bigcap_{k=1}^m A_k \right) \subset \bigcap_{k=1}^m \tau(A_k)$$

D] Wynika z (120), ponieważ

$$\begin{aligned} \bigwedge_{k \in \{1, \dots, m\}} \bigcap_{k=1}^m A_k &\subset A_k \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigwedge_{k \in \{1, \dots, m\}} \tau \left( \bigcap_{k=1}^m A_k \right) &\subset \tau(A_k) \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau \left( \bigcap_{k=1}^m A_k \right) &\subset \bigcap_{k=1}^m \tau(A_k) \end{aligned}$$

Przykład (102) pokazuje, że we wzorze (124) nie można znaku  $\subset$  zastąpić znakiem równości.

$$(125) \quad \tau \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \tau(A_k)$$

D] Analogiczny do poprzedniego.

$$(126) \quad B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow \tau^{-1}(B_1) \subset \tau^{-1}(B_2)$$

$$\underline{D]} \quad B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow \left( \bigwedge_{x \in T} \tau(x) \in B_1 \Rightarrow \tau(x) \in B_2 \right) \Leftrightarrow_{(106)}$$

$$\Leftrightarrow_{(106)} \left( \bigwedge_{x \in T} x \in \tau^{-1}(B_1) \Rightarrow x \in \tau^{-1}(B_2) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tau^{-1}(B_1) \subset \tau^{-1}(B_2)$$

$$(127) \quad \tau^{-1} \left( \bigcup_{k=1}^m B_k \right) = \bigcup_{k=1}^m \tau^{-1}(B_k)$$

D] Wynika bezpośrednio z definicji (105).

$$(128) \quad \tau^{-1} \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tau^{-1}(B_k)$$

D] Wynika bezpośrednio z definicji (105).

Również bezpośrednio z definicji (105) wynikają wzory

$$(129) \quad \tau^{-1}(B_1 - B_2) = \tau^{-1}(B_1) - \tau^{-1}(B_2)$$

$$(130) \quad \tau^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^m B_k\right) = \bigcap_{k=1}^m \tau^{-1}(B_k)$$

$$(131) \quad \tau^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tau^{-1}(B_k)$$

Dla klas zbiorów otrzymuje się wzory analogiczne do (120), ..., (131).

Przejdziemy teraz do przypadku szczególnego, gdy funkcja  $\tau$  jest jedno-jednoznaczna, czyli różnowartościowa. Wtedy i tylko wtedy jest

$$(132) \quad \bigwedge_{x \in T} \bigwedge_{y \in U} x = \tau^{-1}(y) \Leftrightarrow y = \tau(x)$$

skąd wynika, że

$$(133) \quad \bigwedge_{x \in T} \tau^{-1}(\tau(x)) = x \quad \wedge \quad \bigwedge_{y \in U} \tau(\tau^{-1}(y)) = y$$

następnie

$$(134) \quad \bigwedge_{A \in \mathcal{F}} \tau^{-1}(\tau(A)) = A \quad \wedge \quad \bigwedge_{B \in \mathcal{U}} \tau(\tau^{-1}(B)) = B$$

a stąd

$$(135) \quad \bigwedge_{A \in \mathcal{F}} \bigwedge_{B \in \mathcal{U}} A = \tau^{-1}(B) \Leftrightarrow B = \tau(A)$$

Wreszcie na mocy (112), (119) i (135) mamy

$$\bigwedge_{\mathcal{B} \subset \mathcal{U}} \tau^{-1}(\mathcal{B}) = \{A : B = \tau(A) \wedge B \in \mathcal{B}\} = \{A : A = \tau^{-1}(B) \wedge B \in \mathcal{B}\}$$

Zatem dla funkcji  $\tau$  różnowartościowych przeciwobraz klasy  $\mathcal{B}$  jest zbiorem wszystkich przeciwobrazów zbiorów z klasy  $\mathcal{B}$ .

Wzór (132) oznacza, że dla funkcji  $\tau$  różnowartościowej  $\tau^{-1}$  jest funkcją odwrotną, następnie funkcja  $\tau^{-1}$  jest różnowartościowa i  $\tau$  jest jej funkcją odwrotną.

Dla funkcji  $\tau$  różnowartościowych można wzór (120) zastąpić mocniejszym



$$(136) \quad A_1 \subset A_2 \iff \tau(A_1) \subset \tau(A_2)$$

Istotnie, na mocy (126)

$$\tau(A_1) \subset \tau(A_2) \iff \tau^{-1}(\tau(A_1)) \subset \tau^{-1}(\tau(A_2)) \stackrel{(134)}{\iff} A_1 \subset A_2$$

Dla funkcji  $\tau$  różnowartościowych można również wzór (123) zastąpić wzorem

$$(137) \quad \tau(A_1 - A_2) = \tau(A_1) - \tau(A_2)$$

ponieważ na mocy (129) i (134)

$$\tau(A_1) - \tau(A_2) = \tau(\tau^{-1}(\tau(A_1) - \tau(A_2))) = \tau(\tau^{-1}(\tau(A_1)) - \tau^{-1}(\tau(A_2))) = \tau(A_1 - A_2)$$

następnie wzór (124) zastąpić można wzorem

$$(138) \quad \tau\left(\bigcap_{k=1}^m A_k\right) = \bigcap_{k=1}^m \tau(A_k)$$

ponieważ na mocy (130) i (134)

$$\bigcap_{k=1}^m \tau(A_k) = \tau\left(\tau^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^m \tau(A_k)\right)\right) = \tau\left(\bigcap_{k=1}^m \tau^{-1}(\tau(A_k))\right) = \tau\left(\bigcap_{k=1}^m A_k\right)$$

i analogicznie wzór (125) zastąpić wzorem

$$(139) \quad \tau\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tau(A_k)$$

Dla klas zbiorów otrzymuje się w przypadku funkcji  $\tau$  różnowartościowej wzory analogiczne do (134), ..., (139) wychodząc z analogii wzorów (132) i (135).

#### § 166. Zbiory otwarte w podprzestrzeniach danej przestrzeni metrycznej

Niech będzie dana przestrzeń metryczna  $X$ . Z definicji zbioru otwartego i własności (w2) z § 52 wynika, że wszystkie zbiory otwarte przestrzeni  $X$  zawarte w dowolnym zbiorze  $B \subset X$  takim, że  $B^0 \neq \emptyset$ , są zawarte we wnętrzu zbioru  $B$ , czyli w zbiorze  $B^0$ . Niech  $\mathcal{G}$  będzie klasą wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni  $X$ . Udowodnimy następujące twierdzenia.



## Twierdzenie (A)

$\mathcal{G}|B^0$  jest klasą wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni  $X$  zawartych w zbiorze  $B$ .

D] Jeśli  $D$  jest dowolnym zbiorem klasy  $\mathcal{G}|B^0$ , to istnieje taki zbiór otwarty  $G$  przestrzeni  $X$ , że  $D = G \cap B^0$  i na mocy twierdzenia § 60  $D$  jest zbiorem otwartym przestrzeni  $X$ . Ponadto  $D \subset B^0 \subset B$ .

Odwrotnie – jeśli  $D$  jest zbiorem otwartym przestrzeni  $X$  zawartym w zbiorze  $B$ , to jak już wykazaliśmy,  $D \subset B^0$  i wobec tego  $D = D \cap B^0 \Rightarrow D \in \mathcal{G}|B^0$ . Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

Z powyższego twierdzenia wynika na mocy twierdzenia § 162, że klasa wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni  $X$  zawartych w zbiorze  $B$  jest klasą wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni  $B^0$ , a zawiera się w klasie wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni  $B$ , gdyż  $B^0 \subset B \Rightarrow \mathcal{G}|B^0 \subset \mathcal{G}|B$ .

## Twierdzenie (B)

Klasa wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni  $X$  zawartych w zbiorze  $B$  jest identyczna z klasą wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni  $B$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $B$  jest zbiorem otwartym przestrzeni  $X$ .

D] Gdy  $B$  jest zbiorem otwartym przestrzeni  $X$ , tzn.  $B = B^0$ , wtedy na mocy twierdzenia (A) i twierdzenia § 162 klasa wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni  $X$  zawartych w zbiorze  $B$  jest identyczna z klasą wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni  $B$ .

Gdy  $B$  nie jest zbiorem otwartym przestrzeni  $X$ , to na mocy własności (w5) z § 52 jest jednak zbiorem otwartym przestrzeni  $B$ , co dowodzi słuszności twierdzenia (B).

Punktem wewnętrznym zbioru  $B$  będziemy nazywać każdy punkt należący do zbioru  $B^0$ . Na mocy twierdzenia § 161

$x_0$  jest punktem wewnętrznym zbioru  $B \iff$

$$\iff \bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \{x : |x - x_0| < \varepsilon\} \subset B^0$$

## § 167. Granica funkcji w punkcie

Niech  $f$  będzie funkcją o dziedzinie  $T \subset X$  i przeciwdziedzinie  $U \subset Y$ , gdzie  $X$  i  $Y$  są danymi przestrzeniami metrycznymi.

Punkt  $x_0$  nazywamy punktem skupienia zbioru  $T$  wtedy i tylko wtedy, gdy



$$\bigvee_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0}} x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

Punkt  $y_0 \in U$  nazywamy granica funkcji  $f$  w punkcie skupienia  $x_0 \in T$  i piszemy

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{albo} \quad f(x) \rightarrow y_0 \quad x \rightarrow x_0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y_0$$

**Twierdzenie (A)**

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff$$

$$\iff \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x \in T} (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon)$$

**D]** Załóżmy, że

$$(*) \quad \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x \in T} (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon)$$

Wtedy

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > N}} |f(x_k) - y_0| < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow & \bigwedge_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y_0 \Rightarrow y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \end{aligned}$$

Założmy teraz, że warunek  $(*)$  nie jest spełniony, czyli

$$\bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{x \in T} 0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - y_0| \geq \varepsilon$$

czyli

$$\bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \bigvee_{x_k \in T} 0 < |x_k - x_0| < \frac{1}{k} \wedge |f(x_k) - y_0| \geq \varepsilon$$

Zatem

$$\bigvee_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} y_0 \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \Rightarrow y_0 \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

W ten sposób dowód twierdzenia (A) został zakończony.

Przechodzimy do przypadku, gdy  $f$  jest funkcją rzeczywistą, tzn.  $V = \mathbb{R}_0$ . Choć  $\mathbb{R}_0$  nie jest przestrzenią metryczną, to jednak na mocy § 71 przedłużamy definicję granicy funkcji  $f$  w punkcie skupienia  $x_0 \in T$  również i na ten przypadek, tzn.

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}_0 \Rightarrow \bigwedge_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y_0 \in \mathbb{R}_0$$

Natomiast do tego przypadku nie stosuje się twierdzenie (A).

Granica dolną funkcji  $f$  w punkcie skupienia  $x_0 \in T$  nazywamy liczbę

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ y : y \in U \wedge \bigvee_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} y = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \right\}$$

Granica górną funkcji  $f$  w punkcie skupienia  $x_0 \in T$  nazywamy liczbę

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ y : y \in U \wedge \bigvee_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} y = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \right\}$$

**Twierdzenie (B)**

$$\bigwedge_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \leq$$

$$\leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

D] Niech będzie dany dowolny ciąg

$$x_1, x_2, \dots \in T \wedge x_1, x_2, \dots \neq x_0 \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$$

i niech



$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = d$$

Na mocy twierdzenia § 42

$$\bigwedge_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r > d}} \text{ nierówność } f(x_k) < r \text{ jest spełniona dla nieskończenie}$$

wielu  $k$

natomiast

$$\bigwedge_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r < d}} \text{ nierówność } f(x) < r \text{ jest spełniona co najwyżej dla skoń-}$$

czenie wielu  $k$

Zatem

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{i_n \in \mathbb{N}} d \leq f(x_{i_n}) < d + \frac{1}{n}$$

czyli istnieje taki podciąg  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots \in T$ ,  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots \neq x_0$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n} = x_0$ , że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{i_n}) = d$$

Z definicji granicy dolnej funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  wynika, że musi być

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq d = \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$$

Analogicznie dowodzimy trzecią nierówność z tezy twierdzenia (B). Druga była wykazana w § 43. W ten sposób dowód twierdzenia (B) został zakończony.

Twierdzenie (C)

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow y_0 = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

D] Na mocy twierdzenia (B)

$$\bigwedge_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \leq$$

$$\leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Jeśli zatem  $y_0 = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , to

$$\bigwedge_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} y_0 = \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \limsup_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Na odwrót,

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow \bigwedge_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} y_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \Rightarrow y_0 =$$

$$= \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Twierdzenie (D)

$$y_0 = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r < y_0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x \in T} (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) > r) \wedge \bigwedge_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r > y_0}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{x \in T} (0 < |x - x_0| < \delta \wedge f(x) < r)$$

$$y_0 = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r < y_0}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{x \in T} (0 < |x - x_0| < \delta \wedge$$

$$\wedge f(x) > r) \wedge \bigwedge_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r > y_0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x \in T} (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < r)$$

D Załóżmy, że

$$y_0 = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

i niech  $r < y_0$ . Gdyby

$$\bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{x \in T} 0 < |x - x_0| < \delta \wedge f(x) \leq r$$

to

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{x_n \in T} 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge f(x_n) \leq r$$

skąd



$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq r$$

i na mocy twierdzenia (B)

$$y_0 = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq r < y_0$$

co jest sprzeczne. Zatem

$$(**) \quad \bigwedge_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r < y_0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x \in T} (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > r)$$

Niech teraz  $r > y_0$ . Niech  $\delta$  będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Z definicji granicy dolnej wynika, że

$$\bigvee_{\substack{y \in \mathbb{R} \\ y_0 \leq y < r}} \bigvee_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} y = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \Rightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{N}} 0 < |x_n - x_0| < \delta \wedge f(x_n) < r$$

Innymi słowy

$$(***) \quad \bigwedge_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r > y_0}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{x \in T} (0 < |x - x_0| < \delta \wedge f(x) < r)$$

Założmy teraz, że - odwrotnie - są spełnione warunki (\*\*) i (\*\*\*). Niech

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ y : y \in U \bigvee_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_1, x_2, \dots \neq x_0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0}} y = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \right\}$$

Na mocy (\*\*)

$$\bigwedge_{y \in Q} \bigwedge_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r < y_0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > n}} 0 < |x_k - x_0| < \delta \wedge f(x_k) > r$$

Jeśli wprowadzimy  $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} y_0 - r > 0$ , to mamy z powyższego

$$(i) \quad \bigwedge_{y \in Q} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} y \geq y_0 - \varepsilon \Rightarrow \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq y_0$$

Jeśli  $y_0 = \infty$ , to  $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = y_0$ . Założmy zatem, że  $y_0 < \infty$ .

Na mocy (\*\*\*)

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{x_n \in T} 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge f(x_n) < y_0 + \varepsilon$$

skąd

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq y_0$$

a na mocy twierdzenia (B)

$$(ii) \quad \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq y_0$$

Z (i) i (ii) wynika, że

$$y_0 = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

W ten sposób zakończyliśmy dowód pierwszej części tezy twierdzenia (D). Drugą część dowodzimy analogicznie.

**Twierdzenie (E)**

Z] Funkcja  $f$  jest funkcją rzeczywistą o dziedzinie  $T \subset \mathbb{R}$  i przeciwdziedzinie  $U \subset \mathbb{R}$ .

T] Definicje granicy funkcji  $f$  w punkcie podane w § 73 i § 167 są równoważne.

D] Załóżmy, że  $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  w sensie § 167. Wynika stąd, że

$$\bigwedge_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_k \nearrow x_0}} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y_0 \wedge \bigwedge_{\substack{x_1, x_2, \dots \in T \\ x_k \searrow x_0}} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x_0-) = f(x_0+) = y_0$$

a zatem  $y_0$  jest granicą funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  w sensie § 73.

Założmy teraz, że - odwrotnie -  $y_0$  jest granicą funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  w sensie § 73. Gdyby wtedy  $y_0$  nie było granicą funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  w sensie § 167, to na mocy twierdzenia (A)

$$\bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{x \in T} 0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - y_0| \geq \varepsilon$$

Wobec tego istniałby ciąg  $x_1, x_2, \dots \in T$  określony rekurencyjnie wzorami

$$0 < |x_1 - x_0| < 1 \wedge \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > 1}} 0 < |x_k - x_0| < \min \left( \frac{1}{k}, |x_{k-1} - x_0| \right) \wedge \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} |f(x_k) - y_0| \geq \varepsilon$$



czyli ciąg taki, że

$$|x_k - x_0| \rightarrow 0 \wedge \bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} |f(x_k) - y_0| \geq \varepsilon$$

Powyższy ciąg musiałby zawierać podciąg  $(y_k)$  taki, że

$$y_k \rightarrow x_0 \text{ albo } y_k \rightarrow x_0$$

z tym, że

$$\bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} |f(x_k) - y_0| \geq \varepsilon$$

co przeczyłoby założeniu, że  $y_0$  jest granicą funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  w sensie § 73. Zatem  $y_0$  jest również granicą funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  w sensie § 167 i tym samym twierdzenie (E) zostało udowodnione.

#### § 168. Ciągłość funkcji w przestrzeni metrycznej

Dane są dwie przestrzenie metryczne  $X$  i  $Y$ . Dana jest również funkcja  $f$  o dziedzinie  $T \subset X$  i przeciwdziedzinie  $U \subset Y$ .

Funkcję  $f$  będziemy nazywać ciągłą w punkcie  $x_0 \in T$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(140) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Funkcję  $f$  będziemy nazywać ciągłą na zbiorze  $A \subset T$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła w każdym punkcie  $x_0 \in A$ .

Funkcję  $f$  będziemy nazywać ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła na całej swej dziedzinie  $T$ .

Z definicji wynika, że funkcja ciągła na zbiorze  $A$  jest ciągła na każdym zbiorze  $B \subset A$ . W szczególności funkcja ciągła jest ciągła na każdym zbiorze  $A \subset T$ .

**Twierdzenie (A)**

$$\begin{aligned} & f \text{ jest funkcją ciągłą w punkcie } x_0 \iff \\ \iff & \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x \in T} \left( 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right) \end{aligned}$$

**D]** Wykażemy najpierw, że

(\*)  $f$  jest funkcją ciągłą w punkcie  $x_0 \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x \in T} \left( 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right)$$

Otóż, gdyby tak nie było, to

$$\bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{x \in T} \left( 0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \right)$$

skąd

$$\bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \bigvee_{x_k \in T} \left( 0 < |x_k - x_0| < \frac{1}{k} \wedge |f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon \right)$$

a następnie

$$\bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{x_1, x_2, \dots \in T} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \wedge \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} |f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon \right)$$

co przeczyłoby (140), czyli założeniu, że funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $x_0$ . Wobec tego implikacja (\*) jest prawdziwa.

Wykażemy teraz, że - odwrotnie -

$$(**) \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x \in T} \left( 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $x_0$

Z uczynionego w (\*\*) założenia wynika, że

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x_1, x_2, \dots \in T} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \left( 0 < |x_k - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon \right)$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{x_1, x_2, \dots \in T} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \Rightarrow \right. \\ & \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigvee_{k_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > k_0}} 0 < |x_k - x_0| < \delta \wedge |f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow \\ & \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{k_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > k_0}} |f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0) \end{aligned}$$



i na mocy definicji (140)  $f$  jest funkcją ciągłą w punkcie  $x_0$ , czyli implikacja  $(**)$  jest prawdziwa. Z implikacji  $(*)$  i  $(**)$  wynika teza twierdzenia.

### Twierdzenie (B)

Z]  $A$  jest dowolnym zbiorem otwartym takim, że  $A \subset T^0 \wedge x_0 \in A$ .

T] (I)  $f$  jest funkcją ciągłą w punkcie  $x_0 \iff$

$$\iff \text{(II)} \quad \bigwedge_{x_1, x_2, \dots \in A} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0) \right) \iff$$

$$\iff \text{(III)} \quad \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x \in A} \left( 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right)$$

D] Implikacja  $(I) \Rightarrow (II)$  wynika bezpośrednio z definicji (140). Dowód implikacji  $(II) \Rightarrow (III)$  jest analogiczny do dowodu implikacji  $(*)$  w twierdzeniu (A). Wystarczy zatem udowodnić jeszcze implikację  $(III) \Rightarrow (I)$ .

Z założenia, że  $x_0 \in A$  i  $A = A^0$  wynika, że  $x_0$  jest punktem wewnętrznym zbioru  $A$  i wobec tego

$$(i) \quad \bigvee_{\substack{\delta_1 \in \mathbb{R} \\ \delta_1 > 0}} \{x : |x - x_0| < \delta_1\} \subset A$$

Niech  $\delta_2 = \min(\delta, \delta_1)$ . Wtedy na mocy (III) i (i)

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta_2 \in \mathbb{R} \\ \delta_2 > 0}} x \in \{x : |x - x_0| < \delta_2\} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

skąd

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{x_1, x_2, \dots \in T} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \Rightarrow \bigvee_{\substack{\delta_2 \in \mathbb{R} \\ \delta_2 > 0}} \bigwedge_{\substack{k_0 \in \mathbb{N} \\ k > k_0}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > k_0}} |f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon \right) \\ & |x_k - x_0| < \delta_2 \Rightarrow \bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{\substack{k_0 \in \mathbb{N} \\ k > k_0}} \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > k_0}} |f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow \\ & \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0) \end{aligned}$$

czyli funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $x_0$ . To dowodzi, że implikacja  $(III) \Rightarrow (I)$  jest prawdziwa i tym samym dowód twierdzenia (B) został zakończony.

Funkcję  $f$  będziemy nazywać jednostajnie ciągłą na zbiorze  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x_0, x \in A} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Z powyższej definicji wynika, że funkcja jednostajnie ciągła na zbiorze otwartym  $A$  jest zawsze ciągła na tym zbiorze.

### § 169. Twierdzenie

**Z]** Dane są dwie przestrzenie metryczne  $X$  i  $Y$  oraz funkcja ciągła  $\tau$  o dziedzinie  $T \subset X$  i przeciwdziedzinie  $U \subset Y$ .

**T]** I.  $A = \tau^{-1}(B) \cap T$  jest zbiorem otwartym przestrzeni  $U \Rightarrow$   
 $\Rightarrow A$  jest zbiorem otwartym przestrzeni  $T$ .

II.  $A = \tau^{-1}(B) \cap T$  jest zbiorem borelowskim przestrzeni  $U \Rightarrow$   
 $\Rightarrow A$  jest zbiorem borelowskim przestrzeni  $T$ .

**D]** Udowodnimy najpierw tezę I. Gdy  $B = \emptyset$ , teza jest oczywista, gdyż na mocy (105) jest  $A = \emptyset$ . Załóżmy więc, że  $B$  jest zbiorem otwartym niepustym. Wtedy na mocy twierdzenia § 161

$$\bigwedge_{\tau(x_0) \in B} \bigvee_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{\tau(x) \in U} \left( |\tau(x) - \tau(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow \tau(x) \in B \right)$$

a na mocy ciągłości funkcji i twierdzenia (A) z § 168

$$\bigwedge_{x_0 \in A} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x \in T} \left( |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\tau(x) - \tau(x_0)| < \varepsilon \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{x_0 \in A} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x \in T} \left( |x - x_0| < \delta \Rightarrow \tau(x) \in B \right) \stackrel{(106)}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{(106)}{\Rightarrow} \bigwedge_{x_0 \in A} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ \delta > 0}} \bigwedge_{x \in T} \left( |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in A = \tau^{-1}(B) \right)$$

Wobec tego na mocy twierdzenia § 161  $A$  jest zbiorem otwartym przestrzeni  $T$ .

Przechodzimy teraz do dowodu tezy II. Niech  $\mathcal{K}$  oznacza klasę tych wszystkich zbiorów  $B \subset U$ , dla których  $\tau^{-1}(B)$  jest zbiorem borelowskim przestrzeni  $T$ . Na mocy udowodnionej już tezy I klasa  $\mathcal{K}$  nie jest pusta, gdyż zawiera wszystkie zbiory otwarte przestrzeni  $U$ . Tym samym klasa  $\mathcal{K}$  spełnia warunek (61) dla  $\delta$ -ciał.

Jeśli  $B \in \mathcal{K}$  czyli  $\tau^{-1}(B)$  jest zbiorem borelowskim przestrzeni  $T$ , to na mocy (129) i (111)

$$\tau^{-1}(U - B) = \tau^{-1}(U) - \tau^{-1}(B) = T - \tau^{-1}(B)$$



wobec czego  $U - B \in \mathcal{K}$ , ponieważ  $T - \tau^{-1}(B)$  jest zbiorem borelowskim przestrzeni  $T$ . Zatem klasa  $\mathcal{K}$  spełnia warunek (62) dla  $\sigma$ -ciała.

Jeśli  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{K}$ , czyli  $\tau^{-1}(B_1), \tau^{-1}(B_2), \dots$  są zbiorami borelowskimi przestrzeni  $T$ , to na mocy (128)

$$\tau^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tau^{-1}(B_k)$$

wobec czego  $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{K}$ , ponieważ  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tau^{-1}(B_k)$  jest zbiorem borelowskim przestrzeni  $T$ . Zatem klasa  $\mathcal{K}$  spełnia warunek (63) i jest  $\sigma$ -ciałem przestrzeni  $T$ .

Ponieważ  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{K}$  zawiera wszystkie zbiory otwarte przestrzeni  $U$ , a ciało  $\mathcal{N}$  zbiorów borelowskich przestrzeni  $U$  jest z definicji najmniejszym  $\sigma$ -ciałem zawierającym wszystkie zbiory otwarte tej przestrzeni, więc

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$$

co oznacza prawdziwość tezy II.

W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

#### § 170. Twierdzenie

Z] 1<sup>o</sup> Dane są dwie przestrzenie metryczne  $X$  i  $Y$  oraz funkcja jedno-jednoznaczna  $\tau$  o dziedzinie  $T \subset X$  i przeciwdziedzinie  $U \subset Y$ .

2<sup>o</sup> Funkcje  $\tau$  i  $\tau^{-1}$  są ciągłe.

3<sup>o</sup>  $\mathcal{K}$  jest  $\sigma$ -ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni  $T$ , a  $\mathcal{N}$   $\sigma$ -ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni  $U$ .

T]  $\mathcal{N} = \tau(\mathcal{K}) \wedge \mathcal{K} = \tau^{-1}(\mathcal{N})$ .

D] Na mocy tezy II twierdzenia § 169 zastosowanej kolejno do funkcji  $\tau$  i  $\tau^{-1}$  mamy

$$(*) \quad \tau^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{K} \wedge \tau(\mathcal{K}) \subset \mathcal{N}$$

skąd na mocy (120) i (134)

$$(**) \quad \mathcal{N} \subset \tau(\mathcal{K}) \wedge \mathcal{K} \subset \tau^{-1}(\mathcal{N})$$

Ze wzorów (\*) i (\*\*) wynika teza dowodzonego twierdzenia.