# Matematyczne aspekty procesu produkcyjnego

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO EKONOMICZNE · WARSZAWA 1969

KRZYSZTOF RACINOWSKI

Redaktor
JADWIGA RYBACKA



*Redaktor techn. Maria Morawska*
*Korektorka Irmina Sterzyńska*

Printed in Poland

Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1969

Zlec. 170/66. Wydanie I. Nakład 2000+200 egz.
Ark. wydawn. 8,5. Ark. druk. 12
Papier druk. sat. kl IV, 70 g, z fabryki papieru w Kluczach
Oddano do skład. 18.IX.68 r. Podpisano do druku 20.III.69 r.
Druk ukończono w kwietniu 69 r.
Cena zł 18,—
Drukarnia im. Rewolucji Październikowej w Warszawie nr 1587/68 P-87



TREŚĆ

str.

## *OD AUTORA*

Celem niniejszej książki jest próba matematycznego sformułowania oraz zbadania ważniejszych własności niektórych pojęć dotyczących ekonomiki i organizacji produkcji.

Konieczność matematycznego formułowania tych pojęć wynika z dwu powodów. Po pierwsze, wiele praktycznych problemów z zakresu produkcji rozwiązuje się dziś za pomocą maszyn matematycznych — dobre matematyczne sformułowanie zagadnienia, chociaż nie zawsze konieczne, pozwala na ogół na lepsze wykorzystanie maszyny do tych właśnie celów. Po drugie, mówienie o organizacji produkcji w języku potocznym jest bardzo rozwlekłe, nieprecyzyjne i niekomunikatywne, co utrudnia przekazywanie wiedzy o tym przedmiocie w sposób dostatecznie ścisły i zwięzły. Natomiast w języku matematyki sprawy te dają się wypowiedzieć jasno, zwięźle i w sposób jednoznaczny.

O ile mi wiadomo, prób matematycznego definiowania pojęć takich jak wyrób, proces produkcji itp. dotychczas jeszcze nie podejmowano, stąd w książce brak niemal zupełnie danych dotyczących literatury. Niech to również będzie przynajmniej częściowym usprawiedliwieniem ewentualnych niedociągnięć tego opracowania.

Podane algorytmy służące do rozwiązywania problemów organizacji produkcji są w zasadzie formułowane tak, aby można je było łatwo realizować maszynowo. Wiadomo, że algorytm prosty do liczenia ręcznego nie nadaje się zazwyczaj do zastosowania maszynowego i na odwrót. Ze względów dydaktycznych podawałem jednakże często algorytmy w postaci wygodnej do rachunku ręcznego, są one bowiem łatwiej zrozumiałe.

W książce zamieszczono kilka sformułowanych przez nas twierdzeń (wraz z dowodami) dotyczących procesów produkcyjnych. Fakty głoszone w tych twierdzeniach nie będą zapewne dla specjalistów od organizacji produkcji rewelacją. Na przykład wiadomo powszechnie, że produkcja masowa jest bardziej opłacalna niż produkcja jednostkowa, jednakże fakt ten udowodnić można jedynie na podstawie jakiegoś konsekwentnie stosowanego systemu pojęć (np. takiego, jaki przyjęto w tym opracowaniu). Podane dowody mają zatem charakter bardziej dydaktyczny niż praktyczny, mogą bardziej interesować studentów niż użytkowników maszyn matematycznych i Czytelnik może je oczywiście pominąć bez szkody dla zrozumienia całości.

Z podanych uwag wynika, że książka jest adresowana przede wszystkim do tych, którzy w organizacji produkcji posługują się lub mają zamiar się posługiwać maszynami matematycznymi, oraz do osób studiujących organizację produkcji (ewentualnie do wykładowców tego przedmiotu) na wyższych uczelniach. Znajdą oni w tej publikacji nie tylko inne sformułowanie zagadnień (pojęć) znanych, ale również pojęcia nowe, takie jak np. nasze ujęcie przepływu materiałów w produkcji.

Myślę, że książka zainteresuje także specjalistów od organizacji maszyn matematycznych. Wiele bowiem zagadnień z tej dziedziny wiąże się ściśle z organizacją fabryki, jakkolwiek w przypadku maszyny matematycznej proces produkcyjny dotyczy obróbki „przedmiotów" zwanych symbolami, w fabryce zaś w procesie produkcyjnym jedne przedmioty przekształca się w inne — zwane wyrobami.

Sądzę, że konfrontacja obu rodzajów procesów produkcyjnych (bo liczenie jest niewątpliwie również pewnego rodzaju procesem produkcyjnym) na pewno okaże się pożyteczna[1].

[1] Podane tu idee są właśnie próbą przeniesienia pewnych koncepcji organizacji maszyn matematycznych (opisanych w mojej książce pt.: *Organizacja maszyn bezadresowych*, Warszawa 1965) na grunt organizacji produkcji.

Używany w pracy zakres matematyki jest stosunkowo niewielki i chociaż posługujemy się niektórymi pojęciami i metodami nie objętymi programem nauczania na uczelniach technicznych i ekonomicznych, nie powinno to sprawić Czytelnikowi większego kłopotu.

Książka składa się z wstępu i trzech rozdziałów.

Wstęp zawiera zwięzłe objaśnienie tych terminów matematycznych używanych w książce, które mogą być nie znane niektórym Czytelnikom. Wyjaśniono więc pojęcia[2] zbioru, działania na zbiorach, relacji, funkcji. We wstępie zamieszczono także krótkie wprowadzenie w zagadnienia formalizacji[3].

Rozdział 1 — *Pojęcia podstawowe* zawiera definicje wyrobu, listy części wyrobu, procesu produkcyjnego, produkcji jednostkowej, seryjnej i masowej oraz pojęcia realizacji procesu produkcyjnego. Podane są tu więc podstawowe pojęcia z zakresu organizacji produkcji.

Rozdział 2 — *Ekonomiczne aspekty produkcji* dotyczy spraw związanych z porównaniem (z różnych punktów widzenia) procesów produkcyjnych. Wprowadzono tu pojęcie kosztów produkcji oraz ich minimalizacji w różnego rodzaju procesach produkcyjnych. Zdefiniowane zostało pojęcie produkcji w toku oraz pojęcie jej wartości, zbadano także przepływ materiałów w procesie produkcyjnym przy założeniu, że na skutek braków część materiałów zostaje stracona.

Rozdział 3 — *Organizacja przebiegu produkcji wyrobu* dotyczy przede wszystkim harmonogramów operacji i harmonogramów obciążeń maszyn. Inne zagadnienia występujące w tym rozdziale wydają się znacznie prostsze i omawianie ich tutaj byłoby nieciekawe.

[2] Szersze objaśnienie tych pojęć Czytelnik znajdzie w książce H. Rasiowej, *Wstęp do matematyki współczesnej*. Warszawa 1968.

[3] Autorem tej partii tekstu jest R. Bartoszyński.

W książce starałem się ograniczyć do tych spraw, które — moim zdaniem — z jednej strony, stanowią podstawę zrozumienia istoty produkcji, z drugiej zaś — odgrywają ważną rolę przy zastosowaniu maszyn matematycznych. Sprawy prostsze z punktu widzenia zastosowania maszyn matematycznych, np. obliczanie zapotrzebowania materiałowego, zostały pominięte, tak jak pominięto również niektóre sprawy trudniejsze, np. harmonogram obciążeń maszyn przy założeniu, że każda część jest obrabiana przez wiele maszyn.

Na zakończenie chciałbym podziękować mgr. W. Matwinowi za niezwykle życzliwy stosunek i pomoc okazywaną mi przy poszukiwaniu (w zakładach pracy) problemów interesujących z punktu widzenia przyjętego w niniejszym opracowaniu; doc. dr. R. Bartoszyńskiemu — za wiele wnikliwych uwag dotyczących strony matematycznej rozpatrywanych zagadnień oraz napisanie pierwszego paragrafu wstępu, doc. dr. inż. B. Pełce — za cenne krytyczne uwagi z zakresu organizacji produkcji.

# WSTĘP

## 1. KILKA UWAG O ZAGADNIENIU FORMALIZACJI

Niniejsza książka poświęcona jest formalizacji pewnej grupy pojęć dotyczących procesów produkcyjnych. Dla ułatwienia zrozumienia jej treści podejmiemy próbę naszkicowania — z ogólniejszego punktu widzenia — problematyki związanej z pojęciem formalizacji.

W największym uproszczeniu, przez formalizację można rozumieć znajdowanie pewnych abstrakcyjnych schematów rzeczywistości, tzn. odkrywanie tego, co jest w niej stałe, mimo zmienności treści empirycznej. Takimi względnie niezmiennymi elementami rzeczywistości są struktury formalne jej obiektów, ich forma wyrażająca się jako stały system stosunków wiążących pewne wartości zmienne.

W zasadzie procesowi formalizacji mogą podlegać bądź teorie będące (w uproszczeniu) organizacjami zbiorów pojęć w pewne systemy wyjaśniające, bądź też w mniejszym lub większym stopniu nie zorganizowane zbiory pojęć, które można by nazwać „preteoriami".

Pełne sformalizowanie, polegające na spełnieniu pewnego układu warunków, które zostaną omówione nieco później, jest możliwe tylko w odniesieniu do teorii, natomiast w odniesieniu do zbioru pojęć nie tworzącego teorii możliwe jest spełnienie tylko niektórych z tych warunków.

Najwygodniej będzie prześledzić problemy formalizacji na przykładzie sytuacji najprostszej, mianowicie takiej, kiedy przedmiotem formalizacji jest nie cała teoria, lecz jedno pojęcie.

W tym przypadku formalizacja sprowadza się do podania definicji tego pojęcia oraz reguł wnioskowania.

Definicja taka ma postać „przekładu" definiowanego pojęcia na jakieś inne pojęcia zaczerpnięte z określonego języka. Do formalizacji używa się na ogół języka matematyki; tak więc, formalizacja pojęcia polega na wyrażeniu go w terminach matematyki, co w konsekwencji pozwala na stosowanie jej metod przy analizie definiowanego pojęcia.

Innymi słowy, dzięki temu, że definiowane pojęcie używane jest zamiennie z pewnym pojęciem matematycznym, uzyskuje się możność zastąpienia jego analizy przez analizę odpowiadającego mu pojęcia matematycznego.

Jest rzeczą oczywistą, że definiowanemu pojęciu można przyporządkować wiele różnych pojęć matematycznych. Ograniczenia wyboru tego przyporządkowania tkwią jednakże w formalizowanej rzeczywistości, a konkretnie w strukturze tych jej obiektów, których abstrakcją jest definiowane pojęcie. Struktura ta narzuca wybór takiego pojęcia matematycznego, które zapewni możliwie dobre jej odzwierciedlenie.

Formułując inaczej, chodzi o to, aby struktura wybranego pojęcia matematycznego była w pewnym sensie „analogiczna" do struktury obiektów desygnowanych przez definiowane pojęcie.

Jak już podkreśliliśmy, konsekwencją formalizacji jest możność zastąpienia analizy formalizowanego pojęcia przez analizę odpowiadającego mu pojęcia matematycznego; stwarza to potencjalną możliwość „przeinterpretowywania" wniosków uzyskanych z analizy pojęcia matematycznego na wnioski dotyczące własności definiowanego pojęcia. Takie „przeinterpretowywanie" wniosków matematycznych na wnioski o rzeczywistości jest ogólną regułą wnioskowania, która wiąże wyniki uzyskane drogą dedukcyjnej analizy pojęć matematyki z sądami o formalizowanej rzeczywistości.



Jasne jest, że nie wszystkim dającym się uzyskać wnioskom matematycznym można nadać interpretację w postaci takich sądów; klasa tego rodzaju wniosków jest ograniczona przez intuicyjne na ogół reguły sensu, tzn. przez kryteria decydujące o tym, co ma sens z punktu widzenia badanej rzeczywistości.

Zastosowanie reguł sensu pozwala na pozostawienie tych wniosków o rzeczywistości płynących z przyjętej formalizacji, które potencjalnie mogą być prawdziwe. Nie oznacza to jednak, że wnioski te istotnie będą prawdziwe. Kryterium, dzięki któremu możemy orzekać o prawdziwości czy fałszywości wniosków uzyskanych za pomocą formalizacji, polega na odwołaniu się do rzeczywistości, której dotyczy treść tych wniosków. Klasa obiektów rzeczywistości, dla których wnioski uzyskane są prawdziwe, wyznacza zakres stosowalności formalizacji.

Reasumując, dotychczas próbowaliśmy przedstawić, czym jest formalizacja, ograniczając się do przypadku pojedynczego pojęcia bądź zbioru pojęć, nie mającego jednakże charakteru teorii. Określając wstępnie formalizację jako „szukanie pewnych abstrakcyjnych schematów rzeczywistości" wyróżniliśmy pewien charakterystyczny dla formalizacji sposób definiowania pojęć, sformułowaliśmy pewną regułę wnioskowania i wskazaliśmy na konieczność korzystania z reguł sensu.

Jasne jest, że w przypadku teorii, będącej organizacją zbioru pojęć w pewien system wyjaśniający, wymagania dotyczące formalizacji są większe. Z grubsza biorąc, z jednej strony chodzi o to, że teoria opiera się na pewnym układzie założeń (postulatów), z drugiej zaś strony zawiera ona pewne prawa wyjaśniające związki między jej pojęciami. Wobec tego system formalny musi opisywać zarówno te postulaty, jak i strukturę wyjaśniających praw teorii.

Tak więc teorię uważa się za sformalizowaną, jeżeli została ona wyrażona *explicite*, bez pozostawienia jakichkolwiek jej aspektów w postaci niejawnej. Dokładniej, oznacza to spełnienie następujących warunków.

Po pierwsze, podania listy wszystkich nie zdefiniowanych terminów (przy definiowaniu bowiem pojęć teorii z konieczności używa się jakichś terminów, które nie są w danej teorii zdefiniowane) i wyjaśnienia ich treści bądź przez odwołanie się do intuicji, bądź przez związanie ich z jakąś szerszą teorią. Takie wyliczenie terminów nie zdefiniowanych i zdefiniowanie przy ich pomocy wszystkich pojęć złożonych pozwala na określenie formalnej struktury znaczenia tych pojęć.

Po drugie, dla sformalizowania teorii konieczne jest sprecyzowanie w jawnej formie reguł sensu, tzn. kryteriów rozstrzygania, które zdania w tej teorii mają sens, a które są (w ramach tej teorii) bezsensowne.

Po trzecie, formalizacja wymaga, aby sprecyzowane były wszystkie podstawowe postulaty teorii, na których opierać się będą rozumowania przeprowadzone w ramach tej teorii.

Po czwarte wreszcie, formalizacja wymaga, aby przytoczone były reguły wnioskowania, tzn. reguły pozwalające wysnuwać prawdziwe wnioski na podstawie prawdziwych przesłanek. Reguły takie mają postać ogólnych praw wnioskowania, zaopatrzonych w dodatkowe, specyficzne dla danej teorii kryteria określające zakres działania tych praw.

Jest rzeczą oczywistą, że powyższe warunki powinny prowadzić do wewnętrznie niesprzecznego systemu, tj. takiego systemu, w którym nie można z przyjętych postulatów za pomocą przyjętych reguł wnioskowania uzyskać dwóch sprzecznych ze sobą wniosków.

Omówione cztery warunki stanowią definicję pełnej formalizacji; mogą one zarazem służyć do oceny stopnia sformalizowania. Mówimy o niepełnej formalizacji, gdy tylko niektóre z tych warunków są spełnione, bądź też gdy któryś z nich jest spełniony tylko częściowo. Warto zwrócić uwagę, że warun-



ki pełnej formalizacji spełnione są przez niektóre tylko teorie matematyczne, natomiast jeżeli chodzi o teorie w naukach empirycznych nie są one nigdy w pełni sformalizowane, przy czym teorie o wyższym stopniu formalizacji są na ogół określane jako bardziej zaawansowane.

W odniesieniu do teorii w naukach empirycznych, których zadaniem jest badanie i wyjaśnianie określonego fragmentu rzeczywistości, formalizacja dostarczając jednoznacznego i obiektywnego języka do wypowiadania praw tej teorii jest narzędziem usprawniającym jej wnioskowanie. Centralnym kryterium oceny dobroci formalizacji z punktu widzenia rzeczywistości jest kryterium adekwatności, rozumianej jako zgodność wniosków wydedukowanych z przyjętego systemu formalnego z danymi empirycznymi. Mówiąc lapidarnie, adekwatność formalizacji wyraża się poprzez stopień jej trafności w stosunku do formalizowanej teorii.

Warto zauważyć, że istotnym warunkiem adekwatności formalizacji danej teorii empirycznej jest trafność wyboru definicji podstawowych pojęć tej teorii (rozumiana jako dobre odzwierciedlenie ich struktury), gdyż — jak to już zostało powiedziane wyżej — trafność tego wyboru pozwala na wnioskowanie o własnościach pojęć teorii empirycznej na podstawie analizy przyporządkowanych im pojęć matematycznych.

Z problemem adekwatności związane są wartości poznawcze płynące z procesu formalizacji. Wartości te są relatywne względem zakresu formalizacji i względem dokładności odzwierciedlenia pojęć teorii przez ich definicje; innymi słowy relatywne względem uproszczeń wprowadzonych przez daną formalizację.

Można wyróżnić z grubsza dwa rodzaje takich uproszczeń, z których każde jest źródłem ograniczeń poznawczych wynikłych z przyjęcia konkretnej formalizacji.

Pierwsze takie uproszczenie w odniesieniu do badanej rzeczywistości związane jest z wyborem tego jej fragmentu, który ma być obiektem formalizacji, i z konieczności — z pominięciem innych, być może nie mniej ważnych aspektów tej rzeczywistości. Uproszczenia te wyznaczają więc zakres formalizacji i oczywiście także zakres możliwych wniosków o rzeczywistości, płynących z analizy przyjętego systemu formalnego.

Drugie uproszczenie wiąże się z tym, że wybrany fragment rzeczywistości może być reprezentowany w danym systemie formalnym w sposób bogatszy lub uboższy informacyjnie. Wybór takiej reprezentacji jest drugim potencjalnym źródłem ograniczeń poznawczych formalizacji. Od wyboru tego zależy dokładność wniosków o rzeczywistości, płynących z analizy przyjętego systemu formalnego.

Tak więc, przy ocenie każdej formalizacji należy wziąć pod uwagę, jakie pojęcia zostały nią objęte, czy intuicyjna treść tych pojęć została trafnie uchwycona w definicjach formalnych i czy twierdzenia utworzonego systemu formalnego prowadzą do uzyskania istotnych informacji o badanym fragmencie rzeczywistości.

Na zakończenie warto podkreślić, iż oprócz wspomnianych już korzyści płynących z formalizacji, takich jak uzyskanie jednoznaczności pojęć i sprecyzowania reguł wnioskowania prowadzących do obiektywizacji danej teorii empirycznej, już sam proces formalizacji może być jednym z podstawowych elementów rozwoju lub nawet tworzenia teorii. Formalizacja jest bowiem nie tylko innym wyrażeniem praw teorii; prowadzić ona może do wykrywania nowych praw i może również stanowić źródło inspiracji w badaniach empirycznych.

## 2. ZBIORY

Pojęcie zbioru jest w matematyce przyjmowane jako pierwotne, tj. nie wymagające definiowania. Dla wyrobienia intuicji warto podać proste przykłady zbiorów: zbiór drzew w lesie,



zbiór uczniów w klasie, zbiór kart w talii, zbiór liczb naturalnych.

Zbiór przedmiotów to tyle, co kolekcja przedmiotów.

Zbiór przedmiotów $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będziemy oznaczali przez $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Przedmioty $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będziemy nazywali elementami zbioru $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Zbiory będziemy oznaczali literami dużymi, ich elementy zaś literami małymi.

Zbiór zawierający skończoną liczbę elementów nazwiemy *zbiorem skończonym*, zbiór o nieskończonej liczbie elementów — *zbiorem nieskończonym*.

Liczbę elementów zbioru $X$ oznaczymy przez $\overline{\overline{X}}$.

Jeżeli przedmiot $x$ jest elementem zbioru $X$, zapiszemy symbolicznie

$$x \in X.$$

Jeżeli przedmiot $x$ nie jest elementem zbioru $X$, zapisujemy

$$x \notin X \quad \text{lub} \quad \sim (x \in X).$$

*Zbiór nie zawierający żadnego elementu nazywamy zbiorem pustym* i oznaczamy symbolem $\Phi$.

*Przykład.* Rozważmy zbiór liter alfabetu łacińskiego

$$A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}.$$

Litera $a$ jest elementem alfabetu łacińskiego, co zapisujemy:

$$a \in A,$$

natomiast litera grecka $\alpha$ nie jest elementem zbioru $A$, co zapisujemy:

$$\alpha \notin A \quad \text{lub} \quad \sim (\alpha \in A).$$

*Przykład.* Mamy zbiór liczb parzystych

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

Liczba 16 należy do zbioru $P$ $(16 \in P)$, liczba 17 zaś nie należy do zbioru $P$ $\left(17 \notin P \text{ lub } \sim (17 \in P)\right)$.

*Przykład.* Liczba elementów zbioru $X = \{2, 5, 7, 8\}$ wynosi 4, co zapisujemy symbolicznie $\overline{\overline{X}} = 4$.

Mówimy, że *zbiór $X$ jest zawarty w zbiorze $Y$ (lub, że zbiór $X$ jest podzbiorem zbioru $Y$) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy przedmiot $x$ będący elementem zbioru $X$ jest elementem zbioru $Y$.*

Jeżeli zbiór $X$ jest podzbiorem zbioru $Y$, zapisujemy w skrócie

$$X \subset Y.$$

*Przykład.* Weźmy zbiory liter $X = \{x, y, z\}$ oraz $Y = \{x, y, z, u\}$. Zbiór $X$ jest w tym przypadku zawarty w zbiorze $Y (X \subset Y)$, gdyż każdy element zbioru $X$ jest również elementem zbioru $Y$.

Zbiór $A = \{a, b, c\}$ nie jest zawarty w zbiorze $B = \{b, c, d, e\}$, gdyż element $a \in A$, ale $a \notin B$.

*Zbiory $X$ i $Y$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $X \subset Y$ oraz $Y \subset X$.* Jeżeli zbiory $X$ i $Y$ są równe, zapiszemy $X = Y$.

*Przykład.* Zbiory $A = \{a, b\}$ i $B = \{a, b\}$ są równe: $A = B$, natomiast zbiory $C = \{a, b\}$ i $D = \{b, c\}$ nie są równe.

Na zbiorach można wykonywać działania, które kolejno omówimy.

*Sumą zbiorów $X$ i $Y$ nazywamy taki zbiór, który zawiera wszystkie elementy zbioru $X$ oraz wszystkie elementy zbioru $Y$.*

Sumę zbiorów $X$ i $Y$ oznaczymy symbolicznie przez $X \cup Y$.

*Przykład.* Niech $X = \{2, 3, 4\}$ i $Y = \{2, 5, 7\}$, to ich sumą będzie zbiór

$$X \cup Y = \{2, 3, 4, 5, 7\}.$$

Należy zwrócić uwagę Czytelnika na fakt, że w sumie każdy element występuje tylko jeden raz.

*Przykład.* Jeśli $A = \{a, b, c, d\}$, zaś $B = \{a, c, d, g, h\}$, to $A \cup B = \{a, b, c, d, g, h\}$.



*Iloczynem zbiorów $X$ i $Y$ nazywamy zbiór zawierający te i tylko te elementy, które należą jednocześnie do zbioru $X$ i zbioru $Y$.*

Iloczyn zbiorów oznaczamy symbolicznie $X \cap Y$.

*Przykład.* Jeżeli mamy dwa zbiory: $X = \{2, 3, 4\}$, $Y = \{2, 5, 7\}$, to ich iloczyn $X \cap Y = 2$, gdyż $2 \in X$ i $2 \in Y$, natomiast żadne inne elementy zbioru $X$ nie wchodzą do zbioru $Y$ i odwrotnie.

Iloczyn zbiorów $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{d, e, f\}$ jest pusty, tj.

$$A \cap B = \Phi,$$

gdyż zbiory $A$ i $B$ nie mają żadnego elementu wspólnego.

*Różnicą zbiorów $X$ i $Y$ nazwiemy zbiór zawierający te i tylko te elementy, które należą do zbioru $X$ i jednocześnie nie należą do zbioru $Y$.*

Różnicę zbiorów $X$ i $Y$ oznaczymy przez $X - Y$.

*Przykład.* Niech $X = \{2, 5, 7, 9\}$, zaś $Y = \{2, 5, 3, 10\}$, wówczas

$$X - Y = \{7, 9\}.$$

Jeżeli $A = \{a, b, c\}$, natomiast $B = \{a, b, c, d\}$, to

$$A - B = \Phi.$$

W matematyce rozważa się często różnicę zbiorów $X - Y$, w przypadku gdy $X$ jest pewnym ustalonym zbiorem. Taki ustalony zbiór będziemy nazywali *zbiorem uniwersalnym* i oznaczymy go przez $U$.

Różnice zbiorów $U - Y$, gdzie $Y \subset U$, nazywamy *dopełnieniem zbioru $Y$ do zbioru uniwersalnego $U$* i oznaczymy je przez $-Y$.

*Przykład.* Niech zbiór uniwersalny $U$ będzie całym alfabetem łacińskim, zaś $Y = \{a, b, c\}$. Wtedy dopełnieniem zbioru $Y$ do całego alfabetu $U$ będzie zbiór liter $X = \{d, e, f, \ldots, x, y, z\}$.

W dalszym ciągu będziemy używali notacji

$$X = \{x\colon W(x)\},$$

co należy czytać:
*elementami zbioru $X$ są tylko takie elementy $x$ należące do zbioru uniwersalnego $U$, które posiadają własność $W(x)$.*

*Przykład.* Jeżeli jako zbiór uniwersalny przyjmiemy zbiór liczb naturalnych $\{1, 2, \ldots\}$, a za własność $W(x)$: liczba naturalna jest liczbą parzystą, to zbiór $X = \{x\colon W(x)\}$ będzie zbiorem liczb parzystych.

## 3. RELACJE

*Produktem (albo iloczynem) kartezjańskim pary zbiorów $X$ i $Y$ nazwiemy taki zbiór, którego elementami są wszystkie pary uporządkowane elementów $\langle x, y\rangle$, takie że $x \in X$ i $y \in Y$;* $x$ będziemy nazywali *poprzednikiem*, $y$ zaś *następnikiem* pary $\langle x, y\rangle$.

Iloczyn kartezjański zbiorów $X$ i $Y$ oznaczymy przez $X \times Y$.

*Przykład.* Niech $X = \{2, 3, 4\}$, zaś $Y = \{2, 5, 1, 7\}$. Iloczyn kartezjański $X$ i $Y$ ma wówczas postać:

$$X\times Y = \{\langle 2, 2\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 7\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 7\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 4, 7\rangle\}.$$

*Relacją dwuczłonową $R$ nazywamy każdy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$,* tzn. $R \subset X\times Y$.

Jeżeli para $\langle x, y\rangle \in R$, to będziemy to mogli również zapisać: $R(x, y)$ lub $xRy$, i mówić, że *przedmioty $x$, $y$ należą do relacji $R$ lub są w relacji $R$.*

*Przykład.* Niech $X = \{a, b, c\}$ oraz $Y = \{a, c\}$. Jeśli teraz założymy, że $R$ jest relacją, do której należą pary jednakowych elementów, takich że pierwszy należy do $X$, a drugi do $Y$, to

$$R = \{\langle a, a\rangle, \langle c, c\rangle\}.$$



Natomiast para np. $\langle a, c\rangle$, jakkolwiek należy do iloczynu kartezjańskiego $X\times Y$, nie należy do relacji $R$.

Niech $N$ oznacza zbiór liczb naturalnych $1, 2, \ldots$. $N\times N$ będzie więc zbiorem par uporządkowanych. Przez $<$ oznaczać będziemy relację mniejszości $< \subset N\times N$, tj. zbiór wszystkich takich par liczb, że pierwsza z nich jest mniejsza od drugiej. A więc para $\langle 3, 5\rangle \in <$ (co czytamy: para $\langle 3, 5\rangle$ należy do relacji mniejszości), natomiast para $\langle 5, 3\rangle \notin <$ lub pisząc inaczej: $3 < 5$, $\sim (5 < 3)$ (co czytamy: między 5 i 3 nie zachodzi relacja mniejszości).

*Dziedziną relacji $R$ nazywamy zbiór wszystkich poprzedników par należących do relacji $R$.*

*Przykład.* Niech $R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$. Dziedziną tej relacji jest zbiór $\{a, c\}$.

*Przeciwdziedziną relacji $R$ nazywamy zbiór wszystkich następników par należących do relacji $R$.*

*Przykład.* Dla relacji $R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$ przeciwdziedziną jest zbiór $\{b, c, d\}$.

*Relację $R$ nazwiemy przeciwzwrotną, jeżeli dla każdego $x \in X$*

$$\sim R(x, x),$$

co czytamy: *między $x$ i $x$ nie zachodzi relacja $R$, tj.* $\langle x, x\rangle \notin R$.

*Przykład.* Relacja $R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, a\rangle\}$ jest przeciwzwrotna, zaś relacja $Q = \{\langle a, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$ nie jest przeciwzwrotna.

*Relację $R$ nazywamy antysymetryczną, jeżeli dla dowolnych $x, y \in X$ $R(x, y)$ pociąga za sobą $\sim R(y, x)$.*

*Przykład.* Relacja $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$ jest antysymetryczna, natomiast relacja $Q = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, a\rangle\}$ nie jest antysymetryczna, gdyż należą do niej pary $\langle a, b\rangle$ i $\langle b, a\rangle$.

*Relację $R$ nazwiemy przechodnią, jeżeli dla dowolnych $x, y, z \in X$, $R(x, y)$ i $R(y, z)$ pociąga za sobą $R(x, z)$.*

*Przykład.* Relacja

$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle b, b\rangle\}$$

jest przechodnia.

## 4. FUNKCJE

Jeżeli w relacji $R \subset X \times Y$ dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden taki element $y \in Y$, że $x$, $y$ są w relacji $R$, tj. $R(x, y)$, to relację $R$ nazywamy *funkcją*. Poprzednik pary $\langle x, y\rangle$ nazywamy *argumentem funkcji R*, zaś następnik pary $\langle x, y\rangle$ nazywamy *wartością funkcji R*. Wartość funkcji $R$ oznaczamy przez $R(x)$, tj. $y = R(x)$. Dziedzinę relacji $R$ nazywamy *zbiorem argumentów funkcji R*, zaś przeciwdziedzinę relacji $R$ nazywamy *zbiorem wartości funkcji*.

Jeżeli odpowiednio dziedziną i przeciwdziedziną funkcji $R$ są zbiory $X$ i $Y$, będziemy pisali

$$R: X \to Y.$$

*Przykład.* Niżej podana relacja $R$

$$R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle g, h\rangle\}$$

jest funkcją.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\{a, b, c, g\}$, przeciwdziedziną zaś zbiór $\{a, d, h\}$.

# 1. POJĘCIA PODSTAWOWE

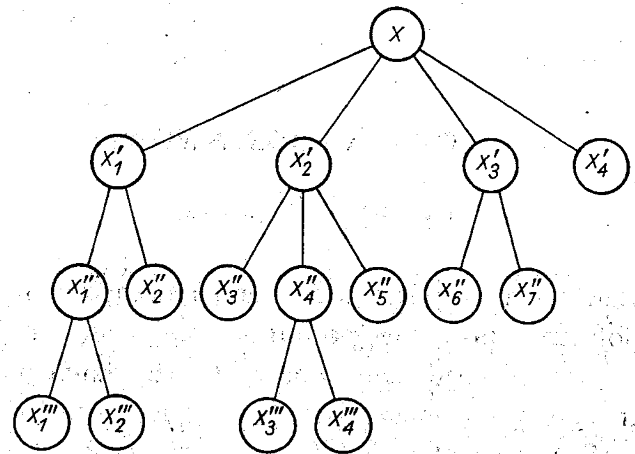
## 1.1. POJĘCIE WYROBU

Podstawowym pojęciem, od którego rozpoczniemy rozważania dotyczące procesów produkcyjnych, będzie pojęcie wyrobu. Przez wyrób będziemy w naszych rozważaniach rozumieli produkt przemysłu maszynowego, a więc *przedmiot, który otrzymaliśmy w wyniku obróbki i montażu pewnych części lub podzespołów*. Nie będziemy więc mogli mówić tu np. o wyrobach przemysłu włókienniczego, tj. o tkaninach.

Pojęcie wyrobu, jakkolwiek proste i oczywiste, zdefiniujemy w sposób formalny. Celem tej formalizacji jest z jednej strony uzyskanie prostych i jednoznacznych definicji innych pojęć związanych z wyrobem, z drugiej zaś możliwość łatwego dowodzenia twierdzeń, co z przyjętego punktu widzenia ma może nieco mniejsze znaczenie. W książce tej chcielibyśmy bowiem przede wszystkim sprecyzować podstawowe pojęcia dotyczące procesów produkcyjnych — odkładając bardziej szczegółowe badanie ich własności na dalszą przyszłość.

### *1.1.1. Intuicyjne pojęcie wyrobu*

Przez wyrób rozumiemy pewien *przedmiot złożony z jakichś innych przedmiotów zwanych składnikami lub częściami* (obu terminów używamy zamiennie), te ostatnie zaś są złożone z innych składników itd. Niektóre ze składników mogą już nie zawierać w sobie żadnych innych części (składników) — są one wtedy nazywane *detalami* albo *elementami wyrobu*. Każdy wyrób można przedstawić w formie tzw. *drzewa* (zob. rys. 1).




*Rys. 1*

Na rysunku 1 wyroby i ich składniki reprezentują koła oznaczone małymi literami. Wyrób $x$ składa się ze składników $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $x_4'$; wyrób $x_1'$ składa się ze składników $x_1''$, $x_2''$; wyrób $x_2'$ składa się ze składników $x_3''$, $x_4''$, $x_5''$ itp. Wyrób $x_1'''$ nie składa się z żadnych składników — jest więc elementem.

### *1.1.2. Relacja „bycia składnikiem” (częścią)*

Dla wygody sformułowań wprowadzimy pojęcie zbioru uniwersalnego, który będziemy oznaczać symbolem $U$. Elementy tego zbioru będziemy nazywać wyrobami. $U$ będzie więc zbiorem wszystkich wyrobów, jakie możemy rozważać. Elementy zbioru $U$ będziemy oznaczali małymi literami $x, y, z$ (z odpowiednimi wskaźnikami). Podzbiory zbioru $U$ będziemy oznaczali literami $X, Y, Z$ (ze wskaźnikami). Ponieważ wszystkie omawiane dalej zbiory będą podzbiorami $U$, nie będziemy tego zaznaczać. Dopełnienie do zbioru uniwersalnego $Y = U - X$, gdzie $X \subset U$, oznaczymy przez $-X$.

Na zbiorze $U$ określimy pewną relację $R \subset U \times U$, zwaną w dalszym ciągu „relacją bycia składnikiem” lub „relacją bycia



częścią”. Jeżeli wyroby $x, y \in U$ są w relacji $R$ (co symbolicznie możemy zapisać: $\langle x, y\rangle \in R$ albo: $R(x, y)$), będziemy mówili, że wyrób $x$ jest częścią albo składnikiem wyrobu $y$. Relacja ta, zgodnie z potocznym jej rozumieniem, powinna spełniać następujące warunki:

1. *Przeciwzwrotności*, ponieważ żaden wyrób nie jest swoim składnikiem, lub inaczej: dla każdego $x \in U \sim R(x, x)$[1].
2. *Antysymetrii*, ponieważ wówczas gdy $x$ jest składnikiem $y$, to $y$ nie jest składnikiem $x$, lub inaczej: dla każdych $x, y \in U$, jeżeli $R(x, y)$, to $\sim R(y, x)$.
3. *Przechodniości*, ponieważ wówczas gdy $x$ jest składnikiem $y$ oraz $y$ jest składnikiem $z$, to $x$ jest składnikiem $z$; mówiąc inaczej: dla każdych $x, y, z \in U$, jeżeli $R(x, y)$ oraz $R(y, z)$, to $R(x, z)$.
4. *Jeżeli $x$ jest składnikiem $y$, to istnieje takie $z \neq x$, że $z$ też jest składnikiem $y$*; inaczej: jeżeli $R(x, y)$, to również $R(z, y)$, gdzie $z \neq x$, $z \in U$, a więc każdy wyrób ma zero lub więcej niż jeden składnik.
5. Dla każdych dwu wyrobów $x, y$, takich że $R(x, y)$, istnieje co najwyżej jeden taki ciąg wyrobów $x_0, \ldots, x_k$, że $x = x_0$, $x_k = y$ oraz dla każdego $i$ $(0 \leqslant i < k)$ $R(x_i, x_{i+1})$. Warunek ten mówi po prostu, że *każdy wyrób może być „wmontowany” co najwyżej jeden raz w jakiś inny wyrób.*

*Ćwiczenie*

Sprawdzić, czy następujące relacje spełniają warunki 1—5.

$$R_1 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle d, b\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle d, b\rangle, \langle a, a\rangle, \langle c, a\rangle\}$$
$$R_3 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, b\rangle, \langle e, a\rangle\}$$
$$R_4 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle e, a\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, a\rangle\}$$
$$R_5 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle e, a\rangle\}$$
$$R_6 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle e, a\rangle, \langle e, a\rangle, \langle c, e\rangle\}.$$

[1] $R(x, x)$ oznacza, że między $x$, $x$ nie zachodzi relacja $R$, tzn. $\langle x, x\rangle \notin R$ (zob. s. 23)

### 1.1.3. *Wyroby — pojęcia podstawowe*

Zbiór $X = \{x: R(x, y)\}$ nazwiemy zbiorem wszystkich części wyrobu $y$ (lub krótko — zbiorem części $y$). Zbiór $X$ będziemy oznaczać $X = C(y)$. Jeżeli $X$ jest zbiorem części wyrobu $y$, to zapiszemy: $y = W(X)$, oraz powiemy, że $y$ jest wyrobem końcowym ze względu na $X$.

Jeżeli nie istnieje takie $z$, że $R(x, z)$, to $x$ będziemy nazywali wyrobem końcowym.

A więc *wyrób końcowy to taki wyrób, który nie jest składnikiem żadnego innego wyrobu.* Nie będziemy wprowadzali specjalnych oznaczeń na wyroby końcowe; wtedy gdy to będzie potrzebne, napiszemy po prostu, o jakie wyroby nam chodzi.

Powiemy, że $x$ jest *wyrobem prostym,* jeżeli nie zawiera żadnych części, tj. $C(x) = \Phi$ ($\Phi$ oznacza zbiór pusty). Jeżeli zaś zbiór składników jest niepusty, to $x$ nazwiemy *wyrobem złożonym* ($C(x) \neq \Phi$).

Jeżeli $R(x, y)$ oraz $x$ jest wyrobem prostym ($C(x) = \Phi$), to $x$ będziemy nazywać *detalem y.*

*Detal jest to więc taka część wyrobu, która nie zawiera sama żadnych części.* Należy zwrócić uwagę na różnicę między detalem a prostym wyrobem: *detal jest zawsze częścią jakiegoś wyrobu, wyrób prosty zaś nie musi być częścią innego wyrobu.*

Jeżeli $R(x, y)$ oraz $x$ jest wyrobem złożonym ($C(x) \neq \Phi$), to $x$ będziemy nazywali *podzespołem wyrobu y.*

*Podzespołami są więc wszystkie części nie będące detalami.*

*Ćwiczenie*

Podać detale i podzespoły wyrobu, którego schemat pokazano na rys. 1.



### 1.1.4. *Schemat wyrobu*

Wprowadzimy teraz nową relację $S \subset R$, którą nazwiemy *relacją „bezpośredniego składnika”* albo *relacją „bezpośredniej części”*.

Będziemy mówili, że $x$ jest bezpośrednim składnikiem $y$, jeżeli:

1) $x$ jest składnikiem $y$, tj. $x$ i $y$ są w relacji $R$, co zapisujemy

$$R(x, y);$$

2) nie istnieje takie $z$ należące do zbioru $U (z \in U)$, które jest składnikiem $y$ (a więc, $z$ i $y$ nie są w relacji $R$) i którego składnikiem z kolei jest $x$ (a więc, $x$ i $z$ nie są w relacji $R$).

Jeżeli $x$ jest bezpośrednim składnikiem $y$, to będziemy to zapisywali symbolicznie $S(x, y)$.

Zbiór $X$ bezpośrednich składników wyrobu $y$ oznaczymy przez $X = \beta(y)$.

Relację $S$ będziemy nazywali *schematem wyrobu.* Schemat wyrobu możemy przedstawić w postaci wykresu, na którym koła reprezentują wyroby; jeżeli $x$ jest bezpośrednim składnikiem $y$, tj. $S(x, y)$, to koła odpowiadające wyrobom $x$ i $y$ połączymy odcinkiem skierowanym od $x$ do $y$. W ten sposób każdemu wyrobowi możemy w jednoznaczny sposób przypisać tzw. *drzewo* (zob. rys. 1). Drzewo to jest wykresem relacji $S$; schemat wyrobu to tyle samo więc, co relacja „bycia bezpośrednim składnikiem”. Schemat wyrobu można utożsamiać z wykresem relacji $S$, toteż przez schemat wyrobu będziemy tutaj rozumieli raczej wykres relacji $S$ aniżeli samą relację.

Wyroby $x$ i $y$ będziemy uważać za *jednakowe* (*równoważne*), jeżeli ich schematy są równe, tj. wówczas, gdy składają się z takich samych części połączonych ze sobą w jednakowy sposób.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że każdy wyrób może być „wmontowany" co najwyżej jeden raz do jakiegoś wyrobu, ale wyroby jednakowe mogą wchodzić jako części składowe do różnych wyrobów, np. pewien typ silnika może być częścią samochodu i łodzi motorowej (chodzi oczywiście o różne egzemplarze jednakowych silników). Wyrób może mieć jednakowe części, np. kilka jednakowych śrub może być częściami jednego wyrobu. A więc *przez część rozumiemy konkretny egzemplarz jakiegoś wyrobu.*

*Ćwiczenie*

Podać schematy następujących wyrobów: nożyczki, wieczne pióro, ołówek kulkowy, zapalniczka, papierośnica.

### *1.1.5. Rząd, krotność, głębokość i szerokość wyrobów*

Czasem wygodnie jest operować pewnymi parametrami charakteryzującymi wyrób podobnie jak charakteryzuje go schemat.

Z każdym wyrobem $x$ wiążemy liczbę $\rho(x)$, zwaną *rzędem wyrobu* $x$, w sposób następujący:

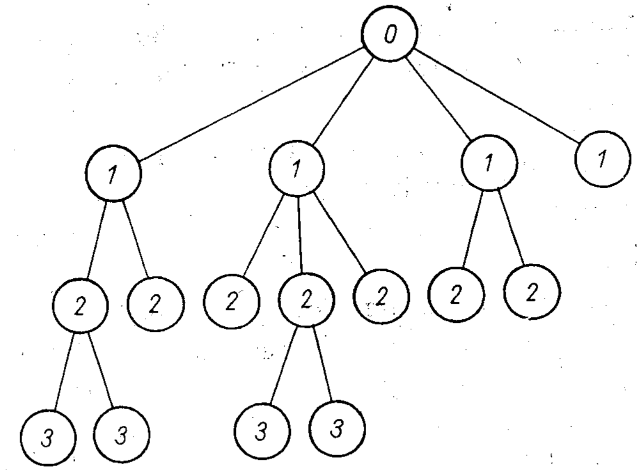
1. Jeżeli $x$ jest wyrobem końcowym, to $\rho(x) = 0$;
2. Jeżeli $S(x, y)$, to $\rho(x) = \rho(y)+1$.

Na rysunku 2 podano rząd każdej części wyrobu, którego schemat pokazano na rys. 1. Widzimy, że rząd wyrobu to po prostu numer piętra, na którym znajduje się dana część w schemacie wyrobu.

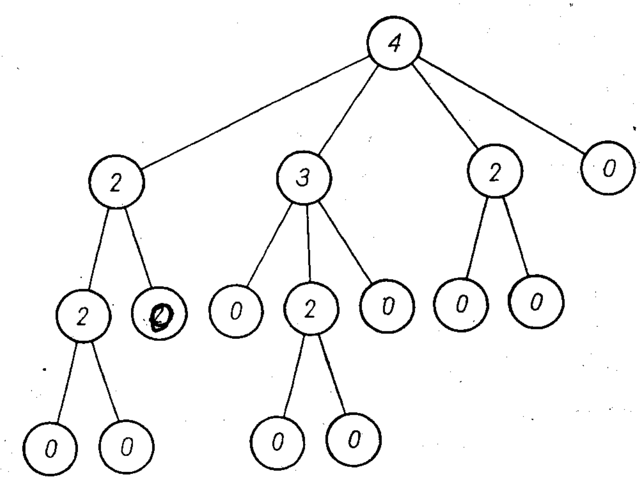
Każdemu wyrobowi $x$ przypiszemy liczbę $\varkappa(x)$, zwaną *krotnością* — określaną jak następuje

$$\varkappa(x) = \overline{\overline{\beta(x)}},$$






*Rys. 2*




*Rys. 3*

gdzie $\overline{\overline{\beta(x)}}$ oznacza liczbę elementów zbioru $\beta(x)$ (tj. liczbę bezpośrednich składników wyrobu $x$). *Krotność wyrobu jest więc po prostu liczbą jego bezpośrednich składników.*

Na rysunku 3 pokazano krotność wyrobu rozpatrywanego w poprzednich przykładach oraz krotności wszystkich części tego wyrobu.

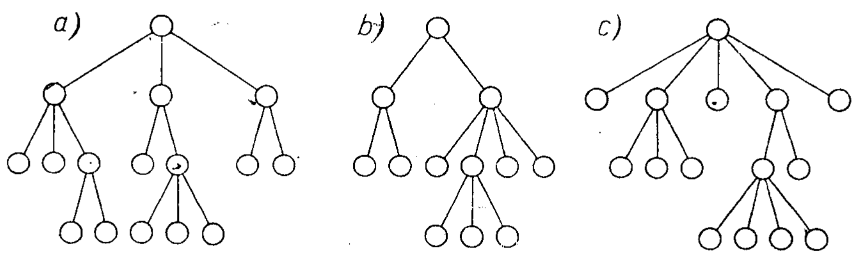
Głębokością wyrobu $x$ będziemy nazywali maksymalny rząd jego części i oznaczymy ją przez $\gamma(x)$. *Głębokość jest to więc liczba „pięter" drzewa, zmniejszona o* 1. Dla rozpatrywanego przykładu wynosi ona 3.

*Szerokością wyrobu x nazwiemy maksymalną liczbę jego składników tego samego rzędu* i oznaczymy ją przez $\sigma(x)$.

W rozpatrywanym przykładzie szerokość wyrobu wynosi 7, gdyż tyle jest składników rzędu 2, najliczniejszego jeśli chodzi o liczbę składników.

*Ćwiczenia*

1. Podać bezpośrednie składniki oraz składniki każdego podzespołu wyrobów, których schematy pokazano na rys. 4.
2. Podać szerokość i głębokość wyrobów, o których mowa w ćwiczeniu 1.
3. Podać rząd i krotność każdej części wyrobów, których schematy pokazano na rys. 4.




*Rys. 4*



## 1.2. LISTA CZĘŚCI WYROBU

Lista części wyrobu stanowi opis wszystkich części wchodzących w skład danego wyrobu. Od listy części żądamy ponadto, aby występujące w niej nazwy części nie były napisane w jakimkolwiek porządku, ale w taki sposób, by można było odczytać składniki (bądź składniki bezpośrednie) każdego podzespołu wyrobu. Inaczej mówiąc, *lista części jest pewnym formalnym zapisem relacji S* (tj. schematu wyrobu). Możemy powiedzieć, że lista części pozwala w liniowy sposób zapisywać drzewo (schemat) wyrobu, będące tworem dwuwymiarowym (rysunek na płaszczyźnie).

### *1.2.1. Definicja listy części*

Aby zdefiniować listę części wyrobu musimy najpierw przyjąć, że wszystkie wyroby są ponazywane tak, że różne wyroby mają różne nazwy, wyroby jednakowe zaś mają nazwy takie same. Jeżeli $x$ jest wyrobem, to $\overline{x}$ będzie oznaczać nazwę wyrobu $x$, zaś $\lambda x$ — listę części wyrobu $x$.

Listę części zdefiniujemy indukcyjnie w następujący sposób:

1. Jeżeli $x$ jest wyrobem prostym, to $\lambda x = \overline{x}$.
2. Jeżeli $y$ oraz $x_1, \ldots, x_k$ są wyrobami takimi, że $\beta(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, to $\lambda y = \overline{y}(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_k)$.

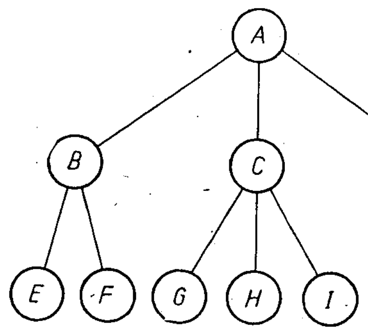
Jak widzimy, lista wyrobu prostego składa się jedynie z nazwy tego wyrobu. Lista części wyrobu złożonego składa się z nazwy tego wyrobu oraz list części jego składników bezpośrednich (w nawiasie okrągłym)[2].

W dalszym ciągu nazwy wyrobów będziemy oznaczać dużymi, pierwszymi literami alfabetu i zamiast „nazwa" będziemy, dla

[2] Przyjmiemy, że kolejność, w jakiej piszemy listy bezpośrednich składników, jest obojętna.

uproszczenia, pisać „litera". Lista części będzie się więc składać z nazw albo z liter.

*Przykład.* Rozpatrzmy wyrób o nazwie $A$, którego schemat podany jest na rys. 5. Duże litery oznaczają nazwy składników wyrobu $A$. Dla tego wyrobu $\beta(A) = \{B, C, D\}$, $\beta(B) = \{E, F\}$, $\beta(C) = \{G, H, I\}$, $\beta(D) = \beta(F) = \beta(G) = \beta(H) = \beta(I) = \Phi$.




*Rys. 5*

Zgodnie z podaną definicją lista części tego wyrobu będzie miała postać

$$A(B(E, F), C(G, H, I), D).$$

Podana lista, jak to można sprawdzić, spełnia postawione poprzednio wymagania: nie tylko występują w niej wszystkie składniki wyrobu, ale również możemy z niej odczytać składniki bezpośrednie (bądź składniki) każdego podzespołu wyrobu $A$. Zgodnie z punktem 2. definicji listy najbardziej zewnętrzny nawias zawiera trzy listy $B(E, F)$, $C(G, H, I)$ oraz $D$. Są to listy bezpośrednich składników wyrobu $A$. Dalej, lista bezpośrednich składników $B$ składa się, zgodnie z punktem 1. definicji, z dwu nazw $E$ i $F$, gdyż $E$ i $F$ są wyrobami prostymi. Podobnie wyglądają listy bezpośrednich składników wyrobu $C$.



Tak zdefiniowana lista części przypomina „zwykłe" formuły stosowane w matematyce do zapisu funkcji, gdzie $f(x, y)$ oznacza funkcję dwu argumentów $x$, $y$, tutaj zaś rolę symbolu funkcji gra nazwa wyrobu, a rolę argumentów — listy bezpośrednich składników wyrobu. W ten sposób każdemu drzewu odpowiada jedna lista i każdej liście odpowiada jedno drzewo. Inaczej mówiąc, jeżeli mamy ustalone drzewo wyrobu, możemy łatwo napisać odpowiadającą mu listę i na odwrót — mając listę możemy w prosty sposób narysować odpowiadające jej drzewo wyrobu.

Jeżeli napiszemy jakikolwiek ciąg liter rozmieszczając w nim dowolnie nawiasy, nie zawsze otrzymamy listę części. Na przykład napisy

$$A(B(C, D(E, G))),$$
$$AB(C(D, E), F, G),$$
$$A)B, C(D, F)), G,$$
$$A(A, B)$$

nie są listami części (odpowiedź na pytanie: *dlaczego*? pozostawiamy Czytelnikowi). A zatem, tylko zapisy otrzymane według reguł 1. i 2., podanych w poprzednim paragrafie, stanowią listy części. Jeżeli mamy więc jakiś zapis i chcemy stwierdzić, czy jest on listą części, to musimy sprawdzić, czy identyczny zapis otrzymamy na podstawie definicji listy części.

*Ćwiczenia*

1. Podać listy części dla wyrobów o schematach pokazanych na rys. 5.

2. Narysować schematy wyrobów o następujących listach części:

$$A(B, C(D, E, F), G(H, I))$$
$$A((B(C, D(E, F(G, H)))), I)$$
$$A(B, C(D(E, F), H), I).$$

3. Sprawdzić, czy podane niżej napisy są listami części:

$$A(B,\ C,\ D(E,\ F(G)),\ H(I,\ J))$$
$$A(B,\ C,\ D(E,\ F(G,\ H)),\ I(J,\ L))$$
$$A(B,\ C(D,\ E(F(G,\ H))),\ I)).$$

### 1.2.2. *Listy części beznawiasowe*

Jeżeli w liście części opuścimy wszystkie nawiasy podając jednocześnie przy każdej literze krotność oznaczanego przez nie wyrobu, to tak otrzymaną listę będziemy nazywać *listą części beznawiasową*. Na przykład listę nawiasową

$$A(B(E,\ F),\ C(G,\ H,\ I),\ D)$$

możemy przedstawić w postaci

$$A_3 B_2 E_0 F_0 C_3 G_0 H_0 I_0 D_0 .$$

Wskaźnik u dołu każdej litery oznacza krotność odpowiedniego wyrobu.

Łatwo wykazać, że tak otrzymanej liście części można jednocześnie przyporządkować drzewo odpowiedniego wyrobu. Tego rodzaju listy są w praktycznych zastosowaniach znacznie wygodniejsze od list zawierających nawiasy.

Listy beznawiasowe można również zdefiniować indukcyjnie w sposób podobny do zastosowanego przy listach nawiasowych:

1. Jeżeli $x$ jest wyrobem prostym, to $\lambda x = \bar{x}_0$.

2. Jeżeli $y, x_1, \ldots, x_k$ są takimi wyrobami, że $\beta(y) = \{x_1, \ldots$ $\ldots, x_k\}$, to $\lambda y = y_{\varkappa(y)}\, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_k$. Przypominamy, że kreska nad literą oznacza nazwę odpowiedniego wyrobu, $\beta(y)$ jest zbiorem bezpośrednich składników wyrobu $y$, $\varkappa(y)$ zaś — krotnością wyrobu $y$.



Łatwo sprawdzić, że np. wyrażenia

$$A_2 B_0 C_0\,,$$
$$A_2 B_3 C_0 D_0 E_0 F_2 G_0 H_0\,,$$
$$A_2 B_0 C_2 D_0 E_0$$

są listami beznawiasowymi[3].

*Ćwiczenia*

1. Podać beznawiasowe listy części wyrobów, których drzewa pokazano na rys. 4.
2. Podać drzewa wyrobów o następujących listach części:

$$A_2 B_0 C_2 D_0 E_0$$
$$A_3 B_0 C_2 D_0 E_0 F_0$$
$$A_2 B_2 C_0 D_0 E_2 F_0 G_0$$

### 1.2.3. *Zasięg litery w liście*

Przed podaniem definicji zasięgu wprowadzimy najpierw kilka pojęć pomocniczych. Określimy funkcję $\omega$ (zwaną *funkcją wagi*), która każdej literze w liście części przyporządkowuje *liczbę naturalną* w następujący sposób:

$$\omega(X_i) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } i = 0, \\ 1-i, & \text{jeżeli } i \neq 0. \end{cases}$$

Niech

$$X^1_{i_1} X^2_{i_2} \ldots X^n_{i_n}$$

będzie listą beznawiasową. Wprowadzimy funkcję $\vartheta_j$, która

[3] Taki sposób przedstawiania drzew został wprowadzony w latach trzydziestych przez polskiego logika J. Łukasiewicza i od jego nazwiska jest nazywany *symboliką Łukasiewicza*. Symbolika ta przyjęła się w zapisywaniu formuł logicznych, a ostatnio znalazła duże zastosowanie w teorii maszyn matematycznych, gdzie jest używana do zapisywania wyrażeń arytmetycznych. Na przykład zamiast pisać: $(x+y)\cdot z$, w symbolice Łukasiewicza pisze się: $\cdot + xyz$.

każdej literze $X^k_{i_k}$ $(j \leqslant k \leqslant n,\ i_k \neq 0)$ przyporządkowuje *liczbę całkowitą* w następujący sposób:

1) $\vartheta_j(X^j_{i_j}) = 1$,

2) $\vartheta_j(X^{k+1}_{i_{k+1}}) = \vartheta_j(X^k_{i_k}) - \omega(X^k_{i_k})$.

*Zasięgiem litery $X^j_{i_j}$ (dla $i_j \neq 0$) w liście*

$$X^1_{i_1} X^2_{i_2} \ldots X^j_{i_j} \ldots X^s_{i_s} \ldots X^n_{i_n}$$

*będziemy nazywali zbiór*

$$Z(X^j_{i_j}) = X^{j+1}_{i_{j+1}} X^{j+2}_{i_{j+2}} \ldots X^s_{i_s},$$

*gdzie $s$ $(j < s \leqslant n)$ jest najmniejszą taką liczbą większą od $j$, że* $\vartheta_j(X^s_{i_s}) = 1$. Jeżeli $i_j = 0$, to zasięg $X^j_{i_j}$ jest zbiorem pustym (litera taka nie ma żadnego zasięgu).

*Przykład.* Jeżeli lista ma postać $A_2 B_2 C_3 D_0 E_0 F_0 G_0 H_0$, to

$$Z(A_2) = B_2 C_3 D_0 E_0 F_0 G_0 H_0,$$

gdyż

| | $A_2$ | $B_2$ | $C_3$ | $D_0$ | $E_0$ | $F_0$ | $G_0$ | $H_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$ | $-1$ | $-1$ | $-2$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\vartheta_1$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1, |

natomiast

$$Z(B_2) = C_3 D_0 E_0 F_0 G_0,$$

gdyż

| | $A_2$ | $B_2$ | $C_3$ | $D_0$ | $E_0$ | $F_0$ | $G_0$ | $H_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$ | $-1$ | $-1$ | $-2$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\vartheta_2$ | | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 | 1, | |

zaś

$$Z(C_3) = D_0 E_0 F_0,$$

gdyż

| | $A_2$ | $B_2$ | $C_3$ | $D_0$ | $E_0$ | $F_0$ | $G_0$ | $H_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$ | $-1$ | $-1$ | $-2$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\vartheta_3$ | | | 1 | 3 | 2 | 1. | | |



Wskaźnik $i$ przy funkcji $\vartheta_i$ mówi, dla której litery w liście (biorąc od lewej) obliczamy zasięg.

Można sprawdzić, że $Z(X)$ jest zbiorem nazw wszystkich składników wyrobu o nazwie $X$, tj., że jeżeli $C(x) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, to

$$Z(\bar{x}) = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}.$$

W ten sposób możemy na podstawie listy części wyrobu $x$ stwierdzić, jakie części wchodzą w skład każdego podzespołu tego wyrobu.

*Ćwiczenia*

1. Podać części każdego podzespołu następujących wyrobów:

$$A_3 B_0 C_2 D_0 E_0 F_0$$
$$A_2 B_3 C_0 D_0 E_0 F_0$$
$$A_4 B_0 C_3 D_0 E_0 F_0 G_2 H_0 I_0 J_0.$$

### 1.2.4. *Poprawność listy części*

Łatwo zauważyć, że nie każdy ciąg liter ze wskaźnikami u dołu stanowi beznawiasową listę. Dla list beznawiasowych można podać wygodny w praktycznych zastosowaniach algorytm sprawdzania czy zadany ciąg liter jest listą, czy też nie. Ciąg

$$X^1_{i_1} X^2_{i_2}, \ldots, X^n_{i_n}$$

jest listą beznawiasową wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) dla każdego $j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ $\quad i_j \neq 1$,

2) dla każdego $j$ $\quad X^j_{i_j} \notin Z(X^j_{i_j})$,

3) dla każdego $k$ $(1 \leqslant k < n)$ $\quad \sum_{j=k}^{n} \omega(X^j_{i_j}) > 0$.

$(\sum_{j=k}^{n} \omega(X^j_{i_j})$ możemy traktować jako funkcję sprawdzającą $\varphi(X^j_{i_j})$ przypisującą każdej literze $X^j_{i_j}$ w liście części liczbę naturalną),

4) $\varphi(X^n_{i_n}) = \sum_{j=1}^{n} \omega(X^j_{i_j}) = 1\,.$

*Przykład*

| | $A_4$ | $B_0$ | $C_3$ | $D_0$ | $E_0$ | $F_0$ | $G_2$ | $H_0$ | $I_0$ | $J_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega(X^j_{i_j})$ | $-3$ | 1 | $-2$ | 1 | 1 | 1 | $-1$ | 1 | 1 | 1 |
| $\varphi(X^j_{i_j})$ | 1 | 4 | 3 | 5 | 4 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |

*Ćwiczenia*

1. Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są listami części:

$$A_3 B_0 C_2 D_0 E_0 F_0$$
$$A_2 B_3 C_2 D_0 E_0 F_0$$
$$A_3 B_2 C_0 D_2 E_0 F_0 G_0 H_0$$

### 1.2.5. *Listy rozszerzone*

Jedną z informacji, którą niejednokrotnie chcemy uzyskać na podstawie listy części, jest wiadomość, z jakich składników bezpośrednich składa się dany podzespół wyrobu.

Dla list beznawiasowych można podać algorytm dający odpowiedź na to pytanie, jednakże jest on dość kłopotliwy w użyciu. Ponieważ w praktyce informacja ta jest często niezbędna, wygodnie jest ją podawać bezpośrednio w liście części, tak aby nie trzeba jej było obliczać w każdym przypadku.

Jeżeli

$$X^1_{i_1} X^2_{i_2} \dots X^n_{i_n}$$



jest listą beznawiasową, to listę rozszerzoną definiujemy jako

$$X^1_{i_1}\beta(X^1_{i_1}) X^2_{i_2}\beta(X^2_{i_2}) \dots X^n_{i_n}\beta(X^n_{i_n})\,.$$

*Przykład.* Lista beznawiasowa

$$A_4 B_0 C_3 D_0 E_0 F_0 G_2 H_0 I_0 J_0$$

w postaci rozszerzonej będzie następująca:

$$A_4 B_0 C_3 G_2 J_0 B_0 C_3 D_0 E_0 F_0 D_0 E_0 F_0 G_2 H_0 I_0 H_0 I_0 J_0\,.$$

Sposób pisania list rozszerzonych, podany w tym przykładzie, jest nieco nieczytelny, dlatego będziemy je pisać pionowo, np.

$$\begin{array}{l} X^1_{i_1}\beta(X^1_{i_1}) \\ X^2_{i_2}\beta(X^2_{i_2}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X^n_{i_n}\beta(X^n_{i_n}) \end{array}$$

A zatem lista podana w przykładzie będzie miała postać:

$$\begin{array}{l} A_4 B_0 C_3 G_2 J_0 \\ B_0 \\ C_3 D_0 E_0 F_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \\ G_2 H_0 I_0 \\ H_0 \\ I_0 \\ J_0 \end{array}$$

Symbole w pierwszej kolumnie tworzą listę beznawiasową, a w każdym wierszu mamy dodatkowo podane wszystkie składniki bezpośrednie odpowiedniego wyrobu.

Również dla list rozszerzonych można podać algorytm sprawdzający ich poprawność. Nie przytaczamy go tutaj, jednakże wprawny Czytelnik ułoży go z łatwością samodzielnie. Należy jedynie przedtem ułożyć algorytm wyszukujący bezpośrednie składniki każdego podzespołu na podstawie listy beznawiasowej. Tak otrzymane składniki muszą oczywiście zgadzać się ze składnikami podanymi bezpośrednio w liście rozszerzonej przy każdym podzespole. Algorytm taki może mieć duże znaczenie praktyczne w przypadku stosowania maszyn matematycznych w organizacji produkcji, gdyż pozwala na automatyczne sprawdzenie, czy podana do maszyny lista części nie zawiera błędów. Jest to szczególnie ważne wówczas, gdy mamy do czynienia z wyrobem składającym się z bardzo dużej liczby części, gdzie ewentualny błąd jest trudny do zauważenia przy sprawdzaniu ręcznym.

*Ćwiczenia*

1. Podać listy rozszerzone dla następujących list beznawiasowych:

$$A_3 B_0 C_2 D_0 E_0 F_0$$
$$A_2 B_3 C_0 D_0 E_0 F_0$$
$$A_4 B_0 C_0 D_2 E_0 F_0 G_2 H_0 I_0$$

### 1.2.6. Listy relacyjne

W wielu przypadkach konieczne jest szybkie uzyskanie jeszcze innej informacji z listy, a mianowicie: dla każdego wyrobu $x$ należy podać wyrób $y$, taki że $x$ jest bezpośrednim składnikiem $y$.

Rozważając podane przez nas przykłady list możemy wprawdzie ustalić algorytmy wyszukujące w liście odpowiednie części, wymaga to jednak wiele czasu i jest kłopotliwe. Toteż wygodnie jest podawać od razu tę informację w liście pisząc obok nazwy części $x$ nazwę części $y$, takiej że $R(x, y)$. Inaczej mówiąc wypisujemy po prostu wszystkie pary należące do relacji, w takiej kolejności, że ich pierwsze elementy tworzą listę beznawiasową.



Podany w poprzednim paragrafie przykład listy beznawiasowej

$$A_4 B_0 C_3 D_0 E_0 F_0 G_2 H_0 I_0 J_0$$

będzie miał w zapisie relacyjnym postać:

$$A_4 B_0 A_4 C_3 A_4 D_0 C_3 E_0 C_3 F_0 C_3 G_2 A_4 H_0 G_2 I_0 G_2.$$

Obok każdej litery z prawej strony, oprócz litery pierwszej, mamy podany drugi element relacji $R$.[4]

Listę relacyjną, podobnie jak listę rozszerzoną, wygodniej jest pisać pionowo, np.

$$\begin{array}{l} A_4 \\ B_0 A_4 \\ C_3 A_4 \\ D_0 C_3 \\ E_0 C_3 \\ F_0 C_3 \\ G_2 A_4 \\ H_0 G_2 \\ I_0 G_2 \end{array}$$

Oczywiście listy rozszerzone i relacyjne można łączyć ze sobą, podając przy każdym wyrobie zarówno zbiór jego składników bezpośrednich, jak i wyrób, którego jest on bezpośrednim składnikiem.

*Ćwiczenie*

Podać listy relacyjne dla list beznawiasowych podanych w ćwiczeniu z poprzedniego paragrafu.

[4] W zasadzie relacja $R$ jest określona nie na nazwach, a na wyrobach, jednakże dla uproszczenia będziemy ją również przenosić na nazwy elementów.

### 1.2.7. *Listy uproszczone wyrobów z jednakowymi częściami*

Jeżeli jakiś wyrób zawiera wiele jednakowych podzespołów, to w jego liście części każdy z tych jednakowych podzespołów występuje wielokrotnie. Wydłuża to niepotrzebnie listę części i czyni mniej wygodne posługiwanie się nią. Toteż w tym przypadku chcąc uprościć listę części można postępować podobnie jak to się czyni w przypadku formuł matematycznych — nie wypisując wszystkich jednakowych fragmentów listy, a zaznaczając to krótko jednym wyróżnionym symbolem. Taką listę będziemy nazywać uproszczoną.

*Przykład*

$$\begin{aligned}
\lambda(A_3) &= A_3\underline{\mathrm{B}}C_3\underline{\mathrm{D}}\underline{\mathrm{B}}\underline{\mathrm{F}}G_2\underline{\mathrm{D}}\underline{\mathrm{F}}\\
\lambda(\underline{\mathrm{B}}) &= A_2^1\underline{\mathrm{B}}^1C_2^1E_0^1F_0^1\\
\lambda(\underline{\mathrm{D}}) &= A_3^2B_0^2\underline{\mathrm{B}}^1D_0^2\\
\lambda(\underline{\mathrm{F}}) &= A_2^3B_2^3\underline{\mathrm{B}}^1C_0^3E_0^3\\
\lambda(\underline{\mathrm{B}}^1) &= A_2^4B_0^4C_0^4
\end{aligned}$$

Podkreślone litery oznaczają podzespoły występujące wielokrotnie w wyrobie.[5]

W podanym przykładzie w wyrobie $A_3$ występują dwa jednakowe podzespoły $\underline{\mathrm{B}}$, dwa jednakowe podzespoły $\underline{\mathrm{D}}$ oraz dwa jednakowe podzespoły $\underline{\mathrm{F}}$. Ich listy części są podane oddzielnie niżej. W podzespołach $\underline{\mathrm{B}}$, $\underline{\mathrm{D}}$ i $\underline{\mathrm{F}}$ użyty jest wielokrotnie podzespół $\underline{\mathrm{B}}^1$, którego lista części podana jest oddzielnie. Zasada ta może być również zastosowana oczywiście dla list rozszerzonych i relacyjnych.

*Ćwiczenia*

1. Narysować drzewo dla listy podanej w przykładzie.
2. Wykazać, że podana w przykładzie lista jest poprawna.

[5] Przez $\lambda x$ oznaczaliśmy listę części wyrobu $x$. Dla uproszczenia będziemy też listę części wyrobu $x$ oznaczać przez $\lambda(\bar{x})$, jak to uczyniono w podanym wyżej przykładzie. Przypominamy, że $\bar{x}$ oznacza nazwę wyrobu $x$.



3. Przedstawić listę podaną w przykładzie w postaci listy beznawiasowej.
4. Podać listę uproszczoną dla rozszerzonej listy zawierającej jednakowe wyroby.

### 1.2.8. *Zmodyfikowane listy relacyjne*

Jeżeli w wyrobie występuje wiele jednakowych części (w poprzednim paragrafie rozpatrywaliśmy przypadek wielu jednakowych podzespołów), wygodnie jest czasem dysponować listą taką, w której każdy rodzaj wyrobu występuje tylko raz i przy każdym z nich podajemy wszystkie części, których jest on bezpośrednim składnikiem. A więc jest to pewna modyfikacja relacyjnej listy części.

Przykład takiej listy podajemy poniżej:

$$\begin{array}{l}
A\\
BA\\
DBCA\\
CB\\
GC\\
HCE\\
EA\\
FCE
\end{array}$$

Lista ta jest wprawdzie krótsza od list podawanych poprzednio, jednakże w niektórych przypadkach mniej wygodna w stosowaniu.

W dalszym ciągu w zasadzie będziemy się posługiwać listami beznawiasowymi i będziemy je krótko nazywać po prostu listami części. W zależności od potrzeb będziemy też używać innych rodzajów zdefiniowanych tu list pisząc wtedy wyraźnie, o jaki rodzaj listy nam chodzi.

*Ćwiczenia*

1. Podać drzewo dla listy cytowanej w ostatnim przykładzie.
2. Przedstawić listę podaną w przykładzie w postaci:
   a) listy beznawiasowej,
   b) listy rozszerzonej,
   c) listy relacyjnej.

## 1.3. PROCESY PRODUKCYJNE — POJĘCIA WSTĘPNE

### *1.3.1. Intuicyjne pojęcie procesu produkcyjnego*

Wyroby są wytwarzane w wyniku realizacji procesu obróbki i montażu ich części składowych. Proces produkcyjny jest zatem zespołem odpowiednich operacji, które z materiałów wyjściowych poprzez obróbkę i montaż prowadzą do końcowych wyrobów. W dalszym ciągu przez proces produkcyjny będziemy rozumieli proces montażu, gdyż operacje obróbki, takie jak toczenie, kucie itp., z rozpatrywanego tu punktu widzenia nie grają roli, a w razie potrzeby mogą być łatwo uwzględnione.

Będziemy więc przyjmowali, że właśnie wszelkie rozpatrywane przez nas wyroby złożone powstają w wyniku montażu z elementów i podzespołów.

Proces produkcyjny odbywa się w czasie. W każdej ustalonej jednostce czasu wykonywane są pewne operacje, w wyniku których z jednych części powstają nowe, bardziej złożone części, a w etapie końcowym powstaje wyrób końcowy.

W ten sposób po odpowiedniej liczbie kroków z elementów wyjściowych otrzymujemy wyrób końcowy.



### *1.3.2. Klasyfikacja procesów produkcyjnych*

W wyniku procesu produkcyjnego możemy otrzymać jeden wyrób bądź wiele wyrobów, np. zakład produkcyjny może jednocześnie wytwarzać samochody osobowe, ciągniki i autobusy. Należy więc rozróżniać procesy produkcyjne jednowyrobowe i wielowyrobowe. Te drugie z kolei można również podzielić na mniejsze podklasy zależnie od wybranych kryteriów podziału. Jeżeli jako kryterium podziału przyjmiemy okres, po jakim pojawią się kolejne wyroby, to procesy produkcyjne wielowyrobowe wygodnie jest podzielić na produkcję seryjną i masową. Zakładamy, że w produkcji seryjnej okres, po upływie którego pojawiają się kolejne wyroby, jest stosunkowo długi. Należy to rozumieć w ten sposób, że po zakończeniu jednego wyrobu przystępuje się do wykonania następnego wyrobu z serii.

Natomiast w produkcji masowej okres, po jakim się pojawiają kolejne wyroby, jest bardzo krótki. Wiele wyrobów wykonuje się jednocześnie, tak że kolejne wyroby końcowe pojawiają się w bardzo krótkich odstępach czasu.

Tak więc procesy produkcyjne podzielimy na

1) jednowyrobowe,
2) wielowyrobowe,

procesy produkcyjne wielowyrobowe zaś będziemy dzielili na:

1) seryjne i 2) masowe.

W dalszym ciągu, zamiast używać terminów: procesy produkcyjne jednowyrobowe, wielowyrobowe, seryjne czy masowe, będziemy na ogół używali nazw krótszych, powszechnie przyjętych, a mianowicie:

1) produkcja jednostkowa,
2) produkcja wielowyrobowa,
3) produkcja seryjna,
4) produkcja masowa.

Dokładniejsze określenie różnych rodzajów produkcji podamy w dalszych rozdziałach.

### *1.3.3. Uwagi o formalizacji pojęcia produkcji*

Zanim podamy ścisłe określenie różnych rodzajów produkcji, warto zwrócić uwagę na pewne analogie zachodzące między procesem produkcyjnym a procesem rachunkowym.

Przebieg procesu obliczeń bardzo przypomina przebieg wykonywania jakiegoś wyrobu z jego części składowych. Na pewnych liczbach wyjściowych wykonujemy operacje arytmetyczne, w wyniku których otrzymujemy nowe liczby, wyniki pośrednie, na których z kolei wykonujemy dalsze operacje itd., aż otrzymamy jedną liczbę — wynik końcowy. Analogie tę są dość pożyteczne, tak że w definicji procesu produkcyjnego będziemy się wzorowali na definicji obliczania stosowanej w teorii maszyn matematycznych. Oczywiście, analogie te nie mogą iść zbyt daleko i należy wyraźnie stwierdzić, że aparatu formalnego teorii maszyn matematycznych nie można tu przenosić dosłownie.

Ostatecznie o co innego chodzi w teorii maszyn matematycznych, a inne cele ma na uwadze organizacja produkcji. Zwrócenie jednakże uwagi na podobieństwo między procesem obliczeniowym a procesem produkcyjnym powinno ułatwić Czytelnikowi zrozumienie podanych dalej definicji.

## 1.4. PROCES PRODUKCYJNY PODSTAWOWY

### *1.4.1. Definicja podstawowego procesu produkcyjnego*

W dalszym ciągu skończony zbiór wyrobów będziemy też nazywali wyrobem. Niech więc $W$ będzie wyrobem (pojedynczym bądź składającym się z wielu wyrobów).

Skończony ciąg

(1) $P = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_k$, gdzie $\mathfrak{F}_i$ jest zbiorem wyrobów, takim że $\mathfrak{F}_i \subset C(W)$, nazwiemy *podstawowym procesem produkcyjnym* 



wyrobu $W$ lub krótko *procesem podstawowym* bądź *produkcją podstawową*, jeżeli spełnia warunek

(2) $$\mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_{i+1} = \beta^*(\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i), \quad 1 \leqslant i < k,$$

gdzie

$$\beta^*(X) = \bigcup_{j=1}^{s} \beta(x_j),$$

zaś

$$X = \{x_1, \ldots, x_s\}.$$

$F_k$ będziemy nazywali *zbiorem wyrobów końcowych procesu P*.

Każdą parę $\mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_{i+1}$ będziemy nazywali *i-tym krokiem procesu produkcyjnego P* i będziemy mówili, że zbiór $\mathfrak{F}_{i+1}$ jest wynikiem zastosowania kroku $i$ do zbioru $\mathfrak{F}_i$. Krok, taki że $\overline{\overline{\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i}} = 1$, będziemy nazywali *operacją montażu*. Jeżeli $\overline{\overline{\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i}} = k$ $(k > 1)$, to $i$-ty krok produkcji będzie oznaczał wykonanie jednocześnie $k$ operacji.

Liczbę kroków procesu produkcyjnego będziemy nazywali *długością podstawowego procesu produkcyjnego P*.

*Przykład.* Przyjmijmy wyrób, którego schemat podany jest na rys. 5 i rozpatrzmy następujący ciąg

$$\mathfrak{F}_1 = \{E, F, G, H, I, D\}$$
$$\mathfrak{F}_2 = \{B, G, H, I, D\}$$
$$\mathfrak{F}_3 = \{B, C, D\}$$
$$\mathfrak{F}_4 = \{A\}.$$

Łatwo sprawdzić, że podany ciąg przedstawia podstawowy proces produkcyjny wyrobu podanego na rys. 5. W pierwszym kroku ze zbioru $\mathfrak{F}_1$ otrzymujemy zbiór $\mathfrak{F}_2$. Ponieważ

$$\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2 = \{E, F, G, H, I, D\} - \{B, G, H, I, D\} = \{E, F\},$$
$$\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1 = \{B, G, H, I, D\} - \{E, F, G, H, I, D\} = B,$$

zaś $E$ i $F$ są bezpośrednimi składnikami $B$ (patrz rys. 5.), warunek (2) jest spełniony.

W drugim kroku ze zbioru $\mathfrak{F}_2$ otrzymamy zbiór $\mathfrak{F}_3$ spełniający warunek (1). Otrzymamy

$$\mathfrak{F}_2-\mathfrak{F}_3 = \{B, G, H, I, D\}-\{B, C, D\} = \{G, H, I\},$$
$$\mathfrak{F}_3-\mathfrak{F}_2 = \{B, C, D\}-\{B, G, H, I, D\} = C,$$

zaś na podstawie rys. 5 mamy

$$C = \beta(G, H, I).$$

W trzecim kroku ze zbioru $\mathfrak{F}_3$ otrzymamy zbiór $\mathfrak{F}_4$. Ponieważ

$$\mathfrak{F}_3-\mathfrak{F}_4 = \{B, C, D\}-\{A\} = \{B, C, D\},$$
$$\mathfrak{F}_4-\mathfrak{F}_3 = \{A\}-\{B, C, D\} = A$$

oraz

$$A = \beta(B, C, D),$$

więc w trzecim kroku jest spełniony warunek (2).

W rezultacie podany ciąg przedstawia podstawowy proces produkcyjny wyrobu, którego schemat przedstawiono na rys. 5.

Jeżeli podstawowy proces produkcyjny $P$ ma postać $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_k$, to zapiszemy $P(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{F}_k$ i będziemy mówili, że $\mathfrak{F}_k$ jest wynikiem zastosowania procesu $P$ do zbioru $\mathfrak{F}_1$.

Powiemy, że podstawowe procesy produkcyjne $P$ i $P'$ są równoważne (co napiszemy $P \sim P'$), gdy $P(\mathfrak{F}_1) = P'(\mathfrak{F}_1)$, co oznacza, że procesy są równoważne wówczas, gdy zastosowane do tego samego zbioru wyrobów $\mathfrak{F}_1$ dają jednakowe (tj. o takich samych schematach) wyroby końcowe. Z punktu widzenia równoważności nie interesuje nas, w jaki sposób proces przebiega.

Jeżeli procesy $P = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_k$ oraz $P' = \mathfrak{F}'_1, \ldots, \mathfrak{F}'_k$ są równoważne i jeżeli dla każdego $i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}'_i$, to powiemy, że procesy $P$ i $P'$ są *równe*.



Procesy równe wytwarzają więc jednakowe wyroby w jednakowy sposób.

*Ćwiczenia*

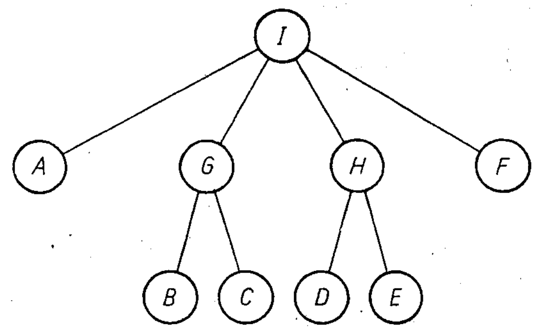
1. Sprawdzić, czy podane niżej ciągi przedstawiają podstawowe procesy produkcyjne wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 5.

a) $\mathfrak{F}_1 = \{E, F, G, H, I, D\}$,
$\mathfrak{F}_2 = \{B, C, D\}$,
$\mathfrak{F}_3 = \{A\}$.

b) $\mathfrak{G}_1 = \{E, F, G, H, I, D\}$,
$\mathfrak{G}_2 = \{E, F, C, D\}$,
$\mathfrak{G}_3 = \{A\}$.

c) $\mathfrak{H}_1 = \{E, F, G, H, I, D\}$,
$\mathfrak{H}_2 = \{E, F, C, I, D\}$,
$\mathfrak{H}_3 = \{B, C, I, D\}$,
$\mathfrak{H}_4 = \{A\}$.

2. Podać podstawowe procesy produkcyjne wyrobu, którego drzewo przedstawiono na rys. 6.




*Rys. 6*

3. Podać schematy wyrobów otrzymanych w następujących procesach:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1 &= \{A, B, C, D, E\},\\
\mathfrak{F}_2 &= \{A, F, D, E\},\\
\mathfrak{F}_3 &= \{G, E\},\\
\mathfrak{F}_4 &= \{H\};\\
\mathfrak{S}_1 &= \{A, B, C, D, E\},\\
\mathfrak{S}_2 &= \{A, B, F\},\\
\mathfrak{S}_3 &= \{B, G\},\\
\mathfrak{S}_4 &= \{H\};\\
\mathfrak{H}_1 &= \{A, B, C, D, E\},\\
\mathfrak{H}_2 &= \{A, F, E\},\\
\mathfrak{H}_3 &= \{G, E\},\\
\mathfrak{H}_4 &= \{H\}.
\end{aligned}$$

4. Sprawdzić, czy procesy podane w ćwiczeniu 3 są równoważne.

### *1.4.2. Klasyfikacja podstawowych procesów produkcyjnych*

Niech $P = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_k$ będzie podstawowym procesem produkcyjnym.

Jeżeli $\overline{\overline{\mathfrak{F}_k}} = 1$, to $P$ będziemy nazywali *produkcją jednowyrobową* (lub *jednostkową*).

Jeżeli $\overline{\overline{\mathfrak{F}_k}} > 1$, to $P$ będziemy nazywali *produkcją wielowyrobową*.

Jeżeli dla każdego $i$ $(1 \leqslant i < k)$ $\overline{\overline{\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i}} = 1$, to $P$ nazwiemy *produkcją szeregową*.

Jeżeli istnieje takie $i$ $(1 \leqslant i < k)$, że $\overline{\overline{\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i}} > 1$, to $P$ nazwiemy *produkcją równoległą*.

W produkcji jednowyrobowej (jednostkowej) w wyniku procesu produkcyjnego powstaje jeden wyrób końcowy.



Gdy wynikiem procesu produkcyjnego jest więcej niż jeden wyrób końcowy, mówimy o produkcji wielowyrobowej.

Produkcję nazywamy szeregową, jeżeli w każdym kroku produkcji otrzymujemy jeden nowy wyrób (gdyż wszystkie operacje montażu wykonujemy kolejno, szeregowo).

W przypadku gdy chociaż w jednym kroku procesu produkcyjnego otrzymamy więcej niż jeden wyrób, produkcję nazywamy *równoległą* (gdyż niektóre operacje montażu wykonujemy jednocześnie, równolegle).

Oczywiste, że może istnieć zarówno produkcja jednostkowa równoległa, jak i produkcja wielowyrobowa szeregowa. W pierwszym przypadku, w trakcie produkowania wyrobu wykonujemy więcej niż jedną operację jednocześnie, w drugim zaś — wykonywanie wielu wyrobów odbywa się w ten sposób, że w każdej chwili wykonywana jest co najmniej jedna operacja.

*Przykład.* Jeżeli schemat podany na rys. 6 jest schematem wyrobu $W$, to podany niżej ciąg przedstawia jednostkowy, równoległy proces wyrobu $W$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1 &= \{A, B, C, D, E, F\},\\
\mathfrak{F}_2 &= \{A, G, H, F\},\\
\mathfrak{F}_3 &= \{I\}.
\end{aligned}$$

W pierwszym kroku produkcji wykonujemy jednocześnie dwie operacje: w jednej — z elementów $B$ i $C$ otrzymujemy podzespół $G$, w drugiej z elementów $D$ i $E$ podzespół $H$.

*Przykład.* Jeżeli schemat wyrobu $W$ jest taki jak podano na rys. 7 (składa się z dwu wyrobów), to ciąg

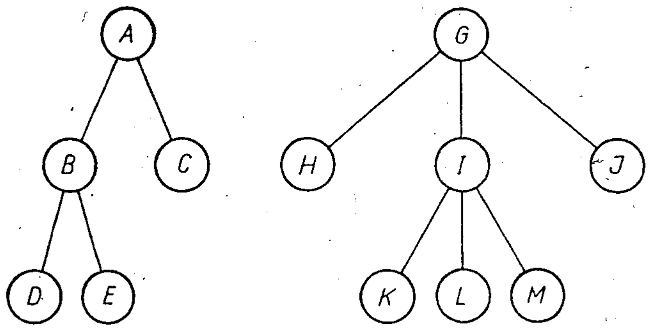
$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1 &= \{D, E, C, H, K, L, M, J\}\\
\mathfrak{F}_2 &= \{B, C, H, K, L, M\}\\
\mathfrak{F}_3 &= \{B, C, H, I, J\}\\
\mathfrak{F}_4 &= \{A, H, I, J\}\\
\mathfrak{F}_5 &= \{A, G\}
\end{aligned}$$

przedstawia szeregowy proces wielowyrobowy.

W procesie tym wykonujemy na przemian operacje montażu podzespołów obu wyrobów.

*Ćwiczenia*

1. Dla wyrobu, którego schemat podano na rys. 6, podać szeregowy proces produkcyjny.
2. Dla wyrobu, którego schemat przedstawiliśmy na rys. 7, podać równoległy proces produkcyjny.




*Rys. 7*

3. Ustalić, jakie procesy produkcyjne przedstawiają niżej podane ciągi:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1 &= \{A, B, C, D, E, F, G\},\\
\mathfrak{F}_2 &= \{A, H, I\},\\
\mathfrak{G}_1 &= \{A, B, C, D, E, F, G\},\\
\mathfrak{G}_2 &= \{A, H, E, F, G\},\\
\mathfrak{G}_3 &= \{A, H, I\},\\
\mathfrak{H}_1 &= \{A, B, C, D, E, F, G\},\\
\mathfrak{H}_2 &= \{H, E, F, G\},\\
\mathfrak{H}_3 &= \{H, I\},\\
\mathfrak{H}_4 &= \{J\},\\
\mathfrak{I}_1 &= \{A, B, C, D, E, F, G\},\\
\mathfrak{I}_2 &= \{H, I\},\\
\mathfrak{I}_3 &= \{J\}.
\end{aligned}$$



### *1.4.3. Długość procesu produkcyjnego*

Niech $P_W = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_k$ będzie podstawowym procesem produkcyjnym wyrobu $W$. Liczbę $k$ będziemy nazywali *długością procesu* $P_W$ i oznaczymy ją przez $d(P_W)$, tj. $k = d(P_W)$.

Jeżeli $P = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_k$ oraz $Q = \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r$ są podstawowymi procesami produkcyjnymi, to ciągi

$$PQ = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_k, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_r$$

lub

$$PQ = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_{k-1}, \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r$$

będziemy nazywali złożeniem procesów $P$ i $Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{F}_k = \mathfrak{H}_1$$

oraz

$$\mathfrak{F}_k - \mathfrak{H}_2 = \beta^*(\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{F}_k),$$

lub inaczej

$$\mathfrak{F}_{k-1} - \mathfrak{H}_1 = \beta^*(\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{F}_{k-1}).$$

Oczywiście, jeżeli

$$P = P_1 P_2,$$

to

$$d(P) = d(P_1) + d(P_2) - 1.$$

Jest również sprawą oczywistą, że każdy proces

$$P = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_s, \mathfrak{F}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{F}_t \quad (t > 1)$$

możemy traktować jako złożenie procesów

$$P' = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_s$$

oraz

$$P'' = \mathfrak{F}_s, \mathfrak{F}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{F}_t.$$

Podamy teraz (w postaci twierdzeń) kilka prostych własności dotyczących długości procesów produkcyjnych.

*Twierdzenie 1.* Dla każdego wyrobu $W$ i dowolnego procesu $P_W$

$$d(P_W) > \gamma(W).^6$$

Twierdzenie to mówi, że *żadnego procesu produkcyjnego wyrobu W nie można zrealizować za pomocą liczby kroków mniejszej niż głębokość wyrobu W* (daje więc oszacowanie długości procesu „od dołu").

*Dowód.* Prawdziwość tego twierdzenia można wykazać przez indukcję.

Jest rzeczą oczywistą, że twierdzenie 1 jest prawdziwe dla wyrobów takich, że $\gamma(W) = 1$. Wyroby te bowiem można otrzymać w wyniku procesu produkcyjnego składającego się co najmniej z jednego kroku, tj. procesu mającego postać $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$.

Załóżmy, że twierdzenie 1 zachodzi dla wyrobów takich, że $\gamma(W) = n$. Wykażemy, że zachodzi ono również dla wyrobów $W'$ o głębokości $\gamma(W') = n+1$.

Niech $P_{W'}$ ma postać

$$P_{W'} = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_t, \mathfrak{F}_{t+1}, \ldots, \mathfrak{F}_r.$$

Ponieważ z założenia indukcyjnego $\gamma(P_{W'}) = n+1$, więc $P_{W'}$ możemy uważać za złożenie dwu procesów $P^1_{W_1}$ oraz $P^2_{W_2}$, takich że

$$P^1_{W_1} = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_t, \quad P^2_{W_2} = \mathfrak{F}_t; \mathfrak{F}_{t+1}, \ldots, \mathfrak{F}_r \quad \text{oraz} \quad \gamma(P^2_{W_2}) = n,$$

zaś $W_2$ jest wyrobem otrzymanym z wyrobu $W'$ przez odrzucenie wszystkich detali rzędu $n+1$ i oczywiście

$$P_{W'} = P^1_{W_1} P^2_{W_2}.$$

Z założenia indukcyjnego

$$d(P^2_{W_2}) > \gamma(W_2) = n.$$

[6] Jeżeli $W$ jest jednym wyrobem, to $\gamma(W)$ jest głębokością wyrobu $W$ w sensie podanym w poprzednim paragrafie; jeżeli zaś $W$ składa się z wielu wyrobów $W_1, \ldots, W_s$, to $\gamma(W)$ max $(\gamma(W_1), \ldots, \gamma(W_s))$.



Ponieważ

$$d(P^1_{W_1}) > 1$$

oraz

$$d(P_{W'}) = d(P^1_{W_1}) + d(P^2_{W_2}) - 1$$

więc

$$d(P^1_{W_1}) + d(P^2_{W_2}) - 1 > 2 + n - 1,$$

czyli

$$d(P_{W'}) > n+1,$$

skąd otrzymujemy

$$d(P_{W'}) > \gamma(W'),$$

co kończy dowód.

*Twierdzenie 2.* Dla każdego wyrobu $W$ oraz dla każdego podstawowego procesu produkcyjnego $P_W$

$$D(W) \geqslant d(P_W),$$

gdzie $D(W)$ oznacza liczbę detali wyrobu $W$.

Inaczej mówiąc *dowolny proces jakiegokolwiek wyrobu nie może być dłuższy niż liczba detali wyrobu.* Twierdzenie to podaje oszacowanie „od góry".

*Dowód.* Prawdziwość twierdzenia 2 wykażemy przez indukcję względem liczby detali wyrobu.

Jeżeli $D(W) = 2$, to $d(P_W) = 2$, a więc twierdzenie 2 zachodzi. Załóżmy, że twierdzenie 2 zachodzi dla każdego procesu $P_W$ i wyrobu $W$, takiego że $D(W) \leqslant n$. Pokażemy, że zachodzi ono również dla każdego procesu $P_{W'}$ i wyrobu $W'$, dla którego $D(W') = n+1$. Niech $P_{W'}$ ma postać

$$P_{W'} = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_s.$$

$P_{W'}$ możemy więc przedstawić jako złożenie procesów $P^1_{W_1}$ i $P^2_{W_2}$, tj.

$$P_{W'} = P^1_{W_1} P^2_{W_2},$$

gdzie

$$P^1_{W_1} = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2,$$

zaś

$$P^2_{W_2} = \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots, \mathfrak{F}_s.$$

Oczywiście

$$D(W_2) = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_2 \leqslant n.$$

Z założenia indukcyjnego

$$d(W_2) \leqslant D(W_2).$$

Ponieważ

$$D(W_2) \leqslant n$$

oraz

$$d(P_{W'}) = d(P^1_{W_1}) + d(P^2_{W_2}) - 1,$$

zaś

$$d(P^1_{W_1}) = 2,$$

więc

$$d(P_{W'}) \leqslant 2+n-1 = n+1 = D(W'),$$

co kończy dowód.

Podamy teraz inne oszacowanie „od góry" długości procesu produkcyjnego, które w pewnych przypadkach okazuje się nieco lepsze od podanego w twierdzeniu 2, bazujące na znajomości liczby detali wyrobu oraz krotności jego podzespołów.

*Twierdzenie 3*. Dla każdego wyrobu $W$, dla którego $\varkappa^*(W) \geqslant 2$ oraz dla każdego podstawowego procesu produkcyjnego $P_W$ o długości $d(P_W)$ spełniona jest nierówność:

$$\left[\frac{D(W)-1}{\varkappa^*(W)-1}+1\right]+1 > d(P_W). \tag{1}$$



*Dowód*[7]. Dla dowodu weźmy pod uwagę dowolny wyrób $W$ oraz wyrób $W_1$, dla których spełnione są równości:

$$\varkappa^*(W) = \varkappa^*(W_1),$$
$$d(P_W) = d(P_{W_1}),$$

przy czym, jeżeli

$$P_{W_1} = \mathfrak{F}'_1 \mathfrak{F}'_2 \ldots \mathfrak{F}'_{d(P_{W_1})},$$

to dla każdego $i = 2, 3, \ldots, d(P_W)$ spełnione są założenia: $\mathfrak{F}'_{i-1} \cap \mathfrak{F}'_i = \Phi$; każdy zbiór $\mathfrak{F}'_i$ zawiera tylko jeden podzespół oraz krotności wszystkich podzespołów są równe $\varkappa^*(W_1)$.

Dla takiego wyrobu liczbę detali $D(W_1)$ można zapisać wzorem:

$$D(W_1) = [d(P_{W_1})-2](\varkappa^*(W_1)-1)+\varkappa^*(W_1).$$

Dowód twierdzenia polega na wykazaniu, że dla dowolnego wyrobu $W$, dla którego:

$$\varkappa^*(W) = \varkappa^*(W_1) \quad \text{oraz} \quad d(P_W) = d(P_{W_1})$$

zachodzi nierówność:

$$D(W) \geqslant D(W_1).$$

Gdyby tak nie było, to wyrób $W$ można by otrzymać przez odjęcie niektórych detali lub podzespołów od wyrobu $W_1$. To jest jednak niemożliwe, gdyż:

1) odjęcie chociażby jednego detalu bez zmiany liczby podzespołów zmniejszy najmniejszą krotność $\varkappa^*(W_1)$;

2) zmniejszenie liczby podzespołów bez zmiany liczby $d(P_{W_1})$ spowoduje, że ciąg $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{d(P_1)}$ przestanie być podstawowym procesem produkcyjnym, ponieważ liczba zbiorów $\mathfrak{F}_i$ nie ulega zmianie, przy czym każdy z nich zawiera tylko jeden podzespół, a zatem zmniejszenie liczby podzespołów spowoduje, że co najmniej jeden ze zbiorów $\mathfrak{F}_i(i = 2, 3, \ldots, d(P_{W_1}))$ nie

[7] Twierdzenie to oraz jego dowód podał mgr Burlaga.

będzie zawierał żadnego podzespołu, czyli $\beta^*(\mathfrak{F}_i) = \Phi$. Przypuśćmy, że mimo tego ciąg $\mathfrak{F}'_1, \mathfrak{F}'_2, \ldots, \mathfrak{F}'_{d(P_{W_1})}$ jest podstawowym procesem produkcyjnym i zachodzi równość:

$$\mathfrak{F}'_{i-1}-\mathfrak{F}'_i = \beta^*(\mathfrak{F}'_i-\mathfrak{F}'_{i-1}).$$

Ponieważ z założenia o wyrobie $W_1$

$$\mathfrak{F}'_{i-1} \cap \mathfrak{F}'_i = \Phi,$$

to

$$\beta^*(\mathfrak{F}_i-\mathfrak{F}_{i-1}) = \beta^*(\mathfrak{F}_i) = \Phi, \quad \text{skąd} \quad \mathfrak{F}'_{i-1}-\mathfrak{F}'_i = \Phi$$
$$\text{oraz } \mathfrak{F}'_{i-1} = \Phi,$$

a to oznacza, że zmniejszy się długość procesu produkcyjnego, co jednak przeczy założeniu. Nierówność: $D(W) \geqslant D(W_1)$ jest zatem prawdziwa, wobec czego można napisać:

$$D(W) \geqslant (d(P_W)-2)(\varkappa^*(W)-1)+\varkappa^*(W).$$

Dokładniejsze oszacowanie długości procesu produkcyjnego można otrzymać wówczas, gdy znana jest liczba $m$ podzespołów o krotności $\varkappa^*(W)$. Zakładając, że $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_{i+1} = \Phi$ oraz że każdy zbiór $\mathfrak{F}_i$ zawiera tylko jeden podzespół, można napisać nierówność:

$$D(W) \geqslant (d(P_W)-m-1)(\varkappa^*(W)+(m-1)(\varkappa^*(W)-1)+\varkappa^*(W),$$

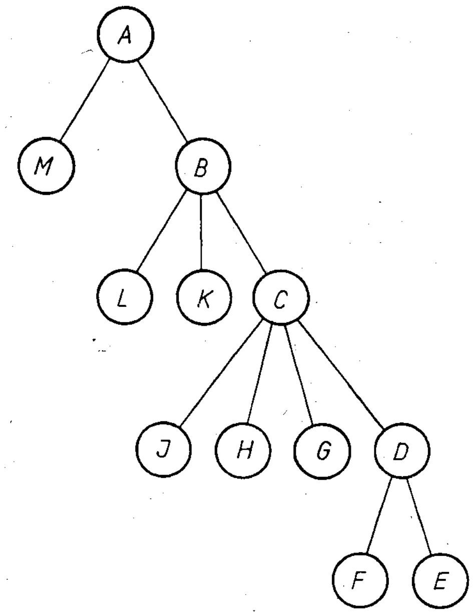
z której wynika wzór:

(2) $$\left[\frac{D(W)+\varkappa^*(W)+m-1}{(W)}\right]+1 > d(P_W).$$

*Przykład.* Weźmy wyrób $W$ o charakterystykach: $D(W) = 8$, $\varkappa^*(W) = 2$, $m = 2$, $d(P_W) = 5$

$$\mathfrak{F}_1 = \{E, F, G, J, J, K, L, M\}$$
$$\mathfrak{F}_2 = \{D, G, H, J, K, L, M\}$$
$$\mathfrak{F}_3 = \{C, K, L, M\}$$
$$\mathfrak{F}_4 = \{B, M\}$$
$$\mathfrak{F}_5 = \{A\}$$






*Rys. 8*

Oszacowanie liczby $d(P_W) = 5$ jest następujące:

— według wzoru (1):

$$\left[\frac{8-1}{2-1}+1\right]+1 = 9 > 5,$$

— według wzoru (2):

$$\left[\frac{8+2+2-1}{2}\right]+1 = 6 > 5$$

Widać, że wzór (2) daje oszacowanie lepsze niż wzór (1).

*Ćwiczenia*

1. Podać oszacowania długości podstawowych procesów produkcyjnych dla wyrobów, których schematy przedstawiono na rys. 4, 6, 7. Podać przykłady najdłuższych i najkrótszych procesów produkcyjnych dla tych wyrobów.

## 1.5. PRODUKCJA SERYJNA I MASOWA

### *1.5.1. Produkcja seryjna*

Niech $P_1, P_2, \ldots, P_n$ będą podstawowymi procesami produkcyjnymi. Będziemy mówili, że procesy $P_1, P_2, \ldots, P_n$ są realizowane seryjnie wtedy i tylko wtedy, gdy po ukończeniu procesu $P_i$ rozpoczynamy wykonanie procesu $P_{i+1}$ dla wszelkich $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Jeżeli procesy podstawowe $P_1, P_2, \ldots, P_n$ są realizowane seryjnie, to ciąg $P_1, P_2, \ldots, P_n$ nazwiemy *produkcją seryjną* i oznaczymy ją $S(P)$, gdzie $P = P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Jeżeli $P_1 = P_2 = \ldots = P_n$, to $P$ nazwiemy *ustaloną, powtarzalną produkcją seryjną*, natomiast jeżeli $P_1 \sim P_2 \sim \ldots \sim P_n$, to $P$ nazwiemy *nieustaloną powtarzalną produkcją seryjną.*

Jeżeli natomiast istnieją takie $i, j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, że $P_i \nsim P_j$, to $P$ nazwiemy *niepowtarzalną produkcją seryjną.*

W produkcji powtarzalnej otrzymujemy więc jednakowe przedmioty w każdym poszczególnym procesie podstawowym wchodzącym w skład produkcji seryjnej. Jeżeli wszystkie przedmioty są produkowane w identyczny sposób, to mówimy o produkcji ustalonej. Natomiast jeżeli w wyniku produkcji seryjnej otrzymane produkty końcowe są jednakowe, jednakże uzyskano je przez równoważne, ale niekoniecznie równe produkcje podstawowe, to taka produkcja seryjna jest nieustalona. Oznacza to, że produkty produkcji seryjnej nieustalonej mogą być otrzymywane w różny sposób, np. za pomocą różnych operacji wykonywanych w różnej kolejności. Natomiast produkcję seryjną, w wyniku której otrzymujemy różne przedmioty, nazywamy niepowtarzalną produkcją seryjną.



*Ćwiczenie*

Przyjmując jako podstawę proces produkcyjny wyrobu, którego schemat pokazano na rys. 8, podać przykłady powtarzalnej i niepowtarzalnej produkcji seryjnej.

### *1.5.2. Produkcja masowa*

Niech $P_1, P_2, \ldots, P_n$ będą podstawowymi procesami produkcyjnymi o jednakowej[8] długości $m = d(P_i)$.

Każdy z procesów $P_1, P_2, \ldots, P_n$ składa się więc z $s = m-1$ kroków. Przez $t_i(P_j)$ będziemy oznaczali $i$-ty krok procesu $P_j$. Oznaczmy ciąg $P_1, P_2, \ldots, P_n$ przez $P$. Wtedy $T_r(P)$ będzie oznaczać zbiór kroków $\{t_1(P_r), t_2(P_{r-1}), \ldots, t_s(P_{r-s})\}$ procesów $P_1, P_2, \ldots, P_n$:

$$T_r(P) = \{t_1(P_r), t_2(P_{r-1}), \ldots, t_s(P_{r-s})\}.$$

$T_r(P)$ będziemy nazywali *krokiem masowym* i będziemy rozumieli, że w kroku masowym są wykonywane jednocześnie wszystkie kroki $t_1(P_r), t_2(P_{r-1}), \ldots, t_s(P_{r-s})$, zwane w dalszym ciągu *krokami podstawowymi kroku masowego* $T_r(P)$.

Będziemy mówili, że procesy $P_1, P_2, \ldots, P_n$ są realizowane masowo wtedy i tylko wtedy, gdy w procesach $P_1, P_2, \ldots, P_n$ operacje są wykonywane w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
T_1(P) &= t_1(P_1), \\
T_2(P) &= \{t_1(P_2), t_2(P_1)\}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
T_s(P) &= \{t_1(P_s), t_2(P_{s-1}), \ldots, t_s(P_1)\}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
T_j(P) &= \{t_1(P_j), t_2(P_{j-1}), \ldots, t_s(P_{j-(s-1)})\}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

---

[8] Założenie o jednakowej długości wszystkich procesów podstawowych nie jest niezbędne do dalszych rozważań — przyjęliśmy je jedynie dla uproszczenia.

$$T_n(P) = \{t_1(P_n), t_2(P_{n-1}), \ldots, t_s(P_{n-(s-1)})\},$$
$$T_{n+1}(P) = \{t_2(P_n), t_3(P_{n-1}), \ldots, t_s(P_{n+2-s})\},$$
$$T_{n+2}(P) = \{t_3(P_n), t_4(P_{n-1}), \ldots, t_s(P_{n+3-s})\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T_{n+s-1}(P) = t_s(P_n).$$

Jeżeli procesy $P_1, P_2, \ldots, P_n$ są wykonywane masowo, to ciąg $P = P_1, P_2, \ldots, P_n$ nazwiemy *produkcją masową o podstawie $P$* i oznaczymy ją przez

$$\mathfrak{M}(P) = T_1(P), T_2(P), \ldots, T_{n+s-1}(P).$$

Kroki $T_1(P), \ldots, T_{s-1}(P)$ nazwiemy *rozruchem produkcji* $\mathfrak{M}(P)$, kroki $T_s(P), \ldots, T_n(P)$ — *produkcją właściwą produkcji* $\mathfrak{M}(P)$, zaś kroki $T_{n+1}(P), \ldots, T_{n+s-1}(P)$ nazwiemy *zakończeniem produkcji masowej* $\mathfrak{M}(P)$.

A więc w czasie rozruchu produkcji masowej $\mathfrak{M}(P)$ w pierwszym kroku $T_1(P)$ wykonujemy tylko jeden krok podstawowy $t_1(P_1)$, pierwszy krok pierwszego procesu. W drugim kroku $T_2(P)$ produkcji $\mathfrak{M}(P)$ wykonujemy dwa kroki podstawowe $t_1(P_2)$ oraz $t_2(P_1)$ itd.

W ten sposób w każdym kroku rozruchu $T_i(P)$ przybywa jeden krok podstawowy następnego procesu podstawowego. W czasie rozruchu nie otrzymujemy żadnych wyrobów końcowych.

Produkcja właściwa zaczyna się od kroku $T_s(P)$, w którym otrzymujemy pierwszy wyrób końcowy. Ostatnim krokiem produkcji właściwej jest krok $T_n(P)$. W każdym kroku $T_j(P)$ produkcji właściwej wykonujemy $s$ kroków podstawowych $t_1(P_j), t_2(P_{j-1}), \ldots, t_s(P_{j-(s-1)})$.

Każdy krok podstawowy należy do innego procesu podstawowego, tak że w każdym kroku masowym $T_j(P)$ wykonujemy jednocześnie $s$ różnych kroków podstawowych w $s$ kolejnych procesach podstawowych $j-s, j-(s-1), \ldots, j$.

Zakończenie produkcji zaczyna się od kroku $T_{n+1}$ i kończy się na kroku $T_{n+s-1}$. W każdym kroku zakończenia otrzymujemy również jeden wyrób końcowy, jednakże każdy krok $T_r(P)$ zakończenia zawiera o jedną operację podstawową mniej od kroku poprzedniego $T_{r-1}(P)$.



W ten sposób w ostatnim kroku zakończenia $T_{n+s-1}(P)$ wykonywana jest tylko jedna, ostatnia operacja podstawowa $t_s(P_n)$.

Podobnie jak to uczyniliśmy dla produkcji seryjnej możemy wprowadzić klasyfikację produkcji masowej w zależności od charakteru procesów $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Jeżeli

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n,$$

to produkcję masową $\mathfrak{M}(P)$ nazwiemy *ustaloną powtarzalną*.

Jeżeli

$$P_1 \sim P_2 \sim \ldots \sim P_n,$$

to produkcję masową $\mathfrak{M}(P)$ nazwiemy *nieustaloną powtarzalną*.

Jeżeli $P_i \neq P_j$ dla pewnych $1 \leqslant i, j \leqslant n$, to produkcję masową $\mathfrak{M}(P)$ nazwiemy *niepowtarzalną*.

W produkcji masowej wszystkie procesy podstawowe mogą być równe, co powoduje, że otrzymujemy w trakcie produkcji masowej jednakowe wyroby produkowane w jednakowy sposób.

Jeżeli wszystkie procesy podstawowe produkcji masowej są równoważne, to również w trakcie produkcji otrzymujemy jednakowe wyroby, jednakże każdy z nich może być wykonany w nieco inny sposób.

Jeżeli niektóre procesy podstawowe produkcji masowej są różne, tzn. dotyczą różnych wyrobów, to taką produkcję masową nazywamy *niejednorodną*. W produkcji masowej niejednorodnej możemy w każdym kroku produkcji właściwej bądź zakończenia otrzymywać różne wyroby.

*Przykład*. Niech $P$ oznacza ciąg podstawowych procesów produkcyjnych

$$P = P_1, P_2, \ldots, P_{10},$$

gdzie wszystkie $P_i$ są równe i mają następującą postać

$$P_i = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4.$$

Dla uproszczenia kolejne trzy operacje tego procesu oznaczymy przez $t_1$, $t_2$, $t_3$, gdzie

$$\begin{aligned} t_1 &= \langle \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \rangle, \\ t_2 &= \langle \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3 \rangle, \\ t_3 &= \langle \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4 \rangle. \end{aligned}$$

Produkcja masowa o podstawie $P$ będzie więc miała postać: rozruch produkcji

$$\begin{aligned} T_1(P) &= t_1(P_1), \\ T_2(P) &= \{t_1(P_2), t_2(P_1)\}; \end{aligned}$$

produkcja właściwa

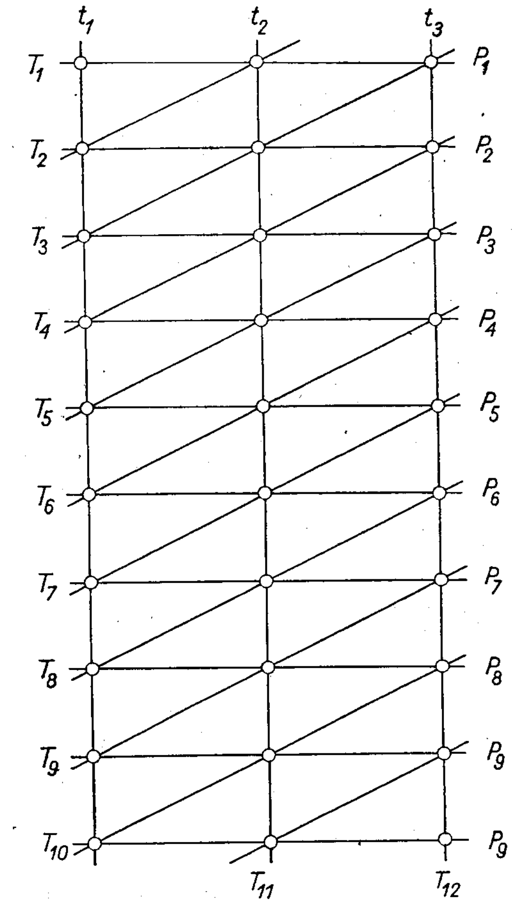
$$\begin{aligned} T_3(P) &= \{t_1(P_3), t_2(P_2), t_3(P_1)\}, \\ T_4(P) &= \{t_1(P_4), t_2(P_3), t_3(P_2)\}, \\ T_5(P) &= \{t_1(P_5), t_2(P_4), t_3(P_3)\}, \\ T_6(P) &= \{t_1(P_6), t_2(P_5), t_3(P_4)\}, \\ T_7(P) &= \{t_1(P_7), t_2(P_6), t_3(P_5)\}, \\ T_8(P) &= \{t_1(P_8), t_2(P_7), t_3(P_6)\}, \\ T_9(P) &= \{t_1(P_9), t_2(P_8), t_3(P_7)\}, \\ T_{10}(P) &= \{t_1(P_{10}), t_2(P_9), t_3(P_8)\}; \end{aligned}$$

zakończenie produkcji

$$\begin{aligned} T_{11}(P) &= \{t_2(P_{10}), t_3(P_9)\}, \\ T_{12}(P) &= t_3(P_{10}). \end{aligned}$$

Przebieg takiej produkcji masowej wygodnie jest przedstawić graficznie, jak to pokazano na rys. 9.






*Rys. 9*

Operacje poszczególnych procesów podstawowych $P_i$ przedstawiono w postaci punktów na siatce, której wiersze odpowiadają poszczególnym procesom podstawowym, kolumny zaś operacjom tych procesów. Kroki $T_i$ produkcji masowej zaznaczono łącząc linią wszystkie operacje podstawowe wchodzące w skład danej operacji masowej.

Oczywiście fakt, że wszystkie procesy podstawowe są tu równe, nie ma żadnego znaczenia.

*Ćwiczenia*

1. Podać rozruch i zakończenie produkcji masowej ustalonej jednorodnej dla wyrobu, którego schemat podano na rys. 8 (założyć, że liczba wyrobów, które mają być wykonane, wynosi 100).
2. Podać $T_{55}$ dla produkcji masowej, przyjętej w zadaniu 1.
3. Podać najkrótszy i najdłuższy rozruch dla produkcji masowej wyrobu, którego schemat pokazano na rys. 8.

### *1.5.3. Kroki produkcji masowej*

W paragrafie tym zanalizujemy nieco bliżej strukturę kroków masowych z punktu widzenia części, które są potrzebne do wykonania kroku i części, które w wyniku kroku masowego otrzymujemy.

Niech $P$ będzie ciągiem procesów podstawowych $P_1, P_2, \ldots, P_n$, gdzie $P_i = \mathfrak{F}_1^i, \mathfrak{F}_2^i, \ldots, \mathfrak{F}_m^i$. Przyjmujemy jak poprzednio, że wszystkie procesy podstawowe $P_i$ są jednakowej długości $m$. Liczba operacji w procesie $P_i$ wynosi więc $s = m-1$.

Najpierw będziemy rozpatrywali *kroki należące do produkcji właściwej* — postaci

$$T_j(P) = \{t_1(P_j),\ t_2(P_{j-1}),\ \ldots,\ t_s(P_{j-(s-1)})\}.$$

Kroki podstawowe wchodzące w skład kroku masowego $T_j(P)$ mają postać[9]:

$$t_1(P_j) = \mathfrak{F}_1^j, \mathfrak{F}_2^j$$
$$t_2(P_{j-1}) = \mathfrak{F}_2^{j-1}, \mathfrak{F}_3^{j-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_s(P_{j-(s-1)}) = \mathfrak{F}_{m-1}^{j-(s-1)}, \mathfrak{F}_m^{j-(s-1)}.$$

[9] Dla uproszczenia w krokach podstawowych pominięto nawiasy ⟨ ⟩, w dalszym ciągu pracy będziemy często czynili to samo.



Przypominamy, że przez *krok produkcji podstawowej* rozumiemy parę $\langle \mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_{i+1} \rangle$, taką że $\mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_{i+1} = \beta^*(\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i)$.

Elementy należące do zbioru $\mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_{i+1}$ są to wyroby, które zostały faktycznie użyte w kroku $t_i$, a więc niezbędne do wykonania tego kroku. Natomiast elementy zbioru $\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i$ są to wyroby, które faktycznie zostały wykonane w operacji $t_i$. W rezultacie kroku $t_i$ ze zbioru wyrobów $\mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_{i+1}$ otrzymujemy zbiór wyrobów $\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i$.[10]

Zbiór $\mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_{i+1}$ będziemy nazywali *zbiorem czynnych składników operacji $t_i$*, zaś zbiór $\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i$ nazwiemy *zbiorem rzeczywistych wyników operacji $t_i$* i oznaczymy je odpowiednio.

Niech $\mathfrak{S}_i^j$ oznacza *zbiór czynnych składników kroku $t_i$ procesu podstawowego $P_j$*, zaś $\mathfrak{W}_i^j$ — *zbiór rzeczywistych wyników operacji $t_i$ procesu podstawowego $P_j$*.

Zbiory czynnych składników kolejnych kroków podstawowych kroku $T_j(P)$ będą miały postać:

$$\mathfrak{S}_1^j = \mathfrak{F}_1^j - \mathfrak{F}_2^j,$$
$$\mathfrak{S}_2^{j-1} = \mathfrak{F}_2^{j-1} - \mathfrak{F}_3^{j-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{S}_s^{j-(s-1)} = \mathfrak{F}_{m-1}^{j-(s-1)} - \mathfrak{F}_m^{j-(s-1)},$$

natomiast zbiory wyników rzeczywistych każdego kroku podstawowego wchodzącego w skład $T_j(P)$ będą następujące:

$$\mathfrak{W}_1^j = \mathfrak{F}_2^j - \mathfrak{F}_1^j,$$
$$\mathfrak{W}_2^{j-1} = \mathfrak{F}_3^{j-1} - \mathfrak{F}_2^{j-1};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{W}_s^{j-(s-1)} = \mathfrak{F}_m^{j-(s-1)} - \mathfrak{F}_{m-1}^{j-(s-1)}.$$

[10] W paragrafie 1.4.1. podawaliśmy, że w wyniku operacji $t_i$ ze zbioru wyrobów $\mathfrak{F}_i$ otrzymujemy zbiór wyrobów $\mathfrak{F}_{i+1}$, co oczywiście nie przeczy podanej wyżej uwadze, gdyż obecnie podajemy tylko te wyroby, które faktycznie są wykorzystywane i otrzymywane w kroku $t_i$. W poprzedniej definicji w skład każdego kroku mogły wchodzić wyroby w danym kroku nie używane do otrzymywania nowych wyrobów.

Sumę wszystkich czynnych składników kroków podstawowych kroku $T_j(P)$ nazwiemy *składnikami czynnymi kroku masowego* $T_j(P)$ i oznaczymy ją przez $\mathfrak{S}_j^*$. Sumę wszystkich wyników rzeczywistych każdego kroku podstawowego wchodzącego w skład $T_j(P)$ nazwiemy *wynikiem rzeczywistym kroku* $T_j(P)$ i oznaczymy przez $\mathfrak{W}_j^*$.

Oczywiście

$$(1) \qquad \mathfrak{S}_j^* = \mathfrak{S}_1^j \cup \mathfrak{S}_2^{j-1} \cup \ldots \cup \mathfrak{S}_s^{j-(s-1)} = \bigcup_{k=1}^{s} \mathfrak{S}_k^{j-(k-1)}$$

lub pisząc szczegółowiej

$$\mathfrak{S}_j^* = (\mathfrak{F}_1^j - \mathfrak{F}_2^j) \cup (\mathfrak{F}_2^{j-1} - \mathfrak{F}_3^{j-1}) \cup \ldots \cup (\mathfrak{F}_{m-1}^{j-(s-1)} - \mathfrak{F}_m^{j-(s-1)}).$$

Podobnie

$$(2) \qquad \mathfrak{W}_j^* = \mathfrak{W}_1^j \cup \mathfrak{W}_2^{j-1} \cup \ldots \cup \mathfrak{W}_s^{j-(s-1)} = \bigcup_{k=1}^{s} \mathfrak{W}_k^{j-(k-1)}$$

lub dokładniej

$$\mathfrak{W}_j^* = (\mathfrak{F}_2^j - \mathfrak{F}_1^j) \cup (\mathfrak{F}_3^{j-1} - \mathfrak{F}_2^{j-1}) \cup \ldots \cup (\mathfrak{F}_m^{j-(s-1)} - \mathfrak{F}_{m-1}^{j-(s-1)}).$$

W ten sposób w każdym kroku właściwym[11] $T_j(P)$ produkcji masowej $\mathfrak{M}(P)$ musimy dostarczyć

$$(3) \qquad \overline{\overline{\mathfrak{S}}}_j^* = \sum_{k=1}^{s} \overline{\overline{\mathfrak{S}}}_k^{j-(k-1)}$$

wyrobów; otrzymujemy zaś

$$(4) \qquad \overline{\overline{\mathfrak{W}}}_j^* = \sum_{k=1}^{s} \overline{\overline{\mathfrak{W}}}_k^{j-(k-1)}$$

wyrobów, gdzie $\overline{\overline{X}}$ oznacza liczbę elementów zbioru $X$.

[11] $T_j$ należącym do produkcji właściwej.



Podane wyżej zależności pozwalają więc ustalić, ile wyrobów (części), jakich i kiedy musimy dostarczyć w każdym kroku $T_j(P)$ produkcji masowej oraz ile i jakie nowe wyroby otrzymujemy w tym kroku.

Dla rozruchu produkcji zależności (1), (2), (3), (4) przyjmą odpowiednio postać:

$$(5) \qquad \overline{\overline{\mathfrak{S}}}_l^* = \bigcup_{k=1}^{l} \overline{\overline{\mathfrak{S}}}_k^{l-(k-1)}, \qquad 1 \leqslant l < s$$

$$(6) \qquad \overline{\overline{\mathfrak{W}}}_l^* = \bigcup_{k=1}^{l} \overline{\overline{\mathfrak{W}}}_k^{l-(k-1)},$$

$$(7) \qquad \overline{\overline{\mathfrak{S}}}_l^* = \sum_{k=1}^{l} \overline{\overline{\mathfrak{S}}}_k^{l-(k-1)},$$

$$(8) \qquad \overline{\overline{\mathfrak{W}}}_l^* = \sum_{k=1}^{l} \overline{\overline{\mathfrak{W}}}_k^{l-(k-1)},$$

gdzie $l$ jest numerem kroku $T_l(P)$ należącego do rozruchu.

Jeśli zaś chodzi o zakończenie produkcji, zależności (1), (2), (3), (4) będą miały odpowiednio postać:

$$(9) \qquad \overline{\overline{\mathfrak{S}}}_{n+r}^* = \bigcup_{k=r+1}^{s} \overline{\overline{\mathfrak{S}}}_k^{n+r-(k-1)}, \qquad 1 \leqslant r < s,$$

$$(10) \qquad \overline{\overline{\mathfrak{W}}}_{n+r}^* = \bigcup_{k=r+1}^{s} \overline{\overline{\mathfrak{W}}}_k^{n+r-(k-1)},$$

$$(11) \qquad \overline{\overline{\mathfrak{S}}}_{n+r}^* = \sum_{k=r+1}^{s} \overline{\overline{\mathfrak{S}}}_k^{n+r-(k-1)},$$

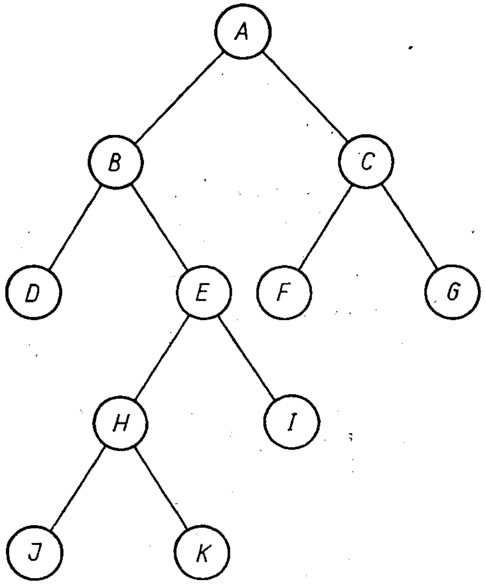
$$(12) \qquad \overline{\overline{\mathfrak{W}}}_{n+r}^* = \sum_{k=r+1}^{s} \overline{\overline{\mathfrak{W}}}_k^{n+r-(k-1)},$$

gdzie $n$ jest numerem ostatniego kroku produkcji właściwej.

Zasadniczo interesujące są jedynie wzory (1), (2), (3), (4) podane dla produkcji właściwej, wzory (5), (6), (7), (8) — dla rozruchu produkcji oraz (9), (10), (11), (12) — dla zakończenia produkcji są mniej potrzebne i wynikają prosto z wzorów (1), (2), (3), (4). Podaliśmy je tutaj jedynie dla ilustracji.

*Przykład.* Niech $P' = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4$ będzie procesem podstawowym wyrobu $W$, którego drzewo jest pokazane na rys. 10, gdzie

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1 &= \{D, J, K, I, F, G\}, \\ \mathfrak{F}_2 &= \{D, H, I, C\}, \\ \mathfrak{F}_3 &= \{D, E, C\}, \\ \mathfrak{F}_4 &= \{B, C\}, \\ \mathfrak{F}_5 &= \{A\}. \end{aligned}$$




*Rys. 10*

Przyjmijmy, że $\mathfrak{M}(P)$ jest masową produkcją dziesięciu jednakowych wyrobów $W_1, W_2, \ldots, W_{10}$, $W_i = W$, pokazanych na rys. 10, gdzie

$$P = P_1, P_2, \ldots, P_{10}, \qquad P_i = P'.$$



Zgodnie z wzorem (1) zbiór wszystkich składników czynnych kroku właściwej produkcji $\mathfrak{M}(P)$ będzie miał postać

$$\mathfrak{S}_j^* = \mathfrak{S}_1^j \cup \mathfrak{S}_2^{j-1} \cup \mathfrak{S}_3^{j-2} \cup \mathfrak{S}_4^{j-3},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1^j &= \mathfrak{F}_1^j - \mathfrak{F}_2^j = \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2 = \{D, J, K, I, F, G\} - \\ &\quad - \{D, H, I, C\} = \{J, K, F, G\}, \\ \mathfrak{S}_2^{j-1} &= \mathfrak{F}_2^{j-1} - \mathfrak{F}_3^{j-1} = \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_3 = \{D, H, I, C\} - \\ &\quad - \{D, E, C\} = \{H, I\}, \\ \mathfrak{S}_3^{j-2} &= \mathfrak{F}_3^{j-2} - \mathfrak{F}_4^{j-2} = \mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_4 = \{D, E, C,\} - \\ &\quad - \{B, C\} = \{D, E\}, \\ \mathfrak{S}_4^{j-3} &= \mathfrak{F}_4^{j-3} - \mathfrak{F}_5^{j-3} = \mathfrak{F}_4 - \mathfrak{F}_5 = \{B, C\} - \{A\} = \{B, C\}. \end{aligned}$$

A więc

$$\mathfrak{S}_j^* = \{B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}.$$

Wynik ten jest banalny i oczywisty. Mówi, że w każdym właściwym kroku $T_j(P)$ musimy dostarczyć wszystkie części wyrobu $A$. Banalność bierze się stąd, że przyjęliśmy, iż wszystkie wyroby produkowane w produkcji masowej $\mathfrak{M}(P)$ są jednakowe i produkowane w jednakowy sposób. Gdybyśmy założyli, że produkujemy dziesięć różnych wyrobów w produkcji masowej $\mathfrak{M}(P)$, otrzymany rezultat byłby bardziej złożony.

Postępując podobnie dla rzeczywistych wyników kroku właściwej produkcji masowej otrzymamy

$$\mathfrak{W}_j = \mathfrak{W}_1^j \cup \mathfrak{W}_2^{j-1} \cup \mathfrak{W}_3^{j-2} \cup \mathfrak{W}_4^{j-3},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_1^j &= \mathfrak{F}_2^j - \mathfrak{F}_1^j = \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1 = \{D, H, I, C\} - \\ &\quad - \{D, J, K, I, F, G\} = \{H, C\}, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{W}_2^{j-1} = \mathfrak{F}_3^{j-1} - \mathfrak{F}_2^{j-1} = \mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_2 = \{D, E, C\} - \{D, H, I, C\} = \{E\},$$

$$\mathfrak{W}_3^{j-2} = \mathfrak{F}_4^{j-2} - \mathfrak{F}_3^{j-2} = \mathfrak{F}_4 - \mathfrak{F}_3 = \{B, C\} - \{D, E, C\} = \{B\},$$

$$\mathfrak{W}_4^{j-3} = \mathfrak{F}_5^{j-3} - \mathfrak{F}_4^{j-3} = \mathfrak{F}_5 - \mathfrak{F}_4 = \{A\} - \{B, C\} = \{A\}.$$

Otrzymujemy stąd

$$\mathfrak{W}_j^* = \{A, B, E, H, C\},$$

co również jest oczywiste (patrz rys. 10). W każdym kroku właściwej produkcji masowej $\mathfrak{M}(P)$ otrzymujemy więc wszystkie podzespoły wyrobu $W$ oraz sam wyrób końcowy $W$.

Jednakże dla produkcji masowej różnych wyrobów sprawa nie będzie już tak oczywista.

*Ćwiczenie*

Podać $\mathfrak{S}_j^*$ oraz $\mathfrak{W}_j^*$ dla rozpatrywanego przykładu produkcji masowej przyjmując, że wyroby $W_1, \ldots, W_{10}$ są jednakowe.

## 1.6. REALIZACJA PROCESÓW PRODUKCYJNYCH

Procesy produkcyjne są realizowane na stanowiskach operacyjnych. Przez stanowisko operacyjne będziemy rozumieli miejsce, wyposażone w odpowiednie środki techniczne i obsługę, w którym wykonywane są operacje występujące w procesie produkcyjnym.

Aby jakikolwiek proces produkcyjny mógł być faktycznie zrealizowany, wszystkie detale, podzespoły i wyrób końcowy muszą być gdzieś magazynowane, a więc do realizacji procesów produkcyjnych niezbędne są *magazyny wyrobów*.

Drugim elementem koniecznym do zrealizowania procesu produkcyjnego jest *transport* służący do przemieszczania wyrobów między magazynami oraz stanowiskami operacyjnymi.



Ostatnim wreszcie czynnikiem potrzebnym do realizacji produkcji jest *sterowanie*. Przez sterowanie będziemy rozumieli pewien przepis (algorytm) mówiący, kiedy i jakie operacje należy wykonać na odpowiednich częściach, aby wyprodukować zamierzony wyrób.

Z rozpatrywanego punktu widzenia realizowanie procesu produkcyjnego polega na zmianie stanów (zawartości) magazynów. Przed rozpoczęciem realizacji produkcji w magazynie znajdują się wyłącznie detale wyrobu, z których ma powstać wyrób. Realizacja jakiegoś kroku produkcji polega na wyszukaniu w odpowiednim magazynie czynnych składników danego kroku (tj. części potrzebnych do wykonania wszystkich operacji wchodzących w skład tego kroku produkcji) oraz przetransportowaniu ich do stanowiska operacyjnego. Następnie na stanowisku operacyjnym wykonuje się odpowiednie operacje, po czym otrzymane podzespoły są ponownie transportowane do magazynu[12].

Tak więc realizacja każdego kroku procesu produkcyjnego zmienia stan magazynów w ten sposób, że po zrealizowaniu wszystkich kroków produkcji w odpowiednim magazynie znajdzie się wyrób końcowy.

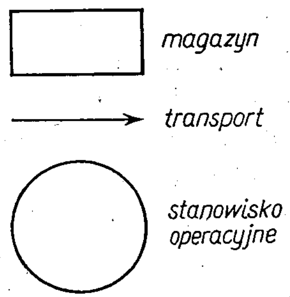
Nie będziemy zajmowali się problemem, w jaki sposób są realizowane operacje wchodzące w skład każdego kroku procesu produkcyjnego.

W dalszym ciągu dla oznaczania magazynów, transportu i stanowisk operacyjnych przyjmiemy symbole graficzne podane na rys. 11 (sterowania nie będziemy oznaczać graficznie).[13]

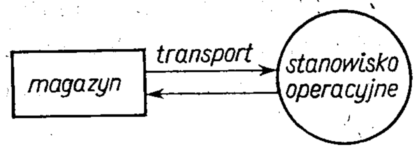
[12] W przypadku produkowania dużych, ciężkich wyrobów transport podzespołów ze stanowiska operacyjnego do magazynu byłby zbyt kosztowny, dlatego podzespoły nie zawsze są transportowane do magazynu. Dla ogólności rozważań przyjmiemy jednak założenie, że transport podzespołów ze stanowiska operacyjnego do magazynu zawsze ma miejsce.

[13] Proponowane oznaczenia różnią się od powszechnie stosowanych, jednakże są bardziej przejrzyste dla prowadzonych tu rozważań.

Magazyny, transport i stanowisko operacyjne oraz sterowanie realizujące dany proces produkcyjny nazwiemy *układem produkcyjnym.*




*Rys. 11*




*Rys. 12*

Każdy układ produkcyjny możemy więc przedstawić, jak to pokazano na rys. 12.[14]

### *1.6.1. Realizacja jednowyrobowych, szeregowych, podstawowych procesów produkcyjnych*

W paragrafie tym rozpatrzymy realizację najprostszego procesu produkcyjnego, jakim jest proces podstawowy, w którym wykonując każdorazowo jedną operację otrzymujemy tylko jeden wyrób.

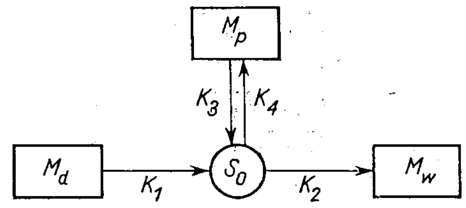
Można podać wiele sposobów realizacji takich procesów, pokażemy jednakże tylko jeden z nich, szczególnie interesujący z uwagi na liczne zalety natury dydaktycznej.

Dla realizacji tego rodzaju procesów możemy przyjąć układ pokazany na rys. 13. Układ ten składa się z trzech magazynów:

$M_d$ — magazyn detali,
$M_p$ — magazyn podzespołów,
$M_w$ — magazyn wyrobów końcowych,

14 Przypominamy, że nie pokazujemy sterowania realizacji produkcji, należy jednak pamiętać, że ono zawsze istnieje.






*Rys. 13*

stanowiska operacyjnego $S_o$ oraz czterech dróg transportowych:

$K_1$ — $M_d \to S_o$ transport detali,
$K_2$ — $S_o \to M_w$ transport wyrobów końcowych,
$K_3$ — $M_p \to S_o$ transport podzespołów,
$K_4$ — $S_o \to M_p$ transport podzespołów.

Droga $K_1$ służy do transportu wyrobów z magazynu detali $M_d$ do stanowiska operacyjnego $S_o$ (co symbolicznie zapisano $M_d \to S_o$); podobnie zaznaczone są pozostałe drogi transportowe $K_2$, $K_3$, $K_4$.

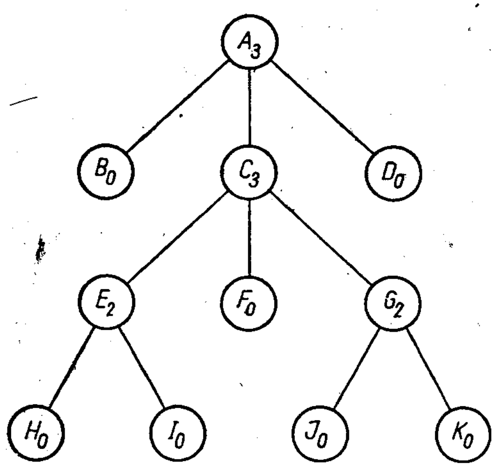
Niech $P_W$ oznacza proces produkcyjny wyrobu $W$. Sterowanie realizacją procesu $P_W$ w układzie pokazanym na rys. 13 odbywa się — na podstawie listy części wyrobu $W$ — w sposób następujący:

czytamy kolejne symbole w liście części, po odczytaniu nazwy wyrobu $x$ pobieramy z odpowiednich magazynów wszystkie bezpośrednie składniki tego wyrobu i transportujemy je do stanowiska operacyjnego $S_o$. Po wykonaniu operacji otrzymany podzespół przesyłamy do magazynu podzespołów $M_p$, wyrób końcowy przesyłamy zaś do magazynu wyrobów końcowych $M_w$. Jeśli odczytany z listy części symbol oznacza detal, przechodzimy do następnego symbolu na liście części.

*Przykład.* Rozpatrzymy realizację produkcji wyrobu o następującej beznawiasowej rozszerzonej liście części:

$A_3B_0C_3D_0$
$B_0$
$C_3E_2F_0G_2$
$E_2H_0I_0$
$H_0$
$I_0$
$F_0$
$G_2J_0K_0$
$J_0$
$K_0$
$D_0$

Drzewo tego wyrobu przedstawiono na rys. 14.




*Rys. 14*

Przed rozpoczęciem realizacji produkcji w magazynie $M_d$ znajdować się będą wszystkie detale wyrobu $W$, tj.

$$B_0,\ H_0,\ I_0,\ J_0,\ F_0,\ K_0,\ D_0.$$

Czytanie listy rozpoczynamy od dołu. Ponieważ pierwszy od dołu symbol $D_0$ oznacza detal, przechodzimy do następnego



symbolu $K_0$. Tak postępując dojdziemy do symbolu $G_2$, który już nie jest detalem. Pobieramy z magazynu $M_d$ wyroby $J_0$, $K_0$, stanowiące bezpośredni składnik podzespołu $G_2$ i przesyłamy je do stanowiska operacyjnego $S_o$. Następnie wykonujemy operację montażu i otrzymany podzespół $G_2$ przesyłamy do magazynu podzespołów $M_p$. Postępując podobnie przy dalszych elementach listy wyprodukujemy ostatecznie wyrób $A_3$, który umieścimy w magazynie wyrobów końcowych $M_w$.

Sterowanie produkcją możemy więc przedstawić w postaci tabeli:

| Lista części | Operacja transportu |
|---|---|
| $A_3\ B_0\ C_3\ D_0$ | $B_0\ C_3\ D_0 \to S_o,\ A_3 \to M_w$ |
| $B_0$ | |
| $C_3\ E_2\ F_0\ G_2$ | $E_2\ F_0\ G_2 \to S_o,\ C_3 \to M_p$ |
| $E_2\ H_0\ I_0$ | $H_0\ I_0 \to S_o,\ E_2 \to M_p$ |
| $H_0$ | — |
| $I_0$ | — |
| $F_0$ | — |
| $G_2\ J_0\ K_0$ | $J_0K_0 \to S_o,\ G_2 \to M_p$ |
| $J_0$ | — |
| $K_0$ | — |
| $D_0$ | — |

Po prawej stronie podano operacje transportu, występujące po odczytaniu każdego symbolu listy (operacje transportu zaznaczono strzałkami w ten sposób, że np. $B_0C_3D_0 \to S_o$ oznacza przesłanie wyrobów $B_0$, $C_3$, $D_0$ do stanowiska operacyjnego $S_o$).

Realizacja każdego kroku produkcji polega więc na odpowiedniej zmianie stanów magazynów $M_d$, $M_p$, $M_w$.

Rozpatrywany proces produkcyjny możemy przedstawić w postaci:

$$\mathfrak{F}_1 = \{B_0, H_0, I_0, F_0, J_0, K_0, D_0\},$$
$$\mathfrak{F}_2 = \{B_0, H_0, I_0, F_0, G_2, D_0\},$$
$$\mathfrak{F}_3 = \{B_0, E_2, F_0, G_2, D_0\},$$
$$\mathfrak{F}_4 = \{B_0, C_3, D_0\},$$
$$\mathfrak{F}_5 = \{A_3\}.$$

Poszczególne operacje tego procesu będą więc następujące:

$$t_1 = \langle \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \rangle,$$
$$t_2 = \langle \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3 \rangle,$$
$$t_3 = \langle \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4 \rangle,$$
$$t_4 = \langle \mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5 \rangle.$$

Czynnymi składnikami każdej z operacji będą odpowiednio:

$$\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2 = \{J_0, K_0\},$$
$$\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_3 = \{H_0, F_0\},$$
$$\mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_4 = \{E_2, F_0, G_2\},$$
$$\mathfrak{F}_4 - \mathfrak{F}_5 = \{B_0, C_3, D_0\},$$

natomiast rzeczywistymi wynikami każdej operacji są

$$\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1 = G_2,$$
$$\mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_2 = E_2,$$
$$\mathfrak{F}_4 - \mathfrak{F}_3 = C_3,$$
$$\mathfrak{F}_5 - \mathfrak{F}_4 = A_3.$$

Stany magazynów $M_d$, $M_p$, $M_w$ po zrealizowaniu kolejnych kroków produkcji będą więc następujące:

| Krok | $M_d$ | $M_p$ | $M_w$ |
|---|---|---|---|
| 0. | $B_0, H_0, E_0, F_0, J_0, K_0, D_0$ | — | — |
| 1. | $B_0, H_0, E_0, F_0, D_0$ | $G_2$ | — |
| 2. | $B_0, F_0, D_0$ | $G_2, E_2$ | — |
| 3. | $B_0, D_0$ | $C_3$ | — |
| 4. | — | — | $A_3$ |



W pierwszym wierszu tablicy podano stany magazynów przed rozpoczęciem realizacji produkcji.

Podobnie wygląda przebieg realizacji równoległych procesów produkcyjnych jednowyrobowych. Układ produkcyjny jest taki sam, jak pokazany na rys. 12, inaczej nieco przebiega jednak sterowanie realizacją. Należy tu podać jedynie odpowiednie algorytmy wybierające z listy części wyrobu operacje występujące w każdym kroku produkcji.

Tak samo należy postępować wtedy, gdy mamy do czynienia z produkcją wielowyrobową, szeregową bądź też równoległą. Sterując realizacją produkcji będziemy mieli w tym przypadku do czynienia nie z jedną listą części, ale z wieloma listami.

*Ćwiczenie*

Podać sterowanie (i kolejne stany magazynów) produkcją szeregową wyrobu podanego na rys. 10.

### *1.6.2. Pojemność magazynów*

W paragrafie tym zajmiemy się zagadnieniem wielkości magazynów potrzebnych do realizowania produkcji jednostkowej, szeregowej wyrobu.

Przez wielkość (albo pojemność) magazynu będziemy rozumieli maksymalną liczbę wyrobów, którą można w danym magazynie umieścić.[15]

*Twierdzenie 1.* Dla każdego wyrobu $W$

$$\overline{\overline{D(W)}} = \sum_{x \in P(W)} \varkappa(x) - \overline{\overline{P(W)}} + 1,$$

[15] Takie określenie pojemności magazynu jest może zbyt prymitywne, jednakże w pewnej mierze oddaje ono istotę pojemności magazynu.

gdzie:

$D(W)$ — zbiór detali wyrobu $W$,

$\varkappa(x)$ — krotność podzespołu $x$,

$P(W)$ — zbiór wszystkich podzespołów wyrobu $W$.[16]

Zapis u dołu znaku sumy oznacza, że suma rozciąga się na wszystkie części wyrobu $W$.

*Dowód* Prawdziwość twierdzenia 1 wykażemy przez indukcję względem liczby podzespołów.

Dla $\overline{\overline{P(W)}}=1$ twierdzenie 1 oczywiście zachodzi, gdyż

$$\overline{\overline{D(W)}}=\varkappa(x),$$

co oznacza, że liczba detali takiego wyrobu jest równa jego krotności.

Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla każdego wyrobu $W$, takiego że $\overline{\overline{P(W)}}=n$; wykażemy, że zachodzi ono wtedy również dla każdego wyrobu $W'$, takiego że $\overline{\overline{P(W')}}=n+1$.

Każdy wyrób $W'$ możemy rozpatrywać jako dwa wyroby $W_1$ i $W_2$, takie że wyrób $W_1$ ma $n$ podzespołów, $W_2$ zaś tylko jeden podzespół. Wobec tego

$$\overline{\overline{D(W')}}=\overline{\overline{D(W_1)}}+\overline{\overline{D(W_2)}}-1. \tag{1}$$

Opierając się na założeniu indukcyjnym oraz na równości

$$\overline{\overline{D(W_2)}}=\varkappa(W_2) \tag{2}$$

wzór (1) możemy napisać w postaci następującej:

$$\overline{\overline{D(W')}}=\sum_{x\in P(W_1)}\varkappa(x)-\overline{\overline{P(W_1)}}+1+\varkappa(W_2)-1. \tag{3}$$

Ponieważ

$$\overline{\overline{P(W')}}=\overline{\overline{P(W_1)}}+1$$

16 Przypominamy, że wyrób $W$ jest także swoim podzespołem.



oraz

$$\sum_{x\in P(W')}\varkappa(x)=\sum_{x\in P(W_1)}\varkappa(x)+\varkappa(W_2),$$

więc (3) możemy napisać w postaci

$$\overline{\overline{D(W')}}=\sum_{x\in P(W')}\varkappa(x)-\overline{\overline{P(W')}}+1,$$

co kończy dowód.

Dla przypadku kiedy wszystkie podzespoły mają jednakową liczbę $k$ bezpośrednich składników, twierdzenie 1 przyjmuje postać:

dla każdego wyrobu $W$, jeżeli $W$ zawiera $n$ podzespołów,

$$\overline{\overline{D(W)}}=n(k-1)+1.$$

Jeżeli zaś chcemy uzależnić liczbę detali od krotności wyrobu $W$, tj. od podzespołu zawierającego największą liczbę składników, twierdzenie 1 przyjmuje oczywiście postać:

dla każdego $W$, jeżeli $W$ zawiera $n$ podzespołów,

$$\overline{\overline{D(W)}}=n(\varkappa(W)-1)+1.$$

A więc, jeżeli znamy liczbę operacji w procesie oraz krotność każdej operacji, twierdzenie 1 pozwala nam obliczyć liczbę detali, którą musimy zmagazynować w $M_d$ (inaczej mówiąc wielkość magazynu $M_d$).

*Twierdzenie 2.* Dla każdego wyrobu $W$ o krotności $\varkappa(W)=2$ istnieje taki szeregowy proces produkcyjny $P_W$, że

$$p\leqslant[\ln_2 n]+1,$$

gdzie:

$n$ — liczba podzespołów wyrobu $W$,

$p$ — najmniejsza pojemność magazynu podzespołów, potrzebna do zrealizowania procesu $P_W$,

$[x]$ — część całkowita $x$.

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem liczby podzespołów $n$.

Dla $n = 1$ nierówność jest prawdziwa, gdyż $[\ln_2 1]+1 \geqslant p$.

Załóżmy, że nierówność ta jest prawdziwa dla każdego wyrobu o $n$ podzespołach. Pokażemy, że jest ona również prawdziwa dla każdego wyrobu $W'$ o $n+1$ podzespołach.

Można sprawdzić, że każdy podstawowy proces sekwencyjny jednowyrobowy $P_W$ wyrobu $W$ da się przedstawić jako *złożenie procesów* $P_{W_1}$ i $P_{W_2}$

$$P_W = P_{W_1} P_{W_2},$$

takich że

(1) $$p = p_1$$

oraz

(2) $$p_1 \geqslant p_2,$$

gdzie:

$p$ — wielkość magazynu $M_p$ dla $P_W$,

$p_1$ — „ „ $M_p$ dla $P_{W_1}$,

$p_2$ — „ „ $M_p$ dla $P_{W_2}$.

A więc $P_{W'}$ możemy przedstawić jako

$$P_{W'} = P_{W_1} P_{W_2},$$

przy czym $P_{W_1}$ i $P_{W_2}$ spełniają warunki (1) i (2).

Z założenia indukcyjnego otrzymamy

(3) $$p' \leqslant [\ln_2 n_1]+1,$$

gdzie:

$p'$ — wielkość magazynu $M_p$ dla procesu $P_{W'}$

$n_1$ — liczba podzespołów wyrobu $W_1$.

Ponieważ $n_1 < n+1$, więc z nierówności (3) otrzymamy

(4) $$p' \leqslant [\ln_2 n+1]+1,$$

co kończy dowód.



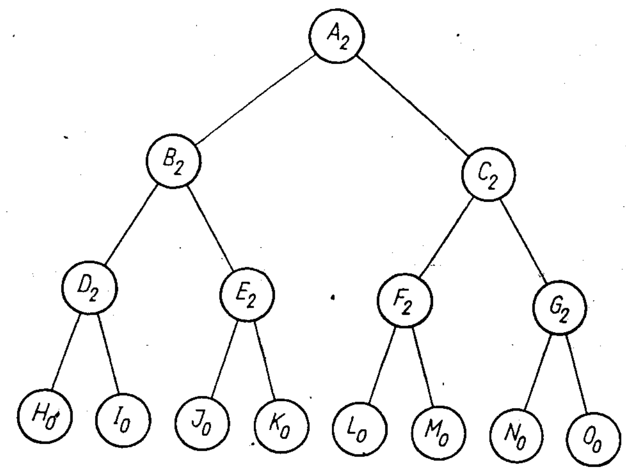
Byłoby interesujące podanie podobnego twierdzenia dla wyrobów o $\varkappa(W) > 2$, jednakże oszacowanie wielkości magazynu dla tego przypadku nie jest znane.

*Przykład.* Rozpatrzmy proces sekwencyjny wyrobu, którego drzewo przedstawia rys. 15. Jeżeli podzespoły tego wyrobu będą montowane w kolejności następującej:

$$D_2, E_2, F_2, G_2, B_2, C_2, A_2,$$

to pojemność magazynu $M_p$ wyniesie 4, jak to pokazano niżej.

| Krok | $M_d$ | $M_p$ | $M_w$ |
|---|---|---|---|
| 0. | $H_0, I_0, J_0, K_0, L_0, M_0, N_0, O_0$ | — | — |
| 1. | $J_0, K_0, L_0, M_0, N_0, O_0$ | $D_2$ | — |
| 2. | $L_0, M_0, N_0, O_0$ | $D_2, E_2$ | — |
| 3. | $N_0, O_0$ | $D_2, E_2, F_2$ | — |
| 4. | — | $D_2, E_2, F_2, G_2$ | — |
| 5. | — | $B_2, F_2, G_2$ | — |
| 6. | — | $B_2, C_2$ | — |
| 7. | — | — | $A_2$ |




*Rys. 15*

Jeżeli zaś przyjmiemy następującą kolejność montażu podzespołów

$$D_2, E_2, B_2, E_2, G_2, C_2, A_2,$$

to otrzymamy pojemność magazynu $M_p$ zgodnie z twierdzeniem 2 równą

$$[\ln_2 7]+1 = 3,$$

co jest podane w zamieszczonej niżej tabeli ilustrującej realizację tego procesu produkcyjnego.

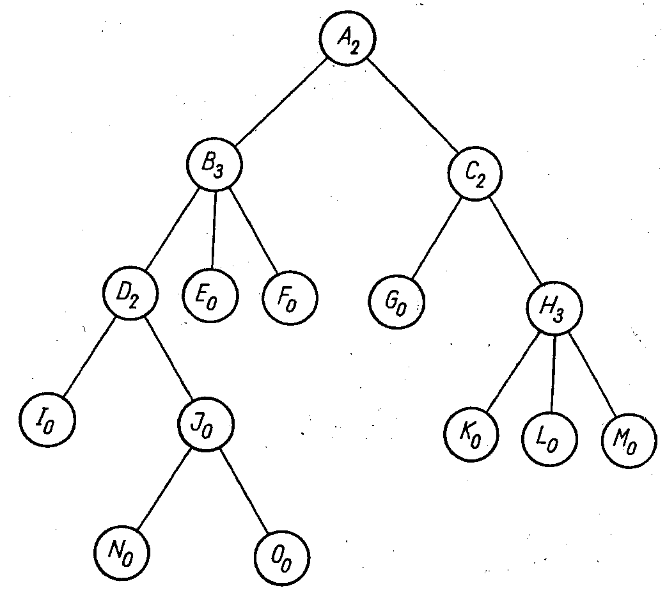
| Krok | $M_d$ | $M_p$ | $M_w$ |
|---|---|---|---|
| 0. | $H_0, I_0, J_0, K_0, L_0, M_0, N_0, O_0$ | — | — |
| 1. | $J_0, K_0, L_0, M_0, N_0, O_0$ | $D_2$ | — |
| 2. | $L_0, M_0, N_0, O_0$ | $D_2, E_2$ | — |
| 3. | $L_0, M_0, N_0, O_0$ | $B_2$ | — |
| 4. | $N_0, O_0$ | $B_2, F_2$ | — |
| 5. | — | $B_2, F_2, G_2$ | — |
| 6. | — | $B_2, C_2$ | — |
| 7. | — | — | $A_2$ |

Oczywiście przy wyrobach o dużej liczbie podzespołów zależnie od przyjętego procesu produkcyjnego różnice w wielkości magazynu podzespołów $M_p$ mogą być znaczne.

*Ćwiczenie*

Dla wyrobu pokazanego na rys. 16 podać inny proces sekwencyjny, dla którego pojemność magazynu podzespołów wynosi również 3.






*Rys. 16*

### *1.6.3. Realizacja produkcji masowej*

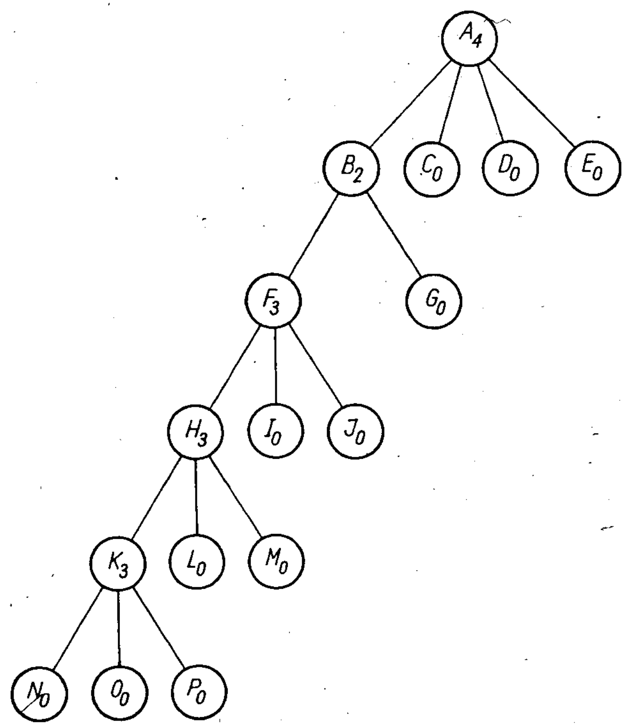
Wyrób, którego każdy podzespół zawiera co najmniej jeden złożony składnik bezpośredni, będziemy nazywali wyrobem *normalnym.*

Przykład wyrobu normalnego pokazany jest na rys. 17.

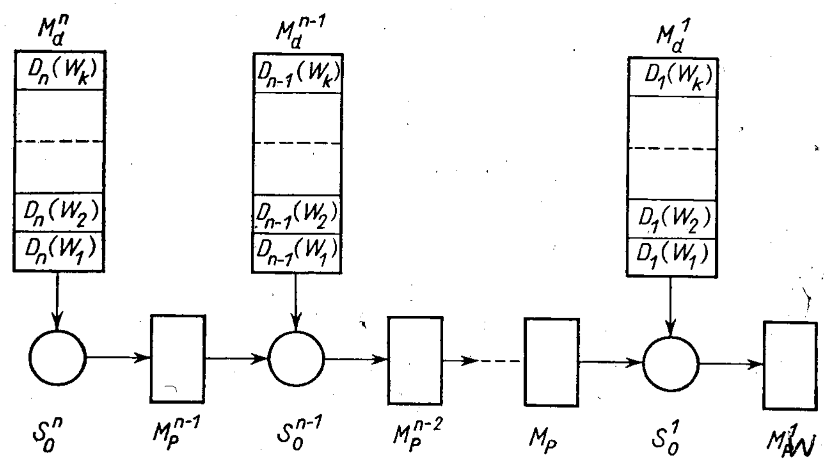
W paragrafie tym zajmiemy się realizacją produkcji masowej wyrobów normalnych.

Rysunek 18 przedstawia układ produkcyjny realizujący taki właśnie proces.

Załóżmy, że w procesie produkcyjnym chcemy wyprodukować $k$ normalnych wyrobów $W_1, W_2, \ldots, W_k$. Wyroby te zgodnie z przyjętymi poprzednio założeniami nie muszą być jednakowe. Przyjmujemy tylko, że wszystkie mają jednakową liczbę podzespołów i że rząd każdego z wyrobów jest równy $n$.




*Rys. 17*




*Rys. 18*



Do wykonania każdego z wyrobów $W_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ potrzeba $n$ operacji $t_1^i, t_2^i, \ldots, t_n^i$. Przez $D_j(W_i)$ oznaczymy zbiór wszystkich detali rzędu $j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ wyrobu $W_i$.

Przedstawiony układ produkcyjny (rys. 18) zawiera $n$ magazynów detali $M_d^1, M_d^2, \ldots, M_d^n$. W magazynie $M_d^i$ magazynowane są kolejno detale rzędu $i$ wszystkich wyrobów $W_1, W_2, \ldots, W_k$. Z każdym magazynem detali $M_d^i$ związane jest stanowisko operacyjne $S_o^j$ oraz magazyn podzespołów $M_p^{i-1}$. $M_w$ jest magazynem wyrobów końcowych.

Omówimy teraz realizację procesu produkcyjnego w tym układzie, poczynając od okresu rozruchu.

W pierwszym kroku procesu na stanowisko $S_o^n$ przesyłane są z magazynu $M_d^n$ detale $D_n(W_1)$ i wykonywana jest na nich operacja $t_n^1$.[17]

Tak otrzymany podzespół wyrobu $W_1$ jest umieszczany w magazynie $M_p^n$.

Pozostałe stanowiska operacyjne są nieczynne.

W drugim kroku procesu na stanowisku $S_o^{n-1}$ wykonuje się operacje $t_{n-1}^1$ na podzespole pobranym z magazynu $M_p^n$ oraz na detalach $D_{n-1}(W_1)$, pobranych z magazynu $M_d^{n-1}$, i otrzymany podzespół umieszcza się w magazynie podzespołów $M_p^{n-1}$. Jednocześnie na stanowisku $S_o^n$ wykonuje się operacje $t_n^2$ na detalach $D_n(W_2)$, pobranych z magazynu $M_d^n$, a trzymany podzespół umieszcza w magazynie $M_p^{n-1}$.

W ten sposób każdy wyrób przechodzi kolejno przez stanowiska operacyjne $S_o^n, S_o^{n-1}, \ldots, S_o^1$, do których z odpowiedniego magazynu detali dostarcza się detale każdego wyrobu[18].

[17] Przyjęliśmy dla wygody numerację operacji odwrotną do tej, którą przyjmowaliśmy poprzednio. A więc operacja wykonywana najpierw ma najwyższy numer.

[18] Jeżeli czasy wykonywania wszystkich operacji $t_j^i$ są jednakowe, to transport podzespołów ze wszystkich magazynów podzespołów do następnego stanowiska operacyjnego może się odbywać jednocześnie za pomocą taśmy. Mówimy wtedy o montażu taśmowym.

Produkcja właściwa odbywa się podobnie, z tą jedynie różnicą, że wszystkie stanowiska operacyjne wykonują jednocześnie operacje.

Przeanalizowanie zakończenia produkcji pozostawiamy Czytelnikowi.

W okresie rozruchu na kolejnych stanowiskach operacyjnych wykonywane są następujące operacje:

| Krok | $S_o^n$ | $S_o^{n-1}$ | $\vdots$ | $S_o^2$ | $S_o^1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $t_n^1$ | — | $\vdots$ | — | — |
| 2. | $t_n^2$ | $t_{n-1}^1$ | $\vdots$ | — | — |
| 3. | $t_n^3$ | $t_{n-1}^2$ | $\vdots$ | — | — |
| ........ | ........ | ........ | ........ | ........ | ........ |
| $n-1$ | $t_n^{n-1}$ | $t_{n-1}^{n-2}$ | $\vdots$ | $t_2^1$ | — |

Na podstawie danych tej tablicy łatwo możemy stwierdzić, że na stanowisku $S_o^i$ zawsze się wykonuje operacje na detalach i podzespołach rzędu $i$.

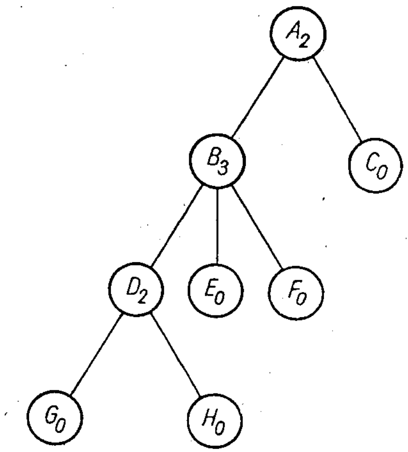
W czasie produkcji ustalonej w kroku o numerze $l$, kolejne stanowiska operacyjne wykonują oczywiście następujące operacje:

| Krok | $S_o^n$ | $S_o^{n-1}$ | $\vdots$ | $S_o^2$ | $S_o^1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $l$ | $t_n^l$ | $t_{n-1}^{l-1}$ | $\vdots$ | $t_2^{l-(n-2)}$ | $t_1^{l-(n-1)}$ |

Możemy powiedzieć, że stanowisko $S_o^i$ w kroku $l$ wykonuje operacje $t_i^{l-(n-i)}$.

*Przykład.* Rozpatrzmy produkcję masową dziesięciu jednakowych egzemplarzy wyrobu normalnego, którego drzewo przedstawia rys. 19.






*Rys. 19*

Kolejne magazyny detali będą więc zawierały następujące wyroby:

| $M_d^3$ | $M_d^2$ | $M_d^1$ |
|---|---|---|
| $G_0^{10}$, $H_0^{10}$ | $E_0^{10}$, $F_0^{10}$ | $C_0^{10}$ |
| $G_0^9$, $H_0^9$ | $E_0^9$, $F_0^9$ | $C_0^9$ |
| ........ | ........ | ........ |
| $G_0^1$, $H_0^1$ | $E_0^1$, $F_0^1$ | $C_0^1$ |

Wskaźniki u góry przy nazwach detali wskazują wyrób, do którego dany detal należy. Zmiana stanów tych magazynów w każdym kroku produkcji masowej będzie polegała na usuwaniu z nich detali zgodnie z podanymi poprzednio zasadami.

Opis zmiany stanów magazynów detali wygodnie jest prześledzić wprowadzając macierz stanu magazynów detali

$$M_{k,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n} \end{bmatrix}$$

Element $a_{i,j}$ macierzy $M_{k,n}$ jest równy zeru, jeżeli wszystkie detale rzędu $j$ należące do wyrobu $i$ znajdują się w magazynie, natomiast w przypadku przeciwnym $a_{i,j} = 1$.

Każdy krok produkcji masowej zmienia stan magazynów detali, jak to określono niżej

$$T_l(M_{k,n}) = M'_{k,n},$$

gdzie $l$ jest numerem kroku, zaś elementy $a'_{i,j}$ macierzy $M'_{k,n}$ są określone następująco:

$$a'_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } i-j = l-n \\ a_{i,j} & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Przyjmując, że przed rozpoczęciem produkcji każdy element macierzy $M_{k,n}$ jest równy jedności, kolejne zmiany stanów magazynów detali będziemy mogli przedstawić jako:

$$T_{k+(n-1)}\Big(\ldots\big(T_2\big(T_1(M_{k,n})\big)\big)\ldots\Big).$$

*Ćwiczenie*

Rozpatrzyć produkcję masową wyrobu, którego drzewo podano na rys. 17.

### *1.6.4. Sterowanie produkcją masową wyrobów normalnych*

Niech $\lambda W_1, \ldots, \lambda W_k$ będą listami części wyrobów $W_1, \ldots, W_k$ wytwarzanych w produkcji masowej. Wobec tego w $l$-tym kroku produkcji masowej wykonujemy operacje

$$T_l = \{t_n^l, t_{n-1}^{l-1}, \ldots, t_1^{l-(n-1)}\},$$

gdzie $t_j^i$ oznacza $j$-tą operację dotyczącą $i$-tego wyrobu.

Można więc podać prosty algorytm, za pomocą którego na podstawie danych list części $\lambda W_1, \ldots, \lambda W_k$ ustala się kolejne operacje produkcji masowej.



Algorytm taki jest konieczny przy stosowaniu maszyn matematycznych do obliczeń związanych z produkcją.

Dla celów dydaktycznych wygodniej kolejne kroki produkcji masowej przedstawić w postaci macierzy sterowania, jak to pokazano niżej

$$\begin{array}{llllll}
t_n^1, t_{n-1}^1, \ldots, t_1^1 & & & & \\
& t_n^2, t_{n-1}^2, \ldots, t_1^2 & & & \\
& & t_n^3, t_{n-1}^3, \ldots, t_1^3 & & \\
& & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
& & & & t_n^k, t_{n-1}^k, \ldots, t_1^k
\end{array}$$

Każdy wiersz tej macierzy zawiera kolejne operacje montażu jednego z wyrobów $W_i$. Każde dwa kolejne wiersze przesunięto o jedno miejsce. A więc każdy krok produkcji masowej polegający na wykonaniu wszystkich operacji znajduje się w jednej kolumnie macierzy. Na przykład macierz sterowania dla realizacji produkcji pięciu wyrobów będzie miała postać:

| Wyrób \ Krok produkcji | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $t_3^1$ | $t_2^1$ | $t_1^1$ | | | | |
| 2 | | $t_3^2$ | $t_2^2$ | $t_1^2$ | | | |
| 3 | | | $t_3^3$ | $t_2^3$ | $t_1^3$ | | |
| 4 | | | | $t_3^4$ | $t_2^4$ | $t_1^4$ | |
| 5 | | | | | $t_3^5$ | $t_2^5$ | $t_1^5$ |

*Ćwiczenie*

Podać macierz sterowania dla wyrobu, którego schemat przedstawia rys. 19.

### *1.6.5. Macierzowy opis produkcji masowej*

Przedstawmy w formie wektora zawartość magazynu podzespołów i magazynu wyrobów

$$V_n^j = \begin{bmatrix} V_0^j \\ V_1^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n-1}^j \end{bmatrix}$$

gdzie $V_i^j$ oznacza zawartość magazynu $M_p^i$ po wykonaniu $j$-tego kroku produkcji masowej. Zawartość magazynów możemy przedstawić w postaci macierzy detali

$$U_{k,n} = \begin{bmatrix} U_{1,1}, & U_{1,2}, & \ldots, & U_{1,n} \\ U_{2,1}, & U_{2,2}, & \ldots, & U_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{k,1}, & U_{k,2}, & \ldots, & U_{k,n} \end{bmatrix}$$

gdzie $U_{i,j}$ oznacza zbiór detali rzędu $j$, należących do wyrobu o numerze $i$.

Produkcję masową można wtedy wygodnie przedstawić jako pewne działanie na macierzach i wektorach.

Wprowadzimy „mnożenie" wektora podzespołów przez macierz detali. Wynik tego działania jest również wektorem podzespołów określonym następująco:

$$V_n^{j+1} = V_n^j \times U_{k,n},$$

gdzie:

$$V_i^{j+1} = \begin{cases} \mu(V_{i+1}^j, U_{l,i+1}), & \text{gdy } \mu(V_{i+1}^j, U_{l,i+1}) \in C(W_l), \\ \text{nieokreślone}, & \text{gdy } \mu(V_{i+1}^j, U_{l,i+1}) \notin C(W_l), \end{cases}$$



zaś $l = j+1-[(n-1)-i]$, natomiast $\mu(x_1, \ldots, x_s)$ oznacza wyrób $x$, którego bezpośrednimi składnikami są $x_1, \ldots, x_n$, tj. $\beta(x) = x_1, \ldots, x_n$.

Przyjmiemy ponadto, że $V_n^0$ oznacza pusty stan wszystkich magazynów podzespołów.

A więc stan magazynów podzespołów po wykonaniu $j$ kroków możemy przedstawić w postaci:

$$V_n^j = V_n^{j-1} \times (\ldots \times (V_n^2 \times (V_n^1 \times U_{k,n})) \ldots)$$

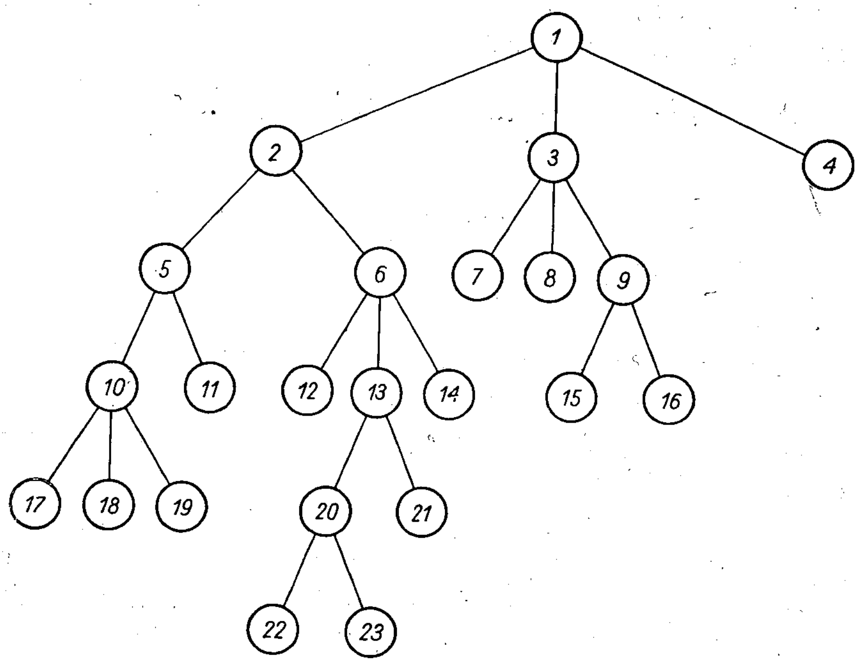
### *1.6.6. Produkcja masowa dowolnych wyrobów*

W poprzednich paragrafach rozważaliśmy produkcję masową wyrobów normalnych. Jeżeli przyjmiemy, że w procesie produkcji masowej zamiast detali występują podzespoły, które są również wytwarzane w procesie produkcji masowej, to tym samym założymy, że każdy wyrób możemy wytwarzać za pomocą produkcji masowej.

Aby więc określić produkcję masową dla dowolnego wyrobu, należy najpierw wyrób ten „rozłożyć" na wyroby normalne i dla każdego z nich określić produkcję masową. W układzie produkcyjnym, pokazanym na rys. 18, zamiast odpowiednich magazynów detali będą występowały magazyny wyrobów końcowych odpowiednich podzespołów.

*Przykład.* Rozpatrzmy produkcję masową wyrobu, którego drzewo przedstawia rys. 20. Dla uproszczenia części wyrobu oznaczono kolejnymi liczbami od 1 do 23, a nie literami, jak to robiliśmy do tej pory.

Wyrób ten możemy rozłożyć na wyroby normalne kilkoma sposobami, z których jeden pokazaliśmy na rys. 21. Analizując rysunek 21 możemy stwierdzić, że drzewo z rys. 20 zostało rozłożone na trzy drzewa, z których każde przedstawia wyrób normalny. A więc produkcja masowa wyrobu przedstawionego na rys. 20 będzie się składała z trzech procesów produkcji masowej. W pierwszym produkowany będzie wyrób oznaczony numerem 3, wchodzący jako podzespół do procesu produkcji wyrobu numer 1.



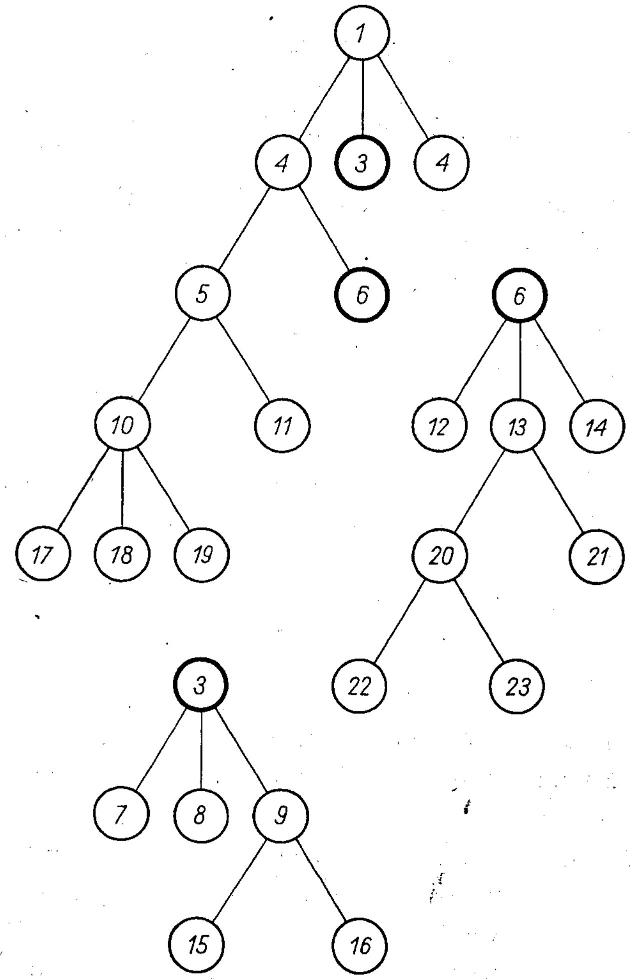

*Rys. 20*

W drugim procesie produkcji masowej wytwarzany będzie wyrób 6, w ostatnim zaś wyrób końcowy o numerze 1. Podzespoły 3 i 6 wejdą do niego jako detale.



*Ćwiczenie*

1. Podać inny rozkład wyrobu przedstawionego na rys. 20 na wyroby normalne.




*Rys. 21*

## 2. EKONOMICZNE ASPEKTY PRODUKCJI

### 2.1. KOSZTY WYKONANIA WYROBU

#### *2.1.1. Koszty wykonania wyrobu w procesach podstawowych*

W rozdziale tym zajmiemy się niektórymi zagadnieniami minimalizacji kosztów wykonania wyrobów. Założymy dla uproszczenia, że koszt wykonania wyrobu zależy jedynie od dwu parametrów: kosztów magazynowania części wyrobu oraz kosztu wykonania operacji wchodzących w skład procesu produkcyjnego. Wszelkie inne czynniki dla uproszczenia pomijamy.

Niech $K(P_W)$ oznacza koszt wykonania wyrobu $W$ w procesie $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$, zaś $K(t_i)$ — koszt wykonania kroku $t_i$ w procesie $P_W$. Oczywiście

(1) $$K(t_i) = o_i + m \cdot \tau_i p_i,$$

gdzie:

$o_i$ — koszt montażu wyrobów $\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i$,

$m$ — koszt magazynowania wyrobu w jednostce czasu,[1]

$\tau_i$ — czas trwania operacji $t_i$,

$p_i = \mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_{i+1}$ — zbiór tych wyrobów, które nie zostały użyte w operacji $t_i$ i muszą być przechowane w magazynie przez czas $\tau_i$ do ewentualnego wykorzystania ich w następnym kroku.

[1] Przyjmujemy dla uproszczenia, że koszt magazynowania wyrobów nie zależy od rodzaju wyrobu, a tylko od czasu jego przebywania w magazynie.

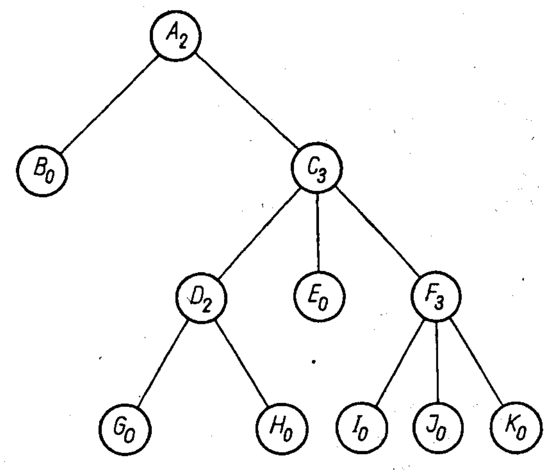


A więc koszt wykonania wyrobu $W$ w procesie podstawowym $P_W$ będzie miał postać:

(2) $$K(P_W) = \sum_{i=1}^{n} K(t_i) = \sum_{i=1}^{n} (o_i + m\tau_i p_i) = \sum_{i=1}^{n} o_i + \\ + m \sum_{i=1}^{n} \tau_i p_i.$$

*Przykład.* Niech $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4, \mathfrak{F}_5$ będzie procesem szeregowym wyrobu, którego schemat przedstawiono na rys. 22, gdzie

$$\mathfrak{F}_1 = \{B_0, G_0, H_0, E_0, I_0, J_0, K_0\}$$
$$\mathfrak{F}_2 = \{B_0, D_2, E_0, I_0, J_0, K_0\}$$
$$\mathfrak{F}_3 = \{B_0, D_2, E_0, F_3\}$$
$$\mathfrak{F}_4 = \{B_0, C_3\}$$
$$\mathfrak{F}_5 = \{A_2\}$$




*Rys. 22*

W czasie $\tau_1$ wykonywania pierwszego kroku magazynowane są wyroby

$$\begin{aligned} p_1 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 &= \{B_0, G_0, H_0, E_0, I_0, J_0, K_0\} - \\ &- \{B_0, D_2, E_0, I_0, J_0, K_0\} = \\ &= \{B_0, E_0, I_0, J_0, K_0\}. \end{aligned}$$

Podobnie w czasie wykonywania pozostałych kroków magazynowane są wyroby

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathfrak{F}_2 \cap \mathfrak{F}_3 = \{B_0, D_2, E_0, I_0, J_0, K_0\} - \\ &\quad - \{B_0, D_2, E_0, F_3\} = \{B_0, D_2, E_0\}, \\ p_3 &= \mathfrak{F}_3 \cap \mathfrak{F}_4 = \{B_0, D_2, E_0, F_3\} - \{B_0, C_3\} = \{B_0\}, \\ p_4 &= \mathfrak{F}_4 \cap \mathfrak{F}_5 = \{B_0, C_3\} - \{A_2\} = \Phi.^2 \end{aligned}$$

A więc

$$p_1 = \overline{\overline{\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2}} = 5,$$

$$p_2 = \overline{\overline{\mathfrak{F}_2 \cap \mathfrak{F}_3}} = 3,$$

$$p_3 = \overline{\overline{\mathfrak{F}_3 \cap \mathfrak{F}_4}} = 1,$$

$$p_4 = \overline{\overline{\mathfrak{F}_4 \cap \mathfrak{F}_5}} = 0.^3$$

W rozpatrywanym przykładzie zależność (2) przybiera postać:

$$\begin{aligned} K(P_W) &= \sum_{i=1}^{4} o_i + m(5\tau_1 + 3\tau_2 + 1\tau_3 + 0\tau_4) = \\ &= \sum_{i=1}^{4} o_i + m(5\tau_1 + 3\tau_2 + \tau_3). \end{aligned}$$

---

[2] Przypominamy, że $\Phi$ oznacza zbiór pusty.

[3] Dla ostatniego kroku w procesie szeregowym jednowyrobowym zawsze $p_n = \overline{\overline{\mathfrak{F}_n \cap \mathfrak{F}_{n+1}}} = 0$, gdyż nie magazynujemy już w czasie trwania tego kroku żadnych części, wszystkie bowiem stanowią składniki wykonywanej operacji.



Gdybyśmy przyjęli, że koszty wykonania kolejnych operacji wynoszą w ustalonych jednostkach odpowiednio 1, 2, 3, 4, a czasy ich trwania kolejno 2, 3, 5, 7 ustalonych jednostek czasu, to koszt wykonania wyrobu $W$ wyniósłby

$$K(P_W) = 10 + m(5.2 + 3.3 + 5) = 24m + 10.$$

*Ćwiczenie*

Obliczyć koszt wykonania w procesie szeregowym wyrobów, których schematy przedstawiono na rys. 16, 14, 8, przyjmując dowolne czasy trwania i koszty operacji.

### *2.1.2. Obliczanie kosztów wykonania wyrobu na podstawie beznawiasowej listy części wyrobu*

Mając na uwadze liczenie kosztów za pomocą maszyny matematycznej koszt $K(P_w)$ dla procesu szeregowego jednowyrobowego wygodnie jest liczyć na podstawie listy części wyrobu $W$.

Obliczenie pierwszego składnika sumy $K(P_w)$ nie przedstawia oczywiście trudności. Należy kolejno przeczytać symbole występujące w liście, a następnie zsumować wszystkie koszty operacji, które zakładamy, że są podane przy odpowiedniej nazwie podzespołu.

Nieco bardziej złożone jest obliczenie drugiego składnika sumy. Aby wykonać to obliczenie, musimy $n$-krotnie przeczytać symbol po symbolu listę części obliczając przy $i$-tym czytaniu wyrażenie

(1) $$m\tau_i p_i,$$

a wyniki dodawać do uzyskanej w poprzednich krokach sumy wyrażeń $m\tau_k p_k$ $(k = 1, \ldots, i = 1)$.

Zasadniczy kłopot polega na możliwie prostym obliczeniu wyrażenia $p_i$. Obliczenie tego wyrażenia najłatwiej jest przeprowadzić w podany niżej sposób.

Określimy najpierw pojęcie $i$-tego reduktu formuły Łukasiewicza, który oznaczymy przez $R_i(\psi)$ i zdefiniujemy indukcyjnie w sposób następujący

(1) $$R_0(\psi) = \psi,$$

(2) $$R_{i+1}(\psi) = R_i^*(\psi),$$

gdzie $R_i^*(\psi)$ oznacza formułę otrzymaną z formuły $\psi$ poprzez zastąpienie w tej ostatniej pierwszego z lewej symbolu podzespołu oraz symboli jego bezpośrednich składników — symbolem $*$

*Przykład.* Weźmy listę części

$$\psi = B_0, G_0, H_0, D_2, E_0, I_0, J_0, K_0, F_3, C_3, A_2.$$

Kolejne redukty tej listy będą następujące:

$$R_1(\psi) = B_0, *, E_0, I_0, J_0, K_0, F_3, C_3, A_2$$
$$R_2(\psi) = B_0, *, E_0, *, C_3, A_2$$
$$R_3(\psi) = B_0, *, A_2$$
$$R_4(\psi) = *.$$

Gwiazdkę $*$ w liście części będziemy traktowali tak samo jak symbole detali.

Zauważmy, że

$$p_i = \overline{\overline{\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_{i+1}}} = D(R_i(\psi))-1,$$

gdzie $D(R_i(\psi))$ oznacza liczbę symboli detali w redukcie $R_i(\psi)$.

A więc obliczenie $p_i$ sprowadza się do zliczenia wszystkich symboli oznaczających detale i odjęcie jedności. Obliczenie zaś kolejnych reduktów jest sprawą bardzo prostą i może być wykonane z łatwością na maszynie.



*Przykład.* Obliczmy za pomocą listy części koszty wykonania wyrobu, o którym mowa w poprzednim przykładzie:

$$p_1 = \overline{\overline{\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2}} = D(R_1(\psi))-1 = 5,$$
$$p_2 = \overline{\overline{\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_3}} = D(R_2(\psi))-1 = 3,$$
$$p_3 = \overline{\overline{\mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_4}} = 1,$$
$$p_4 = \overline{\overline{\mathfrak{F}_4 - \mathfrak{F}_5}} = 0.$$

*Ćwiczenie*

1. Obliczyć redukty dla wyrobów, których drzewa przedstawiono na rys. 15, 14, 8.

### *2.1.3. Minimalizacja kosztów wykonania wyrobu w procesie szeregowym przy stałych czasach operacji*

Z wzoru na koszt wykonania wyrobu $W$ w procesie podstawowym

(1) $$\sum_{i=1}^{n} o_i + m \sum_{i=1}^{n} \tau_i p_i$$

widzimy, że pierwszy składnik sumy (1) jest stały i nie zależy od tego, w jakiej kolejności będziemy montować podzespoły, natomiast drugi składnik zależy od kolejności montowania podzespołów. A więc przez dobór odpowiedniej kolejności montażu można wpływać na koszt wykonania wyrobu. W rozdziale tym zajmiemy się bliżej badaniem wielkości kosztów wykonania wyrobu w zależności od kolejności montażu podzespołów wyrobu.

Najpierw rozpatrzymy to zagadnienie dla przypadku, gdy czasy wszystkich operacji są jednakowe.

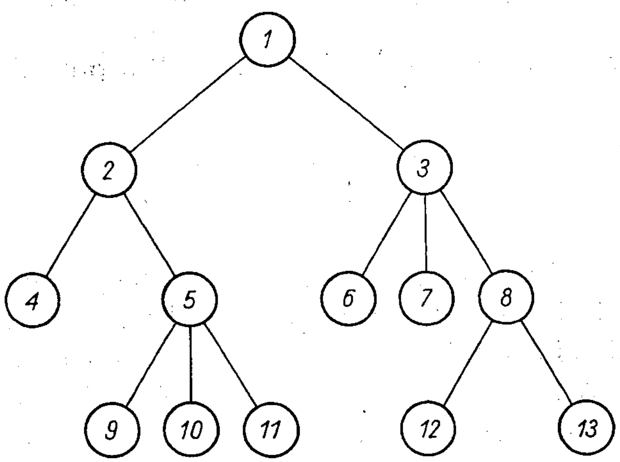
Zanim podamy twierdzenie o sposobie minimalizacji kosztów wykonania wyrobu, wprowadzimy kilka pojęć pomocniczych koniecznych do sformułowania twierdzenia.

Niech $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ będzie procesem szeregowym. Przez $V_i$ będziemy oznaczali $i$-tą warstwę procesu $P_W$, którą zdefiniujemy następująco:

$$V_i = \{x : x \in P(W) \quad \text{oraz} \quad \beta(x) \subset \mathfrak{F}_i\},$$

gdzie:
$P(W)$ — zbiór wszystkich podzespołów wyrobu $W$,
$\beta(x)$ — zbiór bezpośrednich składników wyrobu $x$.

A więc $i$-tą warstwą procesu $P_W$ jest zbiór tych wszystkich podzespołów, których wszystkie bezpośrednie składniki należą do $\mathfrak{F}_i$. Inaczej mówiąc $i$-ta warstwa jest zbiorem tych wszystkich podzespołów wyrobu $W$, które można montować z wyrobów należących do $\mathfrak{F}_i$.




*Rys. 23*

*Przykład.* Jeżeli przyjmiemy, że wyrób, którego drzewo pokazano na rys. 23, jest produkowany w procesie



$$\mathfrak{F}_1 = \{4, 9, 10, 11, 6, 7, 12, 13\}$$
$$\mathfrak{F}_2 = \{4, 5, 6, 7, 12, 13\},$$
$$\mathfrak{F}_3 = \{2, 6, 7, 12, 13\},$$
$$\mathfrak{F}_4 = \{2, 6, 7, 8\},$$
$$\mathfrak{F}_5 = \{2, 3\},$$
$$\mathfrak{F}_6 = \{1\},$$

to kolejne warstwy tego procesu będą następujące:[4]

$$V_1 = \{5, 8\},$$
$$V_2 = \{2, 8\},$$
$$V_3 = \{8\},$$
$$V_4 = \{3\},$$
$$V_5 = \{1\}.$$

Niech $V_i = \{x_1, \ldots, x_s\}$. Przez $V_i^\varkappa$ będziemy oznaczali podzespół $x \in V_i$, taki że

$$\varkappa(x) = \max\{\varkappa(x_1), \ldots, \varkappa(x_s)\}.$$

Proces szeregowy $P_W$ nazwiemy *minimalnym*, jeżeli nie istnieje taki proces szeregowy $P_W$, że $P'_W = P_W$ oraz $K(P'_W) < K(P_W)$.

*Twierdzenie 1.* Jeżeli $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ jest szeregowym procesem minimalnym, takim że czasy wykonania wszystkich operacji są jednakowe, to dla każdego $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$

$$x_i = \mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i = \varkappa(V_i).$$

*Dowód.* Będziemy udowadniać twierdzenie przeciwstawne: jeżeli dla pewnego $l$ jest

(1) $$x_l = \mathfrak{F}_{l+1} - \mathfrak{F}_l \neq V_l^\varkappa,$$

to $P_W$ nie jest procesem minimalnym.

[4] Dla uproszczenia części wyrobu $W$ oznaczono liczbami naturalnymi $1, 2, \ldots, 13$.

Idea podanego dalej dowodu polega na tym, że w każdym stadium należy zaczynać od zespołu o najmniejszej krotności, aby uniknąć dużych kosztów magazynowania.

Aby udowodnić to twierdzenie, musimy pokazać, że jeżeli spełnione jest założenie (1), to istnieje taki proces szeregowy $P_W$ o długości $n+1$, że $K(P_W') < K(P_W)$ (oczywiście $P_W' \sim P_W$).

Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem długości procesu. Załóżmy, że $P_W$ ma długość 3, tj.

$$P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3.$$

Jeżeli $P_W' = P_W$, to $P_W'$ musi mieć postać.

$$P_W' = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2', \mathfrak{F}_3.$$

Niech

$$\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1 = x_1, \qquad \mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_2 = x_2,$$

zaś

$$\mathfrak{F}_2' - \mathfrak{F}_1 = x_1', \qquad \mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_2' = x_2'.$$

Z uwagi na to, że $P_W'$ i $P_W$ są procesami szeregowymi

(2) $$x_1 = x_2' \quad \text{oraz} \quad x_2 = x_1'.$$

Na podstawie (1) możemy więc napisać:

(3) $$\varkappa(x_1) < \varkappa(x_2).$$

Wobec (2) nierówność (3) przyjmuje postać

(4) $$\varkappa(x_1) < \varkappa(x_1').$$

Mnożąc nierówność (4) przez $-1$ i dodając obustronnie $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1$ otrzymamy

(5) $$\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 - \varkappa(x_1') < \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 - \varkappa(x_1),$$

lub inaczej

(6) $$p_1' < p_1.$$



Na podstawie definicji mamy, że

(7) $$\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_2 = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 - \varkappa(x_1) + 1,$$

(8) $$\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_2' = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 - \varkappa(x_1') + 1.$$

Opierając się na równościach (7) i (8) oraz niżej podanych (9) i (10)

(9) $$p_2 = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_2 - \varkappa(x_2),$$

(10) $$p_2' = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_2' - \varkappa(x_2'),$$

otrzymamy

(11) $$p_2 = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 - \varkappa(x_1) - \varkappa(x_2) + 1,$$

(12) $$p_2' = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 - \varkappa(x_1') - \varkappa(x_2') + 1.$$

Uwzględniając (2), (11) i (12) mamy

(13) $$p_2 = p_2'.$$

Wobec tego na podstawie (6) oraz (13) otrzymamy

(14) $$p_1' + p_2' < p_1 + p_2.$$

Ponieważ koszty wykonania wyrobu $W$ w procesie $P_W$ i $P_W'$ obliczamy na podstawie wzorów

(15) $$K(P_W') = \sum_{i=1}^{2} o_i' + m\tau' \sum_{i=1}^{2} p_i',$$

(16) $$K(P_W) = \sum_{i=1}^{2} o_i + m\tau \sum_{i=1}^{2} p_i,$$

zaś

$$\sum_{i=1}^{2} o_i' = \sum_{i=1}^{2} o_i,$$

więc na podstawie (14), (15) i (16) otrzymamy

$$K(P'_W) < K(P_W).$$

Twierdzenie 1 dla procesów o długości 3 jest więc prawdziwe.

Załóżmy teraz, że twierdzenie 1 jest prawdziwe dla procesów o długości mniejszej niż $k$. Pokażemy, że jest ono wtedy również prawdziwe dla procesów o długości $k+1$.

Niech $P_W$ będzie procesem szeregowym o długości $k+1$

$$P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_l, \ldots, \mathfrak{F}_{k+1},$$

takim że

$$x_l = \mathfrak{F}_{l+1} - \mathfrak{F}_l \neq V_l^{\varkappa}.$$

Pokażemy, że istnieje taki proces $P'_W \sim P_W$, że $K(P'_W) < K(P_W)$. Mówiąc inaczej pokażemy, że jeżeli $P_W$ ma długość $k+1$ oraz istnieje $y \in V_l$, takie że $\varkappa(y) > \varkappa(x_l)$, to proces $P_W$ nie jest procesem o kosztach minimalnych.

Przedstawmy proces produkcyjny $P_W$ jako złożenie dwu procesów

$$P_W = S_{W_1} S_{W_2},$$

gdzie:

$$S_{W_1} = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_{l-1}, \mathfrak{F}_l$$

$$S_{W_2} = \mathfrak{F}_l, \ldots, \mathfrak{F}_{k+1}.$$

Proces $S_{W_2}$ ma długość mniejszą niż $k$. Ponieważ $x_l \neq V_l^{\varkappa}$, więc istnieje taki proces $R_{W_2} (R_{W_2} \sim S_{W_2})$, że $K(R_{W_2}) < K(S_{W_2})$ i długości $R_{W_2}$ i $S_{W_2}$ są jednakowe.

Rozpatrzmy proces $P'_W$, który jest złożeniem[5] procesów $S_{W_1}$ i $S_{W_2}$

$$P'_W = S_{W_1} R_{W_2}.$$

Ponieważ

$$K(P'_W) = K(S_{W_1}) + K(R_{W_2}),$$

[5] Złożenie takie oczywiście istnieje.



więc

$$K(P'_W) < K(P_W),$$

co należało wykazać.

Tak więc twierdzenie 1 zostało udowodnione.

Jeżeli w procesie $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ dla każdego $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ istnieje dokładnie jeden podzespół[6] $V_i^{\varkappa}$, to $P_W$ nazwiemy *procesem $\varkappa$-deterministycznym*.

*Twierdzenie 2.* Jeżeli $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ jest szeregowym procesem $\varkappa$-deterministycznym, takim że czasy wszystkich operacji są jednakowe oraz dla każdego $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$x_i = \mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i = V_i^{\varkappa},$$

to $P_W$ jest procesem o kosztach minimalnych.

*Dowód.* Podobnie jak poprzednio dowodzić będziemy twierdzenia przeciwstawnego do twierdzenia 2, tj. twierdzenia następującego:

Jeżeli $P_W$ jest procesem szeregowym $\varkappa$-deterministycznym, to istnieje takie $l$ $(1 \leqslant l \leqslant n)$, że

$$x_l = \mathfrak{F}_{l+1} - \mathfrak{F}_l \neq V_l^{\varkappa}.$$

Dowód tego twierdzenia przeprowadzimy również przez indukcję.

Pokażemy najpierw, że twierdzenie 2 jest prawdziwe dla procesów deterministycznych o długości 3.

Niech $P_W$ będzie procesem deterministycznym o długości 3. Ponieważ $P_W$ nie jest procesem o kosztach minimalnych, więc istnieje taki proces szeregowy $P'_W$, że $P'_W$ ma długość 3 oraz

$$K(P'_W) < K(P_W). \tag{1}$$

Biorąc pod uwagę wzór na koszt wykonania wyrobu, na podstawie (1) otrzymamy

[6] Tzn. dla każdych $x$ i $x'$, jeżeli $x \in V_i$ oraz $x' \in V_i$, to $\varkappa(x) \neq \varkappa(x')$.

$$\sum_{i=1}^{2} o_i' + m\tau \sum_{i=1}^{2} p_i' < \sum_{i=1}^{2} o_i + m\tau \sum_{i=1}^{2} p_i, \tag{2}$$

skąd po uproszczeniu mamy

$$\sum_{i=1}^{2} p_i' < \sum_{i=1}^{2} p_i. \tag{3}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} p_1' &= \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1' - \varkappa(x_1'), \\ p_2' &= \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_2' - \varkappa(x_2'), \\ p_1 &= \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 - \varkappa(x_1), \\ p_2 &= \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_2 - \varkappa(x_2), \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_3' - \mathfrak{F}_2' = x_2', \\ x_2 &= \mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2' - \mathfrak{F}_1' = x_1' \end{aligned} \tag{5}$$

oraz

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_2' &= \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1' - \varkappa(x_1') + 1, \\ \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_2 &= \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 - \varkappa(x_1) + 1, \end{aligned} \tag{6}$$

więc podstawiając (4), (5) i (6) do (3) otrzymamy

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1' - \varkappa(x_1') + \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1' - \varkappa(x_1') + 1 - \varkappa(x_2') &< \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 - \varkappa(x_1) + \\ &+ \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 - \varkappa(x_1) + 1 - \varkappa(x_2). \end{aligned} \tag{7}$$

Uwzględniając, że $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1'$, $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_1'$ z nierówności (7) otrzymamy

$$\varkappa(x_1) < \varkappa(x_2). \tag{8}$$

Ponieważ $V_1 = \{x_1, x_2\}$, więc twierdzenie 2 dla procesów o długości 3 jest spełnione.



Załóżmy teraz, że twierdzenie 2 jest prawdziwe dla procesów o długości $k$; pokażemy, że jest ono wtedy również prawdziwe dla procesów o długości $k+1$.

Niech $P_W$ będzie procesem szeregowym deterministycznym o długości $k+1$, tj.

$$P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{k+1}.$$

Proces $P_W$ możemy traktować jako złożenie procesów $R_{W_1}$ i $S_{W_1}$, takich że

$$R_{W_1} = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_k,$$

zaś

$$S_{W_2} = \mathfrak{F}_k, \mathfrak{F}_{k+1}.$$

Z założenia indukcyjnego dla $R_{W_1}$ istnieje takie $l$ ($1 \leqslant l \leqslant k-1$), że

$$x_l \neq V_l^{\varkappa}, \tag{9}$$

gdzie:

$$x_l = \mathfrak{F}_{l+1} - \mathfrak{F}_l.$$

A więc również dla procesu $P_W$ istnieje $l$ spełniające warunek (9), gdyż proces $S_{W_2}$ jest składnikiem procesu $P_W$.

Twierdzenie 2 zostało w ten sposób udowodnione.[7]

*Przykład.* Rozpatrzmy szeregowy, deterministyczny proces produkcji wyrobu, którego schemat przedstawiono na rys. 23. Koszt produkcji wyrobu $W$ w procesie $P_W$ wyniesie:

$$K(P_W) = \sum_{i=1}^{5} o_i + m\tau \sum_{i=1}^{5} p_i.$$

Aby otrzymać proces o kosztach minimalnych, należy wyko-

[7] Byłoby rzeczą interesującą udowodnienie odpowiedniego twierdzenia również dla procesów niedeterministycznych, jednakże problem ten jest nieco trudniejszy i nie będziemy się nim tu zajmowali.

nywać montaż podzespołów w kolejności następującej: $x_5$, $x_8$, $x_3$, $x_2$, $x_1$ (zgodnie z numeracją podaną na rys. 23).

Obliczmy najpierw wartości wszystkich $p_i$

$$p_1 = \overline{\overline{\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2}} = \overline{\overline{\{x_4, x_9, x_{10}, x_{11}, x_6, x_7, x_{12}, x_{13}\} \cap}}$$

$$\overline{\overline{\cap \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_{12}, x_{13}\}}} =$$

$$= \overline{\overline{\{x_4, x_6, x_7, x_{12}, x_{13}\}}} = 5$$

$$p_2 = \mathfrak{F}_2 \cap \mathfrak{F}_3 = \overline{\overline{\{x_4, x_5, x_6, x_7, x_{12}, x_{13}\} \cap}}$$

$$\overline{\overline{\cap \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}}} = \overline{\overline{\{x_4, x_5, x_6, x_7\}}} = 4$$

$$p_3 = \overline{\overline{\mathfrak{F}_3 \cap \mathfrak{F}_4\}}} = \overline{\overline{\{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\} \cap \{x_4, x_5, x_3\}}} =$$

$$= \overline{\overline{\{x_4, x_5\}}} = 2$$

$$p_4 = \overline{\overline{\mathfrak{F}_4 \cap \mathfrak{F}_5}} = \overline{\overline{\{x_4, x_5, x_3\} \cap \{x_2, x_3\}}} = \overline{\overline{\{x_3\}}} = 1$$

$$p_5 = 0.$$

Stąd koszt $K(P_W)$ minimalny wyniesie

$$K(P_W) = \sum_{i=1}^{5} o_i + m\tau \sum_{i=1}^{5} p_i = \sum_{i=1}^{5} o_i + 12 m\tau.$$

*Ćwiczenie*

Obliczyć koszty wykonania wyrobu, którego schemat pokazano na rys. 23, przyjmując następujące kolejności montażu podzespołów:

a) $x_8, x_3, x_5, x_2, x_1$,
b) $x_8, x_5, x_3, x_2, x_1$,
c) $x_8, x_5, x_2, x_3, x_1$,
d) $x_5, x_2, x_8, x_3, x_1$,
e) $x_5, x_8, x_3, x_2, x_1$,
f) $x_5, x_2, x_8, x_3, x_1$.



### 2.1.4. *Minimalizacja kosztów wykonania wyrobu w procesie szeregowym przy stałej krotności podzespołów*

W tym paragrafie zajmiemy się zależnością kosztu wykonania wyrobu od czasu trwania operacji, przy ustalonej krotności wyrobów.

Niech $V_i = \{x_1, \ldots, x_s\}$ będzie $i$-tą warstwą procesu szeregowego deterministycznego $P_W$. Przez $V_i^\tau$ będziemy rozumieli podzespół $x \in V_i$, taki że

$$\tau(x) = \min\{\tau(x_i), \ldots, \tau(x_s)\},$$

gdzie $\tau(x)$ oznacza czas trwania operacji montażu wyrobu $x$ z jego bezpośrednich składników.

Podamy teraz dwa twierdzenia dotyczące minimalizacji procesów ze stałą krotnością podzespołów.

*Twierdzenie 1.* Jeżeli $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ jest szeregowym procesem minimalnym, takim że krotności wszystkich podzespołów $W$ są jednakowe, to dla każdego $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$x_i = \mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i = V_i^\tau.$$

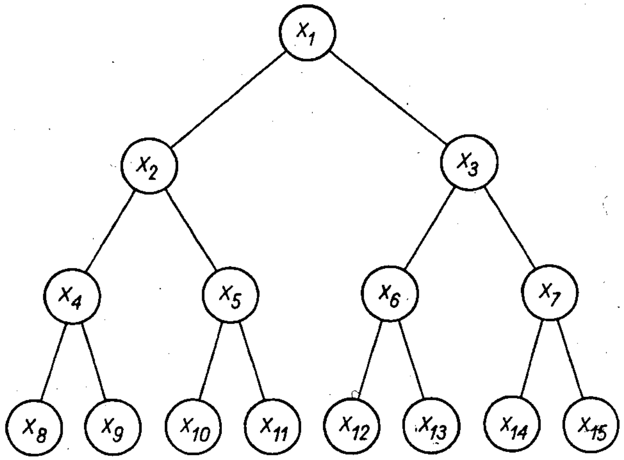
Jeżeli w procesie $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ dla każdego $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ istnieje dokładnie jeden podzespół $V_i$, to $P_W$ nazwiemy *$\tau$-deterministycznym.*

*Twierdzenie 2.* Jeżeli $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ jest szeregowym procesem $\tau$-deterministycznym, takim że krotności wszystkich operacji $P_W$ są jednakowe oraz dla każdego $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$x_i = \mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i = V_i^\tau,$$

to $P_W$ jest procesem minimalnym.

Dowodów tych twierdzeń nie będziemy podawać, są one bowiem identyczne jak dowody twierdzeń podanych w poprzednim paragrafie. Idea tych dowodów polega na tym, że jeżeli wszystkie krotności są jednakowe, to montaż powinniśmy zaczynać od podzespołu, który można zrobić najszybciej; wtedy bowiem koszty magazynowania będą najmniejsze spośród możliwych.




*Rys. 24*

*Przykład.* Rozpatrzmy wyrób pokazany na rys. 24. Przyjmijmy, że czasy montażu podzespołów tego wyrobu są następujące:

$$\begin{aligned}\tau(x_2) &= 3,\\ \tau(x_3) &= 5,\\ \tau(x_1) &= 2,\\ \tau(x_4) &= 2,\\ \tau(x_5) &= 1,\\ \tau(x_6) &= 5,\\ \tau(x_7) &= 8,\end{aligned}$$

gdzie $\tau(x_i)$ oznacza czas montażu wyrobu $x_i$.

Dla otrzymania najmniejszego kosztu montażu należy przyjąć następujące kolejności montowania podzespołów

$$x_5,\ x_4,\ x_6,\ x_7,\ x_2,\ x_3,\ x_1.$$

Operacje te są uporządkowane według rosnących czasów.



Przyjmiemy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau(x_5),\\ \tau_2 &= \tau(x_4),\\ \tau_3 &= \tau(x_6),\\ \tau_4 &= \tau(x_7),\\ \tau_5 &= \tau(x_2),\\ \tau_6 &= \tau(x_3),\\ \tau_7 &= \tau(x_1).\end{aligned}$$

Dla rozpatrywanego przykładu

$$p_i = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 - (i+1).$$

Ponieważ $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 = 8$, więc $p_i = 7-i$.

Najmniejszy koszt wyniesie zatem

$$K(P_W) = \sum_{i=1}^{7} o_i + 2m \sum_{i=1}^{7} \tau_i p_i = \sum_{i=1}^{7} o_i + 142m.$$

*Ćwiczenia*

1. Podać koszty montażu wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 24, przy następujących kolejnościach montowania podzespołów:

$$x_4,\ x_6,\ x_5,\ x_7,\ x_3,\ x_2,\ x_1,$$
$$x_7,\ x_5,\ x_4,\ x_6,\ x_2,\ x_3,\ x_1,$$
$$x_5,\ x_4,\ x_7,\ x_6,\ x_3,\ x_2,\ x_1.$$

### *2.1.5. Minimalizacja kosztów montażu w procesie szeregowym przy różnych czasach operacji i różnej liczbie bezpośrednich składników podzespołów*

Jeżeli czasy wykonywania operacji procesu szeregowego są różne, a podzespoły mają różną liczbę bezpośrednich składników, to procesy minimalne spełniają warunki podane w dwu twierdzeniach, które przytoczymy w tym paragrafie.

Niech $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ będzie procesem szeregowym, zaś $V_i = \{x_1, \ldots, x_s\}$ $i$-tą warstwą procesu $P_W$. Przez $V_i^\pi$ będziemy oznaczali podzespół $x \in V_i$, taki że

$$\pi(x) = \min\{\pi(x_1), \ldots, (x_s)\},$$

gdzie

$$\pi(x_j) = \tau_j p_j,$$

zaś

$\tau_j$ — czas montażu podzespołu $x_j$,

$$p_j = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_j - \varkappa(x_j).$$

*Twierdzenie 1.* Jeżeli $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ jest szeregowym procesem minimalnym, to dla każdego $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$x_i = \mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i = V_i^\pi.$$

Jeżeli w procesie $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ dla każdego $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ istnieje dokładnie jeden podzespół $V_i^\pi$, to $P_W$ nazwiemy procesem *$\pi$-deterministycznym.*

*Twierdzenie 2.* Jeżeli $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ jest procesem szeregowym $\pi$-deterministycznym oraz dla każdego $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$x_i = \mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i = V_i^\pi,$$

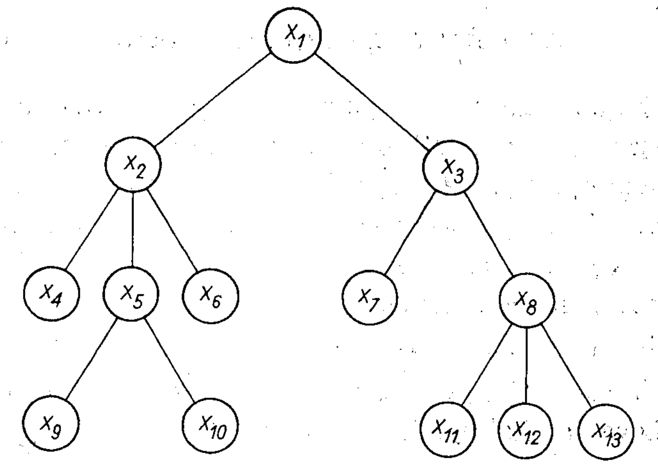
to $P_W$ jest procesem minimalnym.

Dowody tych twierdzeń są podobne do dowodów już podanych, nie będziemy ich więc powtarzali.

*Przykład.* Weźmy pod uwagę wyrób, którego schemat przedstawiono na rys. 25. Niech $\tau(x_2)$ oznacza czas montażu wyrobu $x_i$. Przyjmijmy dla rozpatrywanego przykładu następujące czasy montażu:

$$\tau(x_5) = 3,$$
$$\tau(x_8) = 4,$$
$$\tau(x_1) = 2,$$
$$\tau(x_2) = 5,$$
$$\tau(x_3) = 5.$$






*Rys. 25*

Minimalny koszt wykonania wyrobu otrzymamy więc przy następującej kolejności montażu:

$$x_5, x_8, x_2, x_3, x_1.$$

Poniżej podajemy kolejne wartości iloczynów $\tau_i p_i$:

$$\tau(x_5) \cdot p_5 = 3 \cdot 6 = 18,$$
$$\tau(x_8) \cdot p_8 = 4 \cdot 4 = 16,$$
$$\tau(x_2) \cdot p_2 = 5 \cdot 2 = 10,$$
$$\tau(x_3) \cdot p_3 = 5 \cdot 1 = 5,$$
$$\tau(x_1) \cdot p_1 = 2 \cdot 0 = 0.$$

*Ćwiczenia*

1. Zbadać zależność kosztów wykonania wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 25, od kolejności operacji montażu, przyjmując następujący porządek montowania podzespołów:

$$x_5, x_2, x_8, x_3, x_1,$$
$$x_8, x_3, x_5, x_2, x_1,$$
$$x_5, x_8, x_3, x_2, x_1,$$
$$x_8, x_5, x_3, x_2, x_1.$$

### *2.1.6. Koszty operacji i czasy operacji*

Przyjmijmy, że czas trwania operacji montażu może być zmieniany (zwiększany lub zmniejszany) i że związane to jest z kosztem operacji w ten sposób, że zwiększenie czasu operacji zmniejsza koszt jej wykonania i odwrotnie, skrócenie czasu trwania operacji montażu wymaga zwiększenia jej kosztu. Dla uproszczenia przyjmiemy, że czas trwania operacji jest odwrotnie proporcjonalny do kosztu jej wykonania.

Niech $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ będzie szeregowym procesem produkcyjnym, którego koszt wynosi

$$K(P_W) = \sum_{i=1}^{n} o_i + m \sum_{i=1}^{n} \tau_i p_i \tag{1}$$

Jeżeli czas każdej operacji zmniejszymy $k$-krotnie, zwiększając jednocześnie $k$-krotnie koszt wykonania każdej operacji $o_i$, to koszt (1) przyjmie postać

$$K'(P_W) = k \sum_{i=1}^{n} o_i + \frac{m}{k} \sum_{i=1}^{n} \tau_i p_i. \tag{2}$$

Niech $\alpha_k$ oznacza stosunek $K'(P_W)$ do $K(P_W)$, tj.

(3) $\alpha_k = \dfrac{K'(P_W)}{K(P_W)}$, zwany *współczynnikiem kosztów całkowitych.*

Podstawiając (1), (2) do (3) otrzymamy

$$\alpha_k = \frac{k \sum\limits_{i=1}^{n} o_i + \frac{m}{k} \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} o_i + m \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i p_i}, \tag{4}$$



a po uproszczeniu

$$\alpha_k = \frac{k + \frac{\omega}{k}}{1+\omega}, \tag{5}$$

gdzie

$$\omega = \frac{m \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} o_i}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\alpha_k$ ma wartość najmniejszą, gdy

$$k = \sqrt{\omega}. \tag{6}$$

Zwróćmy uwagę, że $\alpha_k = 1$, gdy $k = 1$ lub $k = \omega$. Między $k = 1$ a $k = \omega$ znajduje się minimum $\alpha_k$, natomiast poza przedziałem $k = 1$ i $k = \omega$, $\alpha_k$ rośnie nieograniczenie.

Jeżeli koszty magazynowania są większe niż koszty operacji, to $\omega > 1$, więc $k > 1$, co oznacza, że dla zmniejszenia współczynnika całkowitych kosztów produkcji należy skrócić czas operacji montażu; gdy koszty magazynowania są mniejsze od kosztów operacji, czyli $\omega < 1$, $k < 1$, aby otrzymać minimalny współczynnik kosztów całkowitych, należy wydłużyć czas operacji montażu.

*Przykład.* Niech $\omega = 4$. Najmniejsza wartość $k$ wyniesie więc $k = \sqrt{4} = 2$,
zaś

$$\alpha_k = \frac{2+\frac{4}{2}}{1+4} = \frac{4}{5}.$$

W tym przypadku największe zmniejszenie kosztów produkcji otrzymamy wówczas, gdy dwukrotnie obniżymy czas każdej operacji montażu zwiększając jednocześnie w tym samym stosunku koszt wykonania każdej operacji. W rezultacie uzyskamy zmniejszenie kosztów produkcji o 1/5.

*Ćwiczenie*

Obliczyć koszty optymalne dla następujących wartości $\omega$: 0,01, 0,1, 0,25, 0,5, 1,5, 10, 100.

### 2.1.7. Koszty produkcji szeregowej, równoległej i masowej

W paragrafie tym zajmiemy się zależnością kosztów wykonania wyrobu od rodzaju produkcji.

W przypadku produkcji szeregowej $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$, jak to podaliśmy poprzednio, koszt wykonania wyrobu $W$ wynosi:

$$K(P_W) = \sum_{i=1}^{n} o_i + m \sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i, \tag{1}$$

gdzie:
$o_i$ — koszt montażu podzespołu $x_i$,
$m$ — jednostkowe koszty magazynowania,
$p_i$ — $\overline{\overline{\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_{i+1}}}$,
$\tau_i$ — koszt trwania operacji $t_i$ (czas trwania montażu podzespołu $x_i$).

Jeżeli ten sam wyrób $W$ będziemy montować w procesie produkcyjnym równoległym i założymy, że koszty operacji montażu każdego podzespołu $x_i$, czasy trwania operacji oraz jednostkowe koszty magazynowania są takie same jak dla procesu szeregowego, to koszt produkcji równoległej $P'_W = \mathfrak{F}'_1, \mathfrak{F}'_2, \ldots, \mathfrak{F}'_{k+1}$ wyrobu $W$ wyniesie

$$K(P'_W) = \sum_{i=1}^{k} o'_i + m \sum_{i=1}^{k} \tau_i^* p'_i, \tag{2}$$



gdzie:

$$p'_i = \overline{\overline{\mathfrak{F}'_{i+1} \cap \mathfrak{F}'_i}},$$
$$\tau_i^* = \max\{\tau(x_1^i), \tau(x_2^i), \ldots, \tau(x_r^i)\},$$

natomiast

$$\mathfrak{F}'_{i+1} - \mathfrak{F}_i = \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_r^i\},$$

oraz

$$\tau(x_j^i) \text{ — oznacza czas montażu podzespołu } x_j^i.$$

Pokażemy, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

*Twierdzenie 1.* Dla dowolnych wyrobów $W$, jeżeli $P_W$ jest procesem szeregowym, zaś $P'_W$ — procesem równoległym, to

$$K(P_W) > K(P'_W), \tag{3}$$

tzn. koszt wykonania wyrobu $W$ w procesie produkcyjnym równoległym jest mniejszy niż koszt wykonania tego wyrobu w procesie produkcyjnym szeregowym.

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem liczby kroków równoległych w procesie równoległym. Rozważmy najpierw procesy zawierające dokładnie jeden krok równoległy. Przypominamy, że *krok jest równoległy, jeżeli zawiera więcej niż jedną operację montażu.* Wtedy na podstawie (1), (2), (3) mamy

$$\sum_{i=1}^{n} o_i + m \sum_{i=1}^{n} \tau_i p_i > \sum_{i=1}^{k} o'_i + m \sum_{i=1}^{k} \tau_i^* p'_i. \tag{4}$$

Ponieważ z założenia

$$\sum_{i=1}^{n} o_i = \sum_{i=1}^{k} o'_i,$$

więc z (4) otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i p_i > \sum_{i=1}^{k} \tau_i p_i. \tag{5}$$

Z definicji produkcji równoległej wynika, że dla dowolnego procesu równoległego $P'_W$ istnieje co najmniej jedno takie $l$ ($1 \leqslant l \leqslant k$), dla którego

$$X_l = \mathfrak{F}'_{l+1} - \mathfrak{F}'_l = \{x_1^l, x_2^l, \ldots, x_r^l\}, \quad r > 1.$$

Wobec tego (5) możemy napisać w postaci

(6)

$$\sum_{i=1}^{l-1} \tau_i p_i + \sum_{i=l}^{r} \tau_i p_i + \sum_{i=r+1}^{n} \tau_i p_i > \sum_{i=1}^{l-1} \tau_i p_i + \tau_l^* p'_l + \sum_{i=l+1}^{n-r} \tau_i p_i,$$

gdzie:

$\tau_l^* = \max\{\tau(x_1^l), \tau(x_2^l), \ldots, \tau(x_r^l)\}$,

zaś $\tau(x_j^i)$ stanowi czas montażu podzespołu $x_j^i$, natomiast

$$p'_l = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_l - \sum_{j=1}^{r} \varkappa(x_j^l).$$

Przyjmiemy, że procesy $P_W$ i $P'_W$ różnią się jedynie tym, że w kroku $l$ w procesie równoległym $P'_W$ wykonano jednocześnie montaż $r$ wyrobów $x_1^l, x_2^l, \ldots, x_r^l$, w procesie szeregowym zaś zmontowano w tym czasie tylko jeden wyrób $x_1^l$.

Oczywiście

$$\mathfrak{F}_{l+r} = \mathfrak{F}'_{l+2}$$

oraz

$$\sum_{i=r+1}^{n} \tau_i p_i = \sum_{i=l+2}^{n-r} \tau_i p_i,$$

wobec tego nierówność (6) przyjmie postać

(7) $$\sum_{i=l}^{r} \tau_i p_i > \tau_l p'_l.$$



Pisząc nierówność (7) w postaci rozwiniętej otrzymamy

(8) $$[\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_l - \varkappa(x_1^l)]\,\tau(x_1^l) + [\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_{l+1} - \tau(x_2^l)]\,\tau(x_2^l) + \ldots + \\ + [\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_{l+r-1} - \varkappa(x^l)]\,\tau(x^l) > \Big[\overline{\overline{\mathfrak{F}}}'_l - \sum_{j=1}^{r} \varkappa(x_j^l)\Big]\,\tau_l^*.$$

Nierówność (8) możemy napisać jako

(9) $$\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1\,\tau(x_1^l) - \sum_{j=1}^{r} \varkappa(x_j^l)\,\tau(x_j^l) + Z > \overline{\overline{\mathfrak{F}}}'_l\,\tau_l^* - \sum_{j=1}^{r} \varkappa(x_j^l)\,\tau_l^*,$$

gdzie

$$Z = \sum_{i=2}^{r} \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_{l+i} - \tau(x_i^l).$$

Ponieważ

(10) $$\overline{\overline{\mathfrak{F}}}'_l = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_l,$$

więc

(11) $$\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_l\,\tau(x_1^l) \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{F}}}'_l\,\tau_l^*.$$

Wiemy również, że

(12) $$\sum_{j=1}^{r} \varkappa(x_j^l)\tau_l^* \geqslant \sum_{j=1}^{r} \varkappa(x_j^l)\tau(x_j^l).$$

Na podstawie (9) i (11) otrzymamy

(13) $$\sum_{j=1}^{r} (x_j^l)\tau_l^* \geqslant \sum_{j=1}^{r} \varkappa(x_j^l)\tau^*(x_j^l) - Z.$$

Biorąc pod uwagę nierówność (12) i fakt, że $Z > 0$ możemy stwierdzić, że nierówność (13) jest prawdziwa.

A więc twierdzenie 1 dla procesów produkcyjnych równoległych zawierających jeden krok, w którym wykonuje się jednocześnie więcej niż jedną operację montażu, jest prawdziwe.

Pokażemy teraz, że jeżeli twierdzenie 1 jest prawdziwe dla procesów zawierających $p$ kroków równoległych, to również jest prawdziwe dla procesów o $p+1$ krokach równoległych.

Niech $P'_W$ będzie równoległym procesem produkcyjnym zawierającym $p+1$ kroków równoległych. $P'_W$ możemy przedstawić jako złożenie procesów $R'_{W_1}$ i $S'_{W_2}$

(14) $$P'_W = R'_{W_1} S'_{W_2},$$

gdzie $R'_{W_1}$ i $S'_{W_2}$ są procesami równoległymi, takimi że $R_{W_1}$ zawiera $p$ kroków równoległych, zaś $S_{W_2}$ — jeden krok równoległy.

Niech $P_W$ będzie procesem szeregowym ($P_W \sim P'_W$). Przedstawmy $P_W$ jako złożenie procesów szeregowych $R_{W_1}$ i $S_{W_2}$, takich że

$$R'_{W_1} \sim R_{W_1} \quad \text{i} \quad S'_{W_2} \sim S_{W_2}.$$

Ponieważ

(15) $$K(P_W) = K(R_{W_1}) + K(S_{W_2}),$$

na podstawie założenia indukcyjnego możemy zapisać

(16) $$K(P_W) > K(R'_{W_1}) + K(S'_{W_2}).$$

Jednakże

(17) $$K(P'_{W_1}) + K(S'_{W_2}) = K(P'_W),$$

więc

(18) $$K(P_W) > K(P'_W).$$

A zatem twierdzenie 1 zostało udowodnione.

Obecnie zajmiemy się porównaniem kosztów wykonania wyrobów w procesach produkcji masowej i równoległej.

Będziemy porównywać koszt wykonania nie jednego wyrobu, a większej liczby wyrobów. Przyjmiemy więc, że mamy wyprodukować $q$ jednakowych wyrobów $W$ i pytamy, czy koszty ich



wykonania będą mniejsze w produkcji równoległej czy masowej.

Zakładamy również, że przed rozpoczęciem produkcji w magazynach znajdują się wszystkie detale potrzebne do wykonania $q$ wyrobów, że czasy montażu wszystkich podzespołów wyrobu $W$ i koszty montażu podzespołów w obu rodzajach produkcji oraz krotności wszystkich podzespołów są jednakowe.

Niech $P_W$ będzie produkcją równoległą, zaś $P'_W$ produkcją masową.

*Twierdzenie 2.* Dla każdych procesów $P_W$ i $P'_W$

$$K_q(P_W) > K_q(P'_W),$$

gdzie $K_q(P_W)$ oznacza koszt produkcji $q$ jednakowych wyrobów w procesie $P_W$.[8]

*Dowód.* Koszt wykonania $q$ wyrobów w procesie równoległym będziemy obliczali według wzoru

(19) $$K_n(P_W) = q \sum_{i=1}^{n} o_i + m\tau \sum_{i=1}^{k} p_i$$

gdzie:

$n$ — liczba podzespołów wyrobu $W$,

$o_i$ — koszt wykonania montażu podzespołu $x_i$,

$\tau$ — czas trwania operacji montażu,

$k$ — liczba kroków procesu równoległego $P_W$,

natomiast $p_i$ zdefiniujemy następująco:

(20) $$p_i = q\bar{\bar{\mathfrak{F}}}_i - q \sum_{j=1}^{r} \varkappa(x_j^i),$$ [9]

[8] Wszystkie przyjęte tu założenia upraszczające nie są konieczne do udowodnienia twierdzenia 2. Przyjęliśmy je tutaj głównie dla uproszczenia dowodu. Z drugiej strony, tego rodzaju założenia mają naturalne uzasadnienie techniczne, np. w produkcji masowej w praktyce czasy wszystkich operacji są jednakowe.

[9] Zakładamy tu więc, że montujemy jednocześnie wszystkie $q$ wyrobów w $q$ procesach równoległych $P_W$, zaś w każdym procesie równoległym $P_W$ montujemy jednocześnie $h$ podzespołów.

gdzie

$$X_i = \mathfrak{T}_{i+1} - \mathfrak{T}_i = \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_r^i\}.$$

Dla produkcji $P'_W$ masowej koszt wykonania $q$ wyrobów wyniesie

$$K_q(P'_W) = q\sum_{i=1}^{n} o_i + m\tau \sum_{i=1}^{q} p_i, \tag{21}$$

gdzie

$$p'_i = \overline{\overline{\mathfrak{T}}}'_i - \sum_{j=1}^{s} \varkappa(x_j), \tag{22}$$

zaś $s$ — liczba podzespołów wyrobu $W$.

Na podstawie (19), (20), (21) i (22) możemy napisać

$$\sum_{i=1}^{k} \left[q\overline{\overline{\mathfrak{T}}}_i - q\sum_{j=1}^{r} \varkappa(x_j^i)\right] > \sum_{i=1}^{q} \left[\overline{\overline{\mathfrak{T}}}'_i - \sum_{j=1}^{s} \varkappa(x_j)\right]. \tag{23}$$

Nierówność (23) możemy przepisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{k} q\overline{\overline{\mathfrak{T}}}_i - q\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} \varkappa(x_j^i) > \sum_{i=1}^{q} \overline{\overline{\mathfrak{T}}}_i - \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{s} \varkappa(x_j). \tag{24}$$

Oczywiście

$$q\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} (x_j^i) = qkr\varkappa(x), \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{s} \varkappa(x_j) = qs\varkappa(x), \tag{26}$$

gdzie $\varkappa(x)$ oznacza krotność podzespołów wyrobu $W$.

Ponieważ $kr = s$, [10]

[10] W każdym kroku procesu równoległego $P_W$ montowanych jest $r$ podzespołów, a więc w $k$ krokach zostaną zmontowane wszystkie podzespoły, których — zgodnie z naszym założeniem — jest $s$.



więc nierówność (24) przyjmie postać

$$q\sum_{i=1}^{k} \overline{\overline{\mathfrak{T}}}_i > \sum_{i=1}^{q} \overline{\overline{\mathfrak{T}}}'_i. \tag{27}$$

Na podstawie definicji procesu równoległego możemy napisać

$$q\sum_{i=1}^{k} \overline{\overline{\mathfrak{T}}}_i = q[k\overline{\overline{\mathfrak{T}}}_1 - (k-1)r\varkappa(x)], \tag{28}$$

zaś na podstawie definicji produkcji masowej mamy

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{\overline{\mathfrak{T}}}'_i = q\overline{\overline{\mathfrak{T}}}_1 - (q-1)s\varkappa(x). \tag{29}$$

Z uwagi na (28) i (29) nierówność (27) przyjmie postać

$$q[k\overline{\overline{\mathfrak{T}}}_1 - (k-1)r\varkappa(x)] > q\overline{\overline{\mathfrak{T}}}_1 - (q-1)\, s\varkappa(x). \tag{30}$$

Ponieważ $q$ oraz $k$ są dużo większe od jedności, nierówność (30) możemy z przybliżeniem zastąpić nierównością

$$k\overline{\overline{\mathfrak{T}}}_1 - kr\varkappa(x) > \overline{\overline{\mathfrak{T}}}_1 - s\varkappa(x), \tag{31}$$

skąd po przekształceniach otrzymamy

$$\frac{\overline{\overline{\mathfrak{T}}}_1}{\varkappa(x)} > r - \frac{s}{k}. \tag{32}$$

Wiemy, że $\frac{s}{k} = r$, nierówność (32) przyjmie więc postać

$$\frac{\overline{\overline{\mathfrak{T}}}_1}{\varkappa(x)} > 0,$$

co jest zawsze prawdziwe.

W ten sposób twierdzenie 2 zostało udowodnione.

## 2.2. ZYSK I SPRAWNOŚĆ PRODUKCJI

### *2.2.1. Zysk produkcji*

Niech $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ będzie podstawowym procesem produkcyjnym, zaś $K(t_i)$ kosztem wykonania kroku $t_i$ w procesie $P_W$. Przez $U(\mathfrak{F}_i) = \sum_{j=1}^{r} U(x_j^i)$, $(\mathfrak{F}_i = \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_r^i\})$ będziemy oznaczali wartości wyrobów należących do $\mathfrak{F}_i$, $U(x_j^i)$ zaś oznacza wartość wyrobu $x_j^i$.

Przyjmujemy, że

$$U(\mathfrak{F}_{i+1}) = f[U(\mathfrak{F}_i), K(t_i)] \tag{1}$$

tzn. zakładamy, że wartość zbioru wyrobów $\mathfrak{F}_{i+1}$, otrzymanego w wyniku operacji $t_i$ ze zbioru wyrobów $\mathfrak{F}_i$, zależy od wartości $\mathfrak{F}_i$ oraz kosztów operacji $t_i$.[11]

W najprostszym przypadku można przyjąć, że

$$U(\mathfrak{F}_{i+1}) = U(\mathfrak{F}_i) + c_i K(t_i), \tag{2}$$

gdzie współczynnik $c_i > 1$ nazywamy *zyskiem operacji* $t_i$.

Zakładamy więc, że w trakcie produkcji wartość wyrobów znajdujących się w magazynach wzrasta o koszty wykonania podzespołów wchodzących do wykonywanego kroku produkcji, pomnożone przez pewien współczynnik $c_i > 1$.

Wartość wyrobu końcowego $W$ otrzymanego w procesie produkcyjnym $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ wyniesie więc

[11] Warto zwrócić uwagę na pewną analogię wzoru (1) z funkcją przejścia dla automatu skończonego. $U(\mathfrak{F}_i)$ można uważać za stan układu produkcyjnego (stanem układu produkcyjnego jest więc wartość wyrobów znajdujących się w magazynach), $K(t_i)$ zaś — za pewien sygnał wejściowy. Funkcję $f$ można uważać za funkcję przejścia dla układu produkcyjnego, która wskazuje, jak zmieni się stan układu produkcyjnego w zależności od poprzedniego stanu i sygnału wejściowego. Wydaje się, że rozwinięcie takiego podejścia do analizy układów produkcyjnych może dać interesujące wyniki.



$$U(\mathfrak{F}_{n+1}) = U(P_W) = U(\mathfrak{F}_1) + \sum_{i=1}^{n} c_i K(t_i). \tag{3}$$

Wyrażenie

$$K_c(P_W) = U(\mathfrak{F}_1) + K(P_W) \tag{4}$$

będziemy nazywali *kosztem całkowitym wyrobu W wyprodukowanego w procesie* $P_W$. Koszt całkowity wyrobu $W$ w procesie $P_W$ składa się z wartości detali wyrobu $W$ powiększonej o koszt wyprodukowania wyrobu $W$ w procesie $P_W$.

*Zyskiem produkcji* $P_W$ nazwiemy

$$Z(P_W) = \frac{U(P_W) - K_c(P_W)}{K_c(P_W)}. \tag{5}$$

Przyjmując, że zysk wszystkich operacji jest jednakowy i równy $c$ z równości (5) otrzymamy

$$Z(P_W) = \frac{1+cs}{1+s} - 1, \tag{6}$$

gdzie

$$s = \frac{K(P_W)}{U(F_1)}$$

($s$ jest współczynnikiem mówiącym, jaki jest stosunek kosztów wykonania wyrobu do wartości materiałów czy detali).

Jeżeli $s$ jest dużo większe od jedności, tzn. koszty produkcji są dużo większe od wartości materiałów, to (6) przyjmie postać

$$Z(P_W) = c. \tag{7}$$

A więc zysk produkcji jest wtedy w przybliżeniu równy zyskowi operacji.

Jeżeli zaś $s$ jest dużo mniejsze od jedności, tzn. koszty produkcji są dużo mniejsze od wartości materiałów zużytych w produkcji, to (6) przyjmie postać

$$Z(P_W) = cs. \tag{8}$$

Zysk produkcji maleje wtedy w stosunku: koszty produkcji do wartości materiałów.

### 2.2.2. *Sprawność procesu produkcyjnego*

Niech $P_W$ będzie wielowyrobowym procesem produkcyjnym, produkującym $k$ wyrobów lub ciągiem $k$ procesów jednowyrobowych[12].

Sprawność procesu produkcyjnego $P_W$ określimy następująco:

$$S(P_W) = \frac{k_1 U(P_W) - [kK_c(P_W) + C_m k_2]}{kK_c(P_W)}, \tag{1}$$

gdzie:

$k_1$ — liczba sprzedanych wyrobów,

$k_2$ — liczba wyrobów nie sprzedanych,

$C_m$ — jednostkowe koszty magazynowania wyrobów nie sprzedanych przez okres od wyprodukowania do czasu sprzedania.

Oczywiście

$$k = k_1 + k_2.$$

W liczniku wzoru (1) mamy wyrażenie, które mówi, jaki dochód faktycznie uzyskano po wykonaniu $k$ wyrobów i sprzedaniu z nich $k_1$ wyrobów. Ponieważ w mianowniku znajdują się koszty całkowite wyprodukowania $k$ wyrobów, wyrażenie (1) informuje, jaki jest stosunek dochodu z produkcji $k$ wyrobów do kosztów ich wykonania i materiałów, przy założeniu, że nie

[12] Ciąg procesów jednowyrobowych nazywaliśmy *produkcją seryjną*.



wszystkie z wyprodukowanych $k$ wyrobów są zaraz po wyprodukowaniu sprzedane.

Jeżeli *sprawność* jest większa od zera, tj. $S(P_W) > 0$, oznacza to, że dochód z produkcji $k$ wyrobów wykonanych w procesie $P_W$ jest większy od wydatków na materiały i robociznę. Jeżeli zaś sprawność jest mniejsza od zera, tj. $S(P_W) < 0$, oznacza to, że dochód jest mniejszy od kosztów wykonania $k$ wyrobów.

Zakładamy więc, że dla każdego procesu produkcyjnego $S(P_W) > 0$.

Wzór (1) możemy przepisać w postaci:

$$S(P_W) = C_1[Z(P_W) - 1] - [1 + (1 - C_1)C_2], \tag{2}$$

gdzie:

$Z(P_W)$ — zysk procesu $P_W$ zdefiniowany w poprzednim paragrafie,

$C_1 = \frac{k_1}{k}$ — stosunek liczby sprzedanych wyrobów do liczby wyrobów wyprodukowanych,

$C_2 = \frac{C_m}{K_c(P_W)}$ — stosunek kosztów magazynowania nie sprzedanych wyrobów do kosztów ich produkcji.

Ponieważ żądamy, aby $S(P_W) > 0$, więc po odpowiednich przekształceniach na podstawie (2) otrzymamy:

$$Z(P_W) > \frac{(1+C_2)(1-C_1)}{C_1}. \tag{3}$$

A zatem, aby sprawność procesu $P_W$ była większa od zera, musi być spełniony warunek (3).

Jeżeli $C_1$ jest bardzo bliskie jedności (tj. jeżeli prawie wszystkie wyprodukowane wyroby są sprzedane od razu po wyprodukowaniu), wartość prawej strony nierówności jest bliska zeru i wówczas sprawność procesu $P_W$ jest większa od zera, gdy zysk $Z(P_W)$ jest większy od zera.

W przypadku gdy bardzo mała liczba wyprodukowanych wyrobów jest od razu sprzedawana, wzór (3) przyjmuje postać

$$Z(P_W) > \frac{1+C_2}{C_1}. \tag{4}$$

W przypadku kosztów magazynowania małych w stosunku do kosztów wykonania nierówność (4) możemy zastąpić przybliżoną nierównością

$$Z(P_W) > \frac{1}{C_1}, \tag{5}$$

jeżeli zaś koszty magazynowania nie sprzedanych wyrobów są dużo większe niż koszty ich wykonania, zależność (4) możemy napisać w przybliżeniu jako nierówność

$$Z(P_W) > \frac{C_2}{C_1}. \tag{6}$$

Z podanych zależności wynika, że przy małych kosztach magazynowania nie sprzedanych wyrobów i małej sprzedaży, aby sprawność produkcji była większa od zera, zysk produkcji musi być odwrotnie proporcjonalny do $C_1$. Na przykład jeżeli sprzedawane jest 10% wyprodukowanych wyrobów, dla uzyskania sprawności większej od jedności zysk powinien wynosić 10.

W przypadku gdy liczba sprzedawanych wyrobów jest mała w stosunku do liczby wyrobów wyprodukowanych i koszty magazynowania nie sprzedanych wyrobów są duże, zysk powinien być wprost proporcjonalny do kosztów magazynowania i odwrotnie proporcjonalny do $C_1$.

Nie uwzględniliśmy tu faktu, że dochód z wyrobów sprzedanych w późniejszym terminie powinien się znaleźć również w liczniku wyrażenia (1). Aby ten fakt uwzględnić, należałoby jednak przyjąć jakąś charakterystykę sprzedaży w czasie. Dla uproszczenia sprawy te pominęliśmy.



## 2.3. PRODUKCJA W TOKU

### 2.3.1. *Definicja produkcji w toku*

Zbiór wszystkich podzespołów należących do $\mathfrak{F}_{i+1}$ w procesie produkcyjnym $P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ będziemy nazywali *wyrobami w toku i-tego kroku produkcji* lub krócej *wyrobami w toku produkcji* albo *produkcją w toku*. A więc, aby podać wielkość produkcji w toku, musimy podać również wskaźnik $i$ mówiący, o jaki krok produkcji nam chodzi. Wyroby w toku w $i$-tym kroku produkcji są to podzespoły zmontowane w trakcie procesu produkcyjnego w $i$ krokach produkcji.

Wyroby w toku w $i$-tym kroku produkcji $P_W$ oznaczymy przez $\mathfrak{T}_i(P_W)$ lub $\mathfrak{T}(\mathfrak{F}_{i+1})$. Wyroby w toku możemy więc określić następująco:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1(P_W) &= \mathfrak{T}(\mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1, \\ \mathfrak{T}_{i+1}(P_W) &= [\mathfrak{T}_i(P_W) \cup (\mathfrak{F}_{i+2} - \mathfrak{F}_{i+1})] - \beta^*(\mathfrak{F}_{i+2} - \mathfrak{F}_{i+1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Wyroby w toku w kroku produkcji $i+1$ otrzymamy więc dodając (teoriomnogościowo) do wyrobów w toku w $i$-tym kroku produkcji te podzespoły, które otrzymamy w kroku produkcji $i+1$ (tj. $\mathfrak{F}_{i+2} - \mathfrak{F}_{i+1}$), z pominięciem tych podzespołów, które stanowią składniki bezpośrednie podzespołów otrzymanych w $t_{i+1}$ kroku produkcji.

*Przykład.* Rozpatrzmy proces wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 25,

$$P_W = \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1 &= \{x_4, x_9, x_{10}, x_6, x_7, x_{11}, x_{12}, x_{13}\}, \\ \mathfrak{F}_2 &= \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_{11}, x_{12}, x_{13}\}, \\ \mathfrak{F}_3 &= \{x_2, x_7, x_8\}, \\ \mathfrak{F}_4 &= \{x_1\}. \end{aligned}$$

Dla każdego kroku produkcji wyroby w toku będą następujące:

$$\mathfrak{T}_1(P_W) = \{x_4, x_9, x_{10}, x_6, x_7, x_{11}, x_{12}, x_{13}\} - \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_{11}, x_{12}, x_{13}\} = x_5,$$
$$\mathfrak{T}_2(P_W) = \{x_5 \cup [\{x_2, x_7, x_8\} - \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_{11}, x_{12}, x_{13}\}]\} - [\{x_4, x_5, x_6\} \cup \{x_{11}, x_{12}, x_{13}\}] = \{x_2, x_8\},$$
$$\mathfrak{T}_3(P_W) = [\{x_2, x_8\} \cup x_1] - \{x_2, x_8\} = x_1.$$

W rozpatrywanym przykładzie w pierwszym kroku produkcja w toku obejmuje jeden podzespół $x_5$, w drugim kroku — dwa podzespoły, $x_2$ oraz $x_8$, w trzecim zaś — wyrób końcowy $x_1$.

*Ćwiczenie*

Podać wyroby w toku dla każdego kroku produkcji wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 25, przyjmując różne procesy produkcyjne tego wyrobu.

### 2.3.2. *Wartość produkcji w toku*

Przez wartość produkcji w toku w *i*-tym kroku produkcji będziemy rozumieli wartość podzespołów wyprodukowanych w *i*-tym kroku produkcji.

Oznaczmy przez $U_i(P_W)$ wartość produkcji w toku w kroku $i$. Wartość produkcji w toku możemy określić indukcyjnie w następujący sposób:

$$(1) \quad \begin{aligned} U_1(P_W) &= U[\beta^*(\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1)] + C_1 K(t_1), \\ U_{i+1}(P_W) &= U_i(P_W) + C_{i+1} K(t_{i+1}) + D_{i+1}(P_W), \end{aligned}$$

gdzie:

$U(X)$ — suma wartości elementów należących do $X$,

$D_i(P_W)$ — wartość detali zużytych w montażu w kroku $t_i$.[13]

[13] $D_i(P_W)$ jest więc wartością wyrobów należących do zbioru

$$D(W) \cap \beta^*(\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i),$$

gdzie: $D(W)$ jest zbiorem wszystkich detali wyrobu $W$.



Przyjmując, że współczynnik $C_i$ jest jednakowy dla wszystkich kroków, wzór (1) możemy napisać w prostszej postaci

$$(2) \quad U_i(P_W) = U[\beta^*(\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1)] + C \sum_{j=1}^{i} K(t_j) + \sum_{j=1}^{i} D_j(P_W) = D_i^*(P_W) + C \sum_{j=1}^{i} K(t_j),$$

gdzie:

$$D_i^*(P_W) = U[\beta^*(\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1)] + \sum_{j=1}^{i} D_j(P_W)$$

oznacza koszt wszystkich detali, które zostały użyte we wszystkich krokach produkcji aż do kroku $t_i$ włącznie.

Wartość produkcji w toku w kroku $t_i$ jest więc sumą kosztów materiałów, które zostały użyte do montażu wszystkich podzespołów wykonanych w $i$ krokach procesu produkcyjnego, zwiększoną o koszty wykonania i operacji, pomnożone przez współczynnik zysku operacji.

## 2.4. PRZEPŁYW MATERIAŁÓW W PROCESIE PRODUKCYJNYM

W rozdziale tym będziemy rozpatrywać produkcję, w której powstają braki nienaprawialne. Każda operacja procesu może być wykonana poprawnie bądź niepoprawnie. Zakładamy, że każda operacja podlega kontroli technicznej, w wyniku której montowany podzespół może być dopuszczony do dalszej produkcji, może być odrzucony, może wreszcie być skierowany do poprawienia. Odrzucony podzespół nazwiemy *brakiem nienaprawialnym*. Z powodu powstawania braków tylko część wydanych do produkcji materiałów wchodzi do wyrobów końcowych, część natomiast zostaje stracona w momencie odrzucenia podzespołów przez kontrolę techniczną.

Zajmiemy się zagadnieniem, jak kształtuje się przepływ materiałów wydanych do produkcji w zależności od wielkości odrzutów poszczególnych podzespołów produkowanego wyrobu.

W procesie produkcyjnym oprócz operacji montażu występują także operacje technologiczne, takie jak skrawanie, cięcie itp., mające wpływ na przepływ materiałów, jednakże dla uproszczenia nie będziemy się nimi żajmować, tym bardziej że z interesującego nas punktu widzenia nie mają one zasadniczego znaczenia.

Zakładamy, że po każdej operacji montażu kontrolą techniczna sprawdza, czy operacja ta została poprawnie wykonana i w przypadku wadliwego wykonania podzespół zostaje skierowany do poprawienia bądź odrzucony.

Jeżeli dla ustalonej partii $n$ jednakowych wyrobów znamy liczbę ostatecznie odrzuconych podzespołów na każdym stanowisku kontrolnym, to łatwo można obliczyć, jaka część każdego materiału weszła do partii wyrobów końcowych, jaka została odrzucona i jaka część wróciła do magazynu w postaci podzespołów nie wykorzystanych w produkcji.

Dla uproszczenia będziemy rozważali zagadnienie w dwu etapach. Najpierw rozważymy prostszy przypadek, kiedy każdy detal wyrobu jest wykonany z innego materiału, a następnie zajmiemy się przypadkiem, kiedy ten sam materiał może być użyty do wykonania wielu detali tego samego wyrobu.

### 2.4.1. *Wielkość przepływu materiałów*

*Przepływem bezwzględnym materiałów w procesie produkcyjnym* $P_W$ będziemy nazywali ilość materiałów, która weszła do partii $n'$ wyprodukowanych wyrobów końcowych w procesie $P_W$.



Niech $n$ będzie planowaną wielkością partii wyrobu $W$. Założymy, że wszystkie detale wyrobu $W$ są wykonywane z różnych materiałów. Przyjmiemy, że magazyn wydał materiał potrzebny do wykonania wszystkich detali dla całej partii $n$ sztuk wyrobu $W$.

Liczba wyprodukowanych z tego materiału wyrobów niech będzie $n'$. Oczywiście $n' \leqslant n$, gdyż niektóre podzespoły mogą być wykonane wadliwie i odrzucone przez kontrolę techniczną.

Tak więc, część materiałów wydanych przez magazyn wchodzi do wyprodukowanej partii wyrobów, część wraca do magazynu w postaci nie wykorzystanych podzespołów, część zaś jest stracona na skutek braków nienaprawialnych.

Wprowadzimy funkcję kontroli $\underline{k}$: $C(W) \to N$, ($N$ — liczby naturalne 0, 1, 2, ...) przyporządkowującą każdemu podzespołowi $x$ wyrobu $W$ liczbę naturalną $\underline{k}(x) \geqslant 0$ (przy czym $\underline{k}(x) = 0$, jeżeli $x \in D(W)$) mówiącą, ile egzemplarzy podzespołu $x$ zostało ostatecznie odrzuconych (wybrakowanych) przez kontrolę techniczną[14] z partii $n$ wyrobów.

$C(W)$ oznacza zbiór wszystkich części wyrobu $W$, zaś $D(W)$ — zbiór wszystkich detali wyrobu $W$.

Określimy teraz funkcję przepływu $\Pi$: $C(W) \to N$, która każdej części wyrobu $W$ przyporządkowuje liczbę naturalną zwaną *przepływem tej części*.

Funkcję przepływu określimy następująco:

$$\Pi(x) = \begin{cases} n, & \text{jeżeli } x \in D(W) \\ \min\,[\Pi(x_1), \Pi(x_2), \ldots, \Pi(x_s)] - \underline{k}(x), \\ \quad \text{jeżeli } x \in P(W), \end{cases} \tag{1}$$

gdzie:

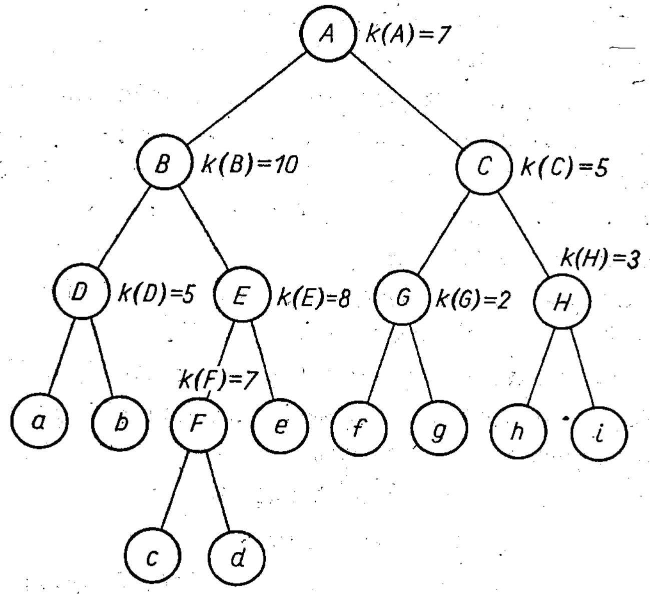
$\beta(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$,
$D(W)$ — zbiór wszystkich detali wyrobu $W$,
$P(W)$ — zbiór wszystkich podzespołów wyrobu $W$,

[14] Zakładamy, że każdy podzespół jest sprawdzany przez kontrolę techniczną.

$n$ — wielkość partii, na której wykonanie magazyn wydał materiał.

Oczywiście wielkość przepływu dla wyrobu końcowego ($\Pi(W)$) jest liczbą wyrobów, które mogą być wyprodukowane przy zadanej funkcji $\underline{k}$.

Wzór (1) mówi, że przepływ podzespołu $x$ jest taki sam, jak najmniejszy przepływ jego bezpośrednich składników, pomniejszony o liczbę wyrobów $x$ odrzuconych przez kontrolę techniczną. Sprawa ta jest oczywista i nie wymaga komentarza.




*Rys. 26*

*Przykład.* Załóżmy, że wydano materiał na wykonanie $n = 100$ sztuk wyrobu, którego drzewo pokazane jest na rys. 26. Poniżej podano wartości funkcji $\underline{k}(x)$ dla podzespołów, tj. liczby sztuk podzespołów odrzuconych z partii przez kontrolę techniczną



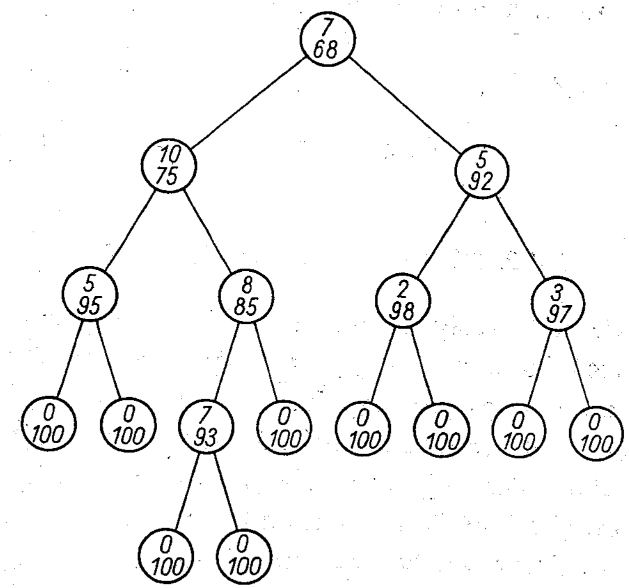
| $x$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{k}(x)$ | 7 | 10 | 5 | 5 | 8 | 7 | 2 | 3 |

Dla wszystkich detali $\underline{k}(x) = 0$.

Funkcja przepływu będzie więc miała następujące wartości:

$$\Pi(H) = \min\,(\Pi(h),\ \Pi(i))\ -\underline{k}(H) = 97,$$
$$\Pi(G) = \min\,(\Pi(f),\ \Pi(g))\ -\underline{k}(G) = 98,$$
$$\Pi(C) = \min\,(\Pi(G),\ \Pi(F))-\underline{k}(C) = 92,$$
$$\Pi(F) = \min\,(\Pi(c),\ \Pi(d))\ -\underline{k}(F) = 93,$$
$$\Pi(E) = \min\,(\Pi(F),\ \Pi(e))\ -\underline{k}(E) = 85,$$
$$\Pi(D) = \min\,(\Pi(a),\ \Pi(b))\ -\underline{k}(D) = 95,$$
$$\Pi(B) = \min\,(\Pi(D),\ \Pi(C))-\underline{k}(B) = 75.$$
$$\Pi(A) = \min\,(\Pi(B),\ \Pi(C))-\underline{k}(A) = 68,$$

A więc przy podanych liczbach braków każdego podzespołu można wyprodukować $n' = \Pi(A) = 68$ wyrobów końcowych.




*Rys. 27*

Dla lepszego zorientowania się w przebiegu tego obliczenia na rys. 27 podano drzewo oraz przyporządkowane wartości funkcji $\Pi(x)$, $\underline{k}(x)$. Przy każdym rozgałęzieniu u góry podano wartość funkcji $\underline{k}$ (liczbę odrzuconych podzespołów), a niżej wartość funkcji $\Pi$ (liczbę wyprodukowanych przedmiotów). Z rysunku łatwo się zorientować, w jaki sposób należy wykonać obliczenie.

Znając liczbę wyprodukowanych wyrobów końcowych $n' = \Pi(W)$, można obliczyć, ile materiału wydanego na wyprodukowanie planowanej partii wyrobu weszło do partii rzeczywiście wykonanej. Wystarczy po prostu liczbę $n'$ pomnożyć przez wagę lub cenę materiału wydanego na każdy detal wyrobu.

*Ćwiczenie*

Obliczyć przepływ materiałów dla wyrobu, którego drzewo przedstawiono na rys. 26, zakładając, że $n = 150$ oraz funkcja kontroli $\underline{k}$ ma wartości podane w tabelce niżej:

| $x$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{k}(x)$ | 2 | 5 | 4 | 1 | 2 | 7 | 9 | 3 |

### 2.4.2. *Wielkość strat materiałowych*

Wszystkie podzespoły wykonane wadliwie i odrzucone przez kontrolę techniczną powodują stratę tych materiałów, które wchodzą do danego podzespołu. Aby więc obliczyć straty jakiegoś materiału (przy założeniu, że każdy detal jest wykonany z innego materiału), wystarczy zsumować wartości funkcji $\underline{k}$ wzdłuż drogi od detalu do wyrobu końcowego — na drzewie wyrobu. Będziemy wtedy bowiem wiedzieli, ile razy został interesujący nas detal odrzucony przez kontrolę techniczną.



Wprowadzimy więc funkcję strat $\Delta : D(W) \to N$, która każdemu detalowi wyrobu $W$ przyporządkowuje liczbę naturalną, mówiącą ile egzemplarzy tego detalu zostało odrzucone przez kontrolę techniczną z planowanej partii $n$ wyrobów.

Niech $x$ będzie detalem wyrobu $W$. Przez $\delta(x)$ będziemy rozumieli ciąg

$$x_0, x_1, \ldots, x_r,$$

taki że

$x_0 = x$, $x_r = W$ oraz dla każdego $i$ $(0 \leqslant i < r)$ $S(x_i, x_{i+1})$, tzn. każdy element ciągu $x_i$ (z wyjątkiem pierwszego) jest bezpośrednim składnikiem $x_{i+1}$. Ciąg $\delta(x)$ będziemy nazywali drogą z $x$.

Możemy teraz określić funkcję strat $\Delta$.

$$\Delta(x) = \sum_{y \in \delta(x)} \underline{k}(y), \tag{1}$$

gdzie suma jest rozciągnięta na całą drogę $\delta(x)$ (tzn. na wszystkie części wyrobu $W$ leżące na drodze z $x$).

Na przykład straty materiału, z którego wykonany jest detal $c$ wyrobu pokazanego na rys. 26, będą wynosiły

$$\Delta(d) = \underline{k}(F)+\underline{k}(E)+\underline{k}(B)+\underline{k}(A) = 32.$$

Oznacza to, że 32 egzemplarze detalu $d$ zostały odrzucone przez kontrolę techniczną.

Podobnie możemy obliczyć straty pozostałych materiałów. Oto wyniki obliczeń:

| $x$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta(x)$ | 22 | 22 | 32 | 32 | 25 | 15 | 15 | 15 | 15 |

Jeżeli chcemy obliczyć straty tylko jednego materiału, wygodnie jest posługiwać się wzorem (1).

Mogą nas jednak interesować straty wszystkich materiałów wchodzących do produkcji; wtedy zamiast wzoru (1) wygodnie jest przyjąć nieco inny sposób liczenia strat, pozwalający na liczenie wszystkich strat jednocześnie.

Wprowadzimy funkcję $\Delta^* : C(W) \to N$, która częściom wyrobu $W$ przyporządkowywać będzie liczby naturalne w następujący sposób:

(1) $$\Delta^*(W) = \underline{k}(W),$$

(2) $$\Delta^*(x) = \Delta^*(y)+\underline{k}(x),$$

gdzie $S(x, y)$, tj. $x$ jest bezpośrednim składnikiem $y$.

Oczywiście wartości funkcji $\Delta$ oraz $\Delta^*$ dla $x \in D(W)$ są jednakowe.

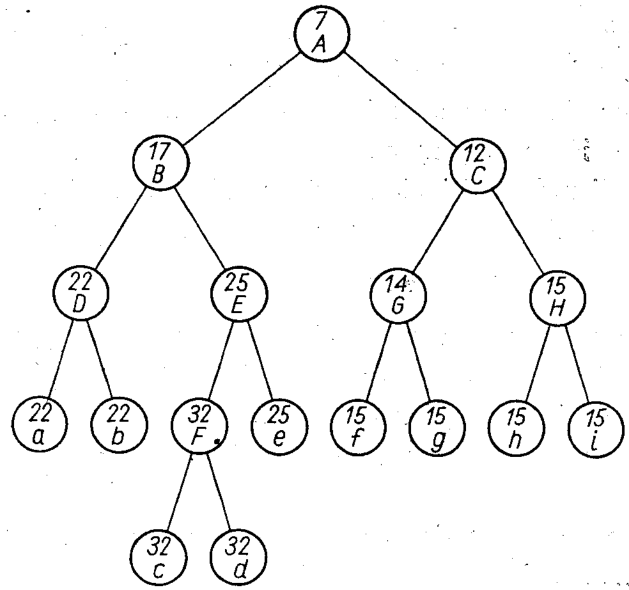
*Przykład.* Dla wyrobu, którego drzewo przedstawiono na rys. 26, liczenie strat materiałów będzie przebiegać następująco:

$$\begin{aligned}
\Delta^*(A) &= \underline{k}(A) = 7,\\
\Delta^*(B) &= \Delta^*(A)+\underline{k}(B) = 7+10 = 17,\\
\Delta^*(C) &= \Delta^*(A)+\underline{k}(C) = 7+5 = 12,\\
\Delta^*(D) &= \Delta^*(B)+\underline{k}(D) = 17+5 = 22,\\
\Delta^*(a) &= \Delta^*(b) = \Delta^*(D)+\underline{k}(a) = 22+0 = 22,\\
\Delta^*(E) &= \Delta^*(B)+\underline{k}(E) = 17+8 = 25,\\
\Delta^*(e) &= \Delta^*(E)+\underline{k}(e) = 25+0 = 25,\\
\Delta^*(F) &= \Delta^*(E)+\underline{k}(F) = 25+7 = 32,\\
\Delta^*(c) &= \Delta^*(d) = \Delta^*(F)+\underline{k}(c) = 32+0 = 32,\\
\Delta^*(G) &= \Delta^*(C)+\underline{k}(G) = 12+2 = 14,\\
\Delta^*(H) &= \Delta^*(C)+\underline{k}(H) = 12+3 = 15,\\
\Delta^*(f) &= \Delta^*(g) = \Delta^*(G)+\underline{k}(f) = 14+0 = 14,\\
\Delta^*(h) &= \Delta^*(i) = \Delta^*(H)+\underline{k}(h) = 15+0 = 15.
\end{aligned}$$

Przebieg obliczenia pokazany jest na rys. 28.

Przypominamy, że aby otrzymać wielkości strat rzeczywistych mierzone w kilogramach czy złotych, należy obliczone straty jednostkowe pomnożyć przez wagę bądź cenę interesującego nas materiału.






*Rys. 28*

*Ćwiczenie*

Podać straty materiałów dla wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 26, przyjmując następującą funkcję kontroli:

| $x$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{k}(x)$ | 2 | 7 | 3 | 1 | 8 | 2 | 5 | 6 |

### 2.4.3. *Wielkość zwrotów materiałów*

Na skutek wadliwego wykonania niektórych podzespołów i odrzucenia ich przez kontrolę techniczną, nie wszystkie poprawnie wykonane podzespoły mogą być wykorzystane w produkcji. Jeżeli na przykład jakiś podzespół składa się z dwu bezpośrednich składników, z których jednego jest 20, a drugiego 15 jednostek, to z tej liczby składników możemy zmontować co najwyżej 15 podzespołów, 5 zaś egzemplarzy pierwszego składnika bezpośredniego nie możemy wykorzystać i musimy zwrócić do magazynu.

Aby obliczyć, ile i jakich podzespołów nie można wykorzystać w produkcji, wprowadzimy funkcję zwrotów części

$$\underline{h} : C(W) \to N,$$

która każdej części wyrobu $W$ przypisuje liczbę naturalną mówiącą, ile egzemplarzy tej części nie może być wykorzystane w produkcji i musi być zwrócone do magazynu do ewentualnego wykorzystania przy wykonywaniu następnej partii wyrobów.

Niech $x$ będzie podzespołem o składnikach bezpośrednich $x_1, x_2, \ldots, x_s$, tj.

$$\beta(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}.$$

Oznaczmy przez min $\beta(x)$

$$\min\{\Pi(x_1), \Pi(x_2), \ldots, \Pi(x_s)\}.$$

Wobec tego, że jeżeli mamy $\Pi(x_1)$ części $x_1$, $\Pi(x_2)$ części $x_2, \ldots, \Pi(x_s)$ części $x_s$, to możemy z nich zmontować min $\beta(x)$ podzespołów $x$, więc różnice

$$\begin{gathered}\Pi(x_1) - \min\beta(x)\\ \Pi(x_2) - \min\beta(x)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Pi(x_s) - \min\beta(x)\end{gathered}$$

musimy zwrócić do magazynu.

Funkcja zwrotów części $\underline{h}$ będzie zatem określona następująco:

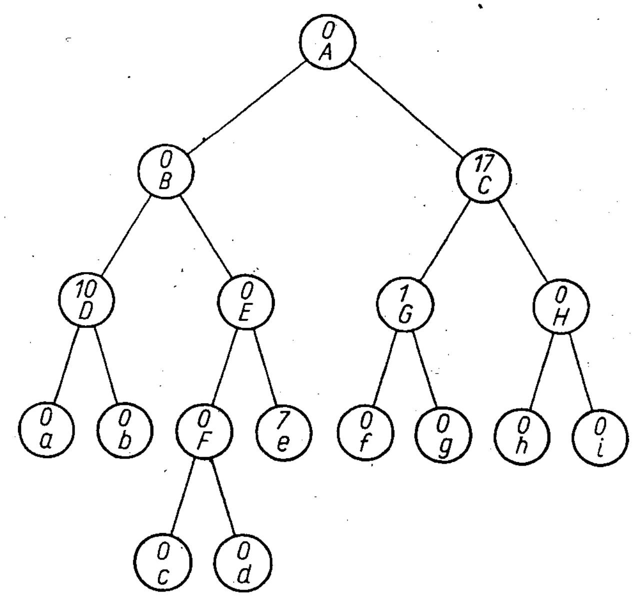
$$(1) \qquad \underline{h}(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \text{ jest wyrobem końcowym,} \\ \Pi(x) - \min\beta(y), & \text{jeżeli } x \text{ nie jest wyrobem końcowym i } x \text{ jest bezpośrednim składnikiem } y. \end{cases}$$



*Przykład.* Znając wartości funkcji $\Pi$ dla wszystkich części wyrobu, którego drzewo przedstawiono na rys. 26, funkcję zwrotów części obliczymy w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
&\underline{h}(A) = 0,\\
&\underline{h}(B) = \Pi(B) - \min\beta(A) = 0,\\
&\underline{h}(C) = \Pi(C) - \min\beta(A) = 92-75 = 17,\\
&\underline{h}(D) = \Pi(D) - \min\beta(B) = 95-85 = 10,\\
&\underline{h}(E) = \Pi(E) - \min\beta(B) = 85-85 = 0,\\
&\underline{h}(G) = \Pi(G) - \min\beta(C) = 98-97 = 1,\\
&\underline{h}(F) = \Pi(F) - \min\beta(E) = 93-93 = 0,\\
&\underline{h}(a) = \underline{h}(b) = \Pi(a) - \min\beta(D) = 100-100 = 0,\\
&\underline{h}(c) = \underline{h}(d) = \Pi(c) - \min\beta(F) = 100-100 = 0,\\
&\underline{h}(e) = \Pi(e) - \min\beta(E) = 100-93 = 7,\\
&\underline{h}(f) = \underline{h}(g) = \Pi(G) - \min\beta(G) = 100-100 = 0,\\
&\underline{h}(h) = \underline{h}(i) = \Pi(H) - \min\beta(H) = 100-100 = 0.
\end{aligned}$$

Wartość funkcji zwrotów znajdzie Czytelnik na rys. 29.




*Rys. 29*

Można już teraz łatwo określić funkcję zwrotów detali $\Gamma : D(W) \to N$, która informuje, ile każdego detalu zostało zwrócone do magazynu.

$$\Gamma(x) = \sum_{y \in \delta(x)} \underline{h}(y), \tag{2}$$

gdzie suma jest rozciągnięta na całą drogę $\delta(x)$ (tzn. na wszystkie części należące do drogi z $x$), zaś $x \in D(W)$.

*Przykład.* Dla wyrobu, którego drzewo przedstawia rys. 26, zwroty poszczególnych detali będą następujące:

$$\begin{aligned}
\Gamma(a) &= \underline{h}(a)+\underline{h}(D)+\underline{h}(B)+\underline{h}(A) = 10,\\
\Gamma(b) &= \underline{h}(b)+\underline{h}(D)+\underline{h}(B)+\underline{h}(A) = 10,\\
\Gamma(c) &= \underline{h}(c)+\underline{h}(F)+\underline{h}(E)+\underline{h}(B)+\underline{h}(A) = 0,\\
\Gamma(d) &= \underline{h}(d)+\underline{h}(F)+\underline{h}(E)+\underline{h}(B)+\underline{h}(B)+\underline{h}(A) = 0,\\
\Gamma(e) &= \underline{h}(e)+\underline{h}(E)+\underline{h}(B)+\underline{h}(A) = 7,\\
\Gamma(f) &= \underline{h}(f)+\underline{h}(G)+\underline{h}(C)+\underline{h}(A) = 18,\\
\Gamma(g) &= \underline{h}(g)+\underline{h}(G)+\underline{h}(C)+\underline{h}(A) = 18,\\
\Gamma(h) &= \underline{h}(h)+\underline{h}(A)+\underline{h}(C)+\underline{h}(A) = 17,\\
\Gamma(i) &= \underline{h}(i)+\underline{h}(H)+\underline{h}(C)+\underline{h}(A) = 17.
\end{aligned}$$

Chcąc liczyć od razu wartość zwrotów dla wszystkich materiałów, wygodnie jest wprowadzić funkcję zwrotów $\Gamma^*$ określoną następująco:

$$\Gamma^*(W) = \underline{h}(W), \tag{1}$$
$$\Gamma^*(x) = \Gamma^*(y)+\underline{h}(x), \tag{2}$$

gdzie $x$ jest bezpośrednim składnikiem $y$.

Przykład obliczenia zwrotów dla wyrobu opisywanego na rys. 26 według wzoru (3) podany jest niżej:

$$\begin{aligned}
\Gamma^*(A) &= 0,\\
\Gamma^*(B) &= \Gamma^*(A)+\underline{h}(B) = 0,\\
\Gamma^*(D) &= \Gamma^*(B)+\underline{h}(D) = 10,\\
\Gamma^*(a) &= \Gamma^*(D)+\underline{h}(a) = 10,\\
\Gamma^*(b) &= \Gamma^*(d)+\underline{h}(b) = 10,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\Gamma^*(E) &= \Gamma^*(B)+\underline{h}(E) = 0,\\
\Gamma^*(P) &= \Gamma^*(E)+\underline{h}(F) = 0,\\
\Gamma^*(c) &= \Gamma^*(F)+\underline{h}(c) = 0,\\
\Gamma^*(d) &= \Gamma^*(F)+\underline{h}(d) = 0,\\
\Gamma^*(e) &= \Gamma^*(E)+\underline{h}(e) = 7,\\
\Gamma^*(C) &= \Gamma^*(A)+\underline{h}(C) = 17,\\
\Gamma^*(G) &= \Gamma^*(c)+\underline{h}(G) = 18,\\
\Gamma^*(f) &= \Gamma^*(G)+\underline{h}(f) = 18,\\
\Gamma^*(g) &= \Gamma^*(C)+\underline{h}(g) = 18,\\
\Gamma^*(H) &= \Gamma^*(C)+\underline{h}(H) = 17,\\
\Gamma^*(h) &= \Gamma^*(H)+\underline{h}(h) = 17,\\
\Gamma^*(i) &= \Gamma^*(H)+\underline{h}(i) = 17.
\end{aligned}$$

Oczywiście dla każdego detalu $x$ wyrobu $W$ zachodzi równość

$$\Pi(x)+\Delta(x)+\Gamma(x) = n,$$

gdzie $n$ liczba wydanych przez magazyn detali.

Wzór ten może stanowić podstawę kontroli prawidłowości przepływu materiałów.

*Ćwiczenia*

1. Przyjmując, że funkcja $\underline{k}$ przybiera wartości podane w zadaniu z paragrafu 2.4.2 podać liczbę zwrotów detali (materiałów) do magazynu dla wyrobu, którego drzewo podano na rys. 26.

### *2.4.4. Przypadek uogólniony*

Podane w poprzednich paragrafach wzory były słuszne w przypadku, gdy każdy detal wyrobu był wykonany z innego materiału.

Podane wzory bardzo łatwo jednak zmodyfikować tak, aby można je było stosować wówczas, gdy mamy do czynienia z wyrobem, którego różne detale wykonywane są z tego samego materiału. Możemy wprowadzić funkcję $\mu : D(W) \to M$, gdzie $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$ jest zbiorem wszystkich materiałów wchodzących w skład wyrobu $W$. Funkcja $\mu$ mówi więc, z jakiego materiału wykonany jest każdy detal wyrobu.

W takim przypadku najpierw wykonujemy obliczenie funkcji $\Delta$, $\Pi$, $\Gamma$, tak jakby wszystkie detale były wykonane z różnych materiałów, a następnie wartości funkcji $\Pi$, $\Delta$, $h$ dla detali z tych samych materiałów sumujemy mnożąc je uprzednio przez odpowiednie współczynniki wyrażające wzajemny stosunek wagi (względnie ceny) detali wykonanych z jednakowych materiałów.

Oznaczmy przez $D_i(W)$ zbiór tych wszystkich detali wyrobu $W$, które są wykonane z materiału $m_i$. Wtedy ilość materiału $m_i$, która weszła do produktów końcowych, będzie wynosić

$$\mathfrak{P}(m_i) = \Pi(W) \sum_{x_j \in D_i(W)} \mathfrak{G}(x_j), \tag{1}$$

gdzie:

$\mathfrak{P}(m_i)$ — ilość materiału $m_i$ znajdująca się w wyrobach końcowych,

$\mathfrak{G}(x_j)$ — waga (cena) detalu $x_j$,

suma zaś jest rozciągnięta na wszystkie detale z materiału $m_i$.

Wielkość strat materiału $m_i$ wyrażamy wzorem

$$\mathfrak{S}(m_i) = \sum_{x_j \in D_i(W)} \mathfrak{G}(x_j)\Delta(x_j), \tag{2}$$

gdzie suma jest rozciągnięta na wszystkie detale wykonane z materiału $m_i$.

Podobnie wielkość zwrotów materiału $m_i$ wyrażamy zależnością

$$\mathfrak{Z}(m_i) = \sum_{x_j \in D_i(W)} \mathfrak{G}(x_j)\Gamma(x_j), \tag{3}$$



gdzie suma jest rozciągnięta na wszystkie detale wykonane z materiału $m_i$.

Oczywiście dla każdego materiału $m_i$ musi zachodzić:

$$\mathfrak{P}(m_i) + \mathfrak{Z}(m_i) + \mathfrak{S}(m_i) = n \sum \mathfrak{G}_i, \tag{4}$$

gdzie $\sum \mathfrak{G}_i$ — waga wszystkich detali wyrobu $W$ wykonanych z materiału $m_i$, zaś $m$ planowana wielkość partii wyrobów $W$.

*Przykład.* Przyjmijmy, że w wyrobie omawianym w naszych przykładach (rys. 26) detale $a$ oraz $e$ wykonane są z materiału $m_1$, detale $c$ oraz $g$ z materiału $m_2$, pozostałe zaś detale — każdy z innego materiału.

Założmy ponadto, że

$$\mathfrak{G}(a) = 1 \text{ kg}, \qquad \mathfrak{G}(e) = 0{,}5 \text{ kg},$$
$$\mathfrak{G}(c) = 0{,}75 \text{ kg}, \qquad \mathfrak{G}(g) = 0{,}25 \text{ kg}.$$

Przyjmując jak poprzednio przepływ $\Pi(W) = 68$ mamy

$$\mathfrak{P}(m_1) = (1+0{,}5) \text{ kg} \cdot 68 = 102 \text{ kg},$$
$$\mathfrak{P}(m_2) = (0{,}75+0{,}25) \text{ kg} \cdot 68 = 68 \text{ kg}.$$

A więc 102 kg materiału $m_1$ oraz 68 kg materiału $m_2$ weszło do wyprodukowanej partii 68 wyrobów.

Ponieważ straty detali wynoszą odpowiednio: $\Delta(a) = 22$, $\Delta(e) = 25$ oraz $\Delta(c) = 32$, $\Delta(g) = 14$, więc

$$\mathfrak{S}(m_1) = 1 \text{ kg} \cdot 22 + 0{,}5 \text{ kg} \cdot 25 = 34{,}5 \text{ kg},$$

natomiast

$$\mathfrak{S}(m_2) = 0{,}75 \text{ kg} \cdot 32 + 0{,}25 \text{ kg} \cdot 14 = 27{,}5 \text{ kg},$$

co oznacza, że materiału $m_1$ stracono 34,5 kg, a materiału $m_2$ — 27,5 kg.

Podobnie obliczymy zwroty materiałów $m_1$ i $m_2$.

Ponieważ

$$\Gamma(a) = 10, \quad \Gamma(e) = 7,$$
$$\Gamma(c) = 0, \quad \Gamma(g) = 18,$$

otrzymamy

$$\mathfrak{Z}(m_1) = 1\ \text{kg} \cdot 10 + 0{,}5\ \text{kg} \cdot 7 = 13{,}5\ \text{kg},$$
$$\mathfrak{Z}(m_2) = 0{,}75\ \text{kg} \cdot 0 + 0{,}25\ \text{kg} \cdot 18 = 4{,}5\ \text{kg}.$$

Zwroty materiałów $m_1$ i $m_2$ w postaci podzespołów nie wykorzystanych w produkcji wynoszą zatem: 13,5 kg — materiału $m_1$, 4,5 kg — materiału $m_2$.

Oczywiście zachodzić musi zbilansowanie materiałów zgodnie z wzorem (4).

Materiału $m_1$ wydano 100 (1+0,5) kg = 150 kg, materiału $m_2$ zaś — 100 (0,75+0,25) kg, a zatem dla materiału $m_1$ mamy

$$150\ \text{kg} = 102\ \text{kg} + 34{,}5\ \text{kg} + 13{,}5\ \text{kg}$$

i podobnie dla materiału $m_2$

$$100\ \text{kg} = 68\ \text{kg} + 27{,}5\ \text{kg} + 4{,}5\ \text{kg}.$$

Pozostałe detale są wykonane każdy z innego materiału. Dla nich więc obliczenie przeprowadzamy w sposób podany w paragrafie 2.4.3. Gdybyśmy chcieli otrzymać ilość materiałów w kilogramach, należałoby jedynie wszystkie wartości funkcji $\Pi(x)$, $\Delta(x)$, $\Gamma(x)$ pomnożyć przez wagę $\mathfrak{C}(x)$ detali $x$.

*Ćwiczenie*

Obliczyć przepływ, zwroty i straty materiałów dla wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 26, przyjmując, że detale $a, f, h$ są wykonane z materiału $m_1$, detale $b, g, d$ — z materiału $m_2$ i że

$$\mathfrak{C}(a) = 5\ \text{kg}, \quad \mathfrak{C}(f) = 2\ \text{kg},$$
$$\mathfrak{C}(b) = 1\ \text{kg}, \quad \mathfrak{C}(h) = 3\ \text{kg},$$
$$\mathfrak{C}(d) = 0{,}5\ \text{kg}, \quad \mathfrak{C}(g) = 1\ \text{kg}.$$



### 2.4.5. *Algorytmy obliczeń*

Obliczanie wartości funkcji Π, Δ, Γ do tej pory wykonywaliśmy na podstawie drzewa wyrobu. Dla obliczeń dotyczących wyrobów o nieskomplikowanej budowie metoda taka jest w zupełności wystarczająca. Jednakże wówczas, gdy mamy do czynienia z wyrobami skomplikowanymi podany sposób obliczania przepływu materiałów byłby niezmiernie uciążliwy, toteż przy obliczeniach konieczne jest stosowanie maszyn matematycznych, a wtedy nie możemy posługiwać się drzewem wyrobu, lecz listą części.

Dla maszynowego obliczania funkcji $\Pi(x)$ wygodny jest algorytm, który niżej omówimy.

W pamięci maszyny matematycznej zawarta jest lista części wyrobu oraz wartości funkcji $\underline{k}(x)$. W tejże pamięci wyróżniamy również pewien fragment, który będziemy nazywali *stosem*. Czytamy kolejne pozycje listy części od dołu i postępujemy jak niżej:

1) jeżeli na odczytanej pozycji znajduje się detal $x$, to wpisujemy na wierzchu stosu liczbę $n$ (tj. planowaną wielkość partii);

2) jeżeli na czytanej pozycji znajduje się podzespół $y$, taki że

$$\beta(y) = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\},$$

to wykonujemy obliczenia

$$\Pi(y) = \min(n_1, n_2, \ldots, n_s) - \underline{k}(y),$$

(gdzie $n_1, n_2, \ldots, n_s$ oznaczają $s$ ostatnich pozycji na stosie) usuwamy ze stosu liczby $n_1, n_2, \ldots, n_s$ i wpisujemy doń wartość $\Pi(y)$.

W ten sposób po jednokrotnym przeczytaniu listy od dołu do góry otrzymamy żądaną wartość $\Pi(W)$.[15]

[15] Podane zasady obliczania wynikają z realizacji formuły Łukasiewicza za pomocą maszyn matematycznych. Zob. Z. Pawlak, *Organizacja maszyn bezadresowych*, Warszawa 1965.

Przebieg obliczeń będzie miał wtedy taką postać:

| Lista części | $\underline{k}(x)$ | Stos | $\Pi(x)$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | 7 | 68 | 68 |
| $B$ | 10 | 92, 75 | 75 |
| $D$ | 5 | 92, 85, 95 | 95 |
| $a$ | 0 | 92, 85, 100, 100 | |
| $b$ | 0 | 92, 85, 100 | |
| $E$ | 8 | 92, 85 | 85 |
| $F$ | 7 | 92, 100, 93 | 93 |
| $c$ | 0 | 92, 100, 100, 100 | |
| $d$ | 0 | 92, 100, 100 | |
| $e$ | 0 | 92, 100 | |
| $C$ | 5 | 92 | |
| $G$ | 2 | 97, 98 | 98 |
| $f$ | 0 | 97, 100, 100 | |
| $g$ | 0 | 97, 100 | |
| $H$ | 3 | 97 | 97 |
| $h$ | 0 | 100, 100 | 100 |
| $i$ | 0 | 100 | 100 |

Obliczanie wartości funkcji strat $\Delta^*(x)$ będzie miało nieco inny charakter, będzie się opierało na czytaniu listy w kierunku odwrotnym niż poprzednio, tj. od góry do dołu. Oto tok postępowania: dla każdej odczytanej pary $x, y$ wartość funkcji $\Delta^*(x)$ obliczamy według wzoru

$$\Delta^*(x) = \Delta^*(y)+\underline{h}(x).$$

Przy przyjętej postaci listy obliczenia nie nastręczają większych trudności. Przebieg ich ilustruje tablica na s. 153.

Wreszcie celem obliczenia wartości funkcji zwrotów $\Gamma$ musimy najpierw obliczyć funkcję pomocniczą $\underline{h}$. Zgodnie z podanym wzorem $\underline{h}(W) = 0$, a dla pozostałych części

$$\underline{h}(x) = \Pi(x)-\min \beta(y),$$

gdzie $x$ jest bezpośrednim składnikiem $y$.



| Lista części | $\underline{k}(x)$ | $\Delta^*(x) = \Delta^*(y)+\underline{k}(x)$ |
|---|---|---|
| $A$ | 7 | 7 |
| $B, A$ | 10 | 17 |
| $D, B$ | 5 | 22 |
| $a, D$ | 0 | 22 |
| $b, B$ | 0 | 22 |
| $E, B$ | 8 | 25 |
| $F, E$ | 7 | 32 |
| $C, F$ | 0 | 32 |
| $d, F$ | 0 | 32 |
| $e, E$ | 0 | 25 |
| $C, A$ | 5 | 12 |
| $G, C$ | 2 | 14 |
| $f, G$ | 0 | 14 |
| $g, G$ | 0 | 14 |
| $H, C$ | 3 | 15 |
| $h, H$ | 0 | 15 |
| $i, H$ | 0 | 15 |

Funkcję tę najwygodniej obliczać przy założeniu jednokrotnego czytania listy części. W liście części obok każdej części $x$ należy wówczas podać część $y$, taką że $x$ jest bezpośrednim składnikiem $y$.

Dla pierwszego symbolu na liście $\underline{h}(x) = 0$. Dalej zaś czytamy z listy kolejno pary symboli $x, y$ i obliczamy

$$\underline{h}(x) = \Pi(x)- \min \beta(y).$$

Dla rozpatrywanego przykładu obliczenie będzie przebiegało następująco:

| Lista części | $\Pi(x)$ | $\underline{h}(x) = \Pi(x)-\min \beta(y)$ |
|---|---|---|
| $A$ | 68 | 0 |
| $B, C$ | 75 | 0 |
| $D, E$ | 95 | 10 |

c.d. tablicy

| Lista części | $\Pi(x)$ | $\underline{h}(x) = \Pi(x) - \min \beta(y)$ |
|---|---|---|
| *a, b* | 100 | 0 |
| *b, a* | 100 | 0 |
| *E, D* | 85 | 0 |
| *F, e* | 93 | 0 |
| *e, F* | 100 | 7 |
| *d, c* | 100 | 0 |
| *c, d* | 100 | 0 |
| *C, B* | 92 | 17 |
| *G, H* | 98 | 1 |
| *f, g* | 100 | 0 |
| *g, f* | 100 | 0 |
| *H, G* | 97 | 0 |
| *h, i* | 100 | 0 |
| *i, h* | 100 | 0 |

Teraz już możemy obliczyć wartość funkcji Γ. Łatwo zauważyć, że przebieg obliczeń będzie podobny jak przy funkcji Δ z tą różnicą, że zamiast funkcją $\underline{k}$ będziemy się posługiwali teraz funkcją $\underline{h}$.

Na zakończenie kilka uwag o sposobie obliczenia funkcji Δ, Γ, Π za pomocą maszyn.

W podanych przykładach stosowaliśmy dla uproszczenia obliczeń aż trzy rodzaje list. Można oczywiście we wszystkich przypadkach stosować listę jednego rodzaju. Możemy na przykład stosować formułę wyrobu zwaną *formułą Łukasiewicza*, wtedy jednak należy wykonać dodatkowe obliczenia, polegające na znalezieniu tych części, które są nam aktualnie potrzebne, a które nie są podane w naszej liście na pozycji obserwowanej. Odnalezienie tych części jest dość proste, obniża jednak znacznie efektywną szybkość liczenia maszyny, w związku z czym lepiej jest podawać przy każdej pozycji listy wszystkie elementy potrzebne do obliczenia funkcji Π, Δ, Γ. Obliczanie tych funkcji



wymaga co najmniej dwukrotnego przeczytania listy części: najpierw od dołu do góry, a potem odwrotnie.

Przy pierwszym czytaniu otrzymamy wartość funkcji Π. Wartości tej funkcji należy zapamiętać dla wszystkich podzespołów, gdyż będą one nam potrzebne do obliczania funkcji Γ.

Czytając listę z góry na dół możemy jednocześnie liczyć wartości funkcji Δ, $\underline{h}$, Γ, tak że po przeczytaniu listy do końca całe obliczenie przepływu zostaje zakończone.

Należy dodać, iż w omawianym przypadku można jeszcze dokonać sprawdzenia bilansu materiałów, nietrudno jest także uwzględnić przypadek, gdy wiele detali wykonywanych jest z identycznego materiału.

### *2.4.6. Zapotrzebowanie na detale*

W poprzednich rozważaniach zakładaliśmy, że mamy daną ilość materiałów wydanych do produkcji (z magazynu) oraz liczbę podzespołów odrzuconych przez kontrolę techniczną i pytaliśmy, ile wyrobów można wyprodukować przy takich założeniach z wydanego materiału.

Ważne jest także zagadnienie odwrotne. Znamy średnią liczbę podzespołów odrzuconych w procesie produkcyjnym i pytamy, ile sztuk każdego detalu należy pobrać z magazynu, aby wyprodukować zadaną liczbę wyrobów końcowych.

Zadanie to jest bardzo proste i różni się nieznacznie od rozpatrywanego w poprzednich paragrafach tego rozdziału. Dla uproszczenia przyjmiemy, że każdy detal produkowanego wyrobu jest wykonany z innego materiału.

Jeżeli znamy prawdopodobieństwo $p(x_i)$ odrzucenia podzespołu $x_i$, to przy danej liczbie $n$ wyrobów, które należy wyprodukować, możemy określić przewidywaną liczbę braków każdego podzespołu, jako $p(x_i) \cdot n$.

Wobec tego, aby wyprodukować $n$ wyrobów przy z góry ustalonych prawdopodobieństwach odrzucenia podzespołów, należy pobrać $N(x)$ detali $x$, przy czym funkcja $N(x)$ określona jest następująco:

$$N(x) = n + n \sum_{x_i \in \delta(x)} p(x_i), \tag{1}$$

gdzie suma jest rozciągnięta na wszystkie podzespoły należące do $\delta(x)$.

*Przykład.* Rozpatrzmy wyrób, którego drzewo pokazano na rys. 26. Wartości funkcji $\underline{k}$, podane na rys. 26, będziemy interpretować jako przewidywaną liczbę wyrobów odrzucanych przez kontrolę techniczną, tj.

$$\underline{k}(x) = p(x)n.$$

Załóżmy, że chcemy wyprodukować $n = 100$ wyrobów i pytamy, ile należy pobrać sztuk każdego elementu z magazynu, przy zadanych wielkościach braków, celem wyprodukowania partii wyrobów o założonej wielkości.

Zgodnie z wzorem (1) otrzymamy:

$$N(a) = N(b) = 100+\underline{k}(A)+\underline{k}(B)+\underline{k}(D) = 122,$$
$$N(c) = N(a) = 100+\underline{k}(F)+\underline{k}(E)+\underline{k}(B)+\underline{k}(A) = 132,$$
$$N(e) = 100+\underline{k}(E)+\underline{k}(B)+\underline{k}(A) = 125,$$
$$N(f) = N(g) = 100+\underline{k}(G)+\underline{k}(C)+\underline{k}(A) = 114,$$
$$N(h) = N(i) = 100+\underline{k}(A)+\underline{k}(C)+\underline{k}(H) = 115.$$

Dla jednoczesnego obliczania zapotrzebowania na wszystkie detale wygodniej jest stosować zamiast wzoru (1) następujący wzór indukcyjny:

$$(2) \quad \begin{array}{ll} 1) & N^*(W) = n+p(W)n, \\ 2) & N^*(x) = N^*(y)+p(x)n, \end{array}$$

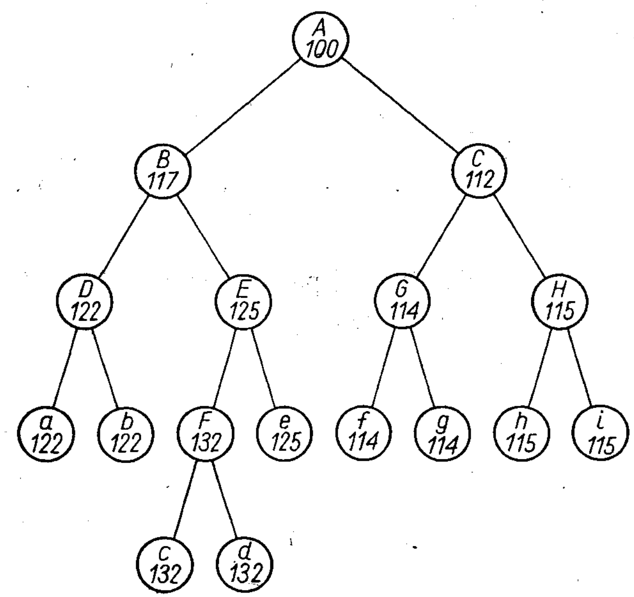
gdzie $x$ jest bezpośrednim składnikiem $y$.



Poniżej podajemy obliczenie rozpatrywanego przykładu według wzoru (2)

$$N^*(A) = n+\underline{k}(A) = 107,$$
$$N^*(B) = N^*(A)+\underline{k}(B) = 117,$$
$$N^*(C) = N^*(A)+\underline{k}(C) = 112,$$
$$N^*(D) = N^*(B)+\underline{k}(D) = 122,$$
$$N^*(a) = N^*(b) = N^*(D)+\underline{k}(a) = 122,$$
$$N^*(E) = N^*(B)+\underline{k}(E) = 125,$$
$$N^*(e) = N^*(E)+\underline{k}(e) = 125,$$
$$N^*(F) = N^*(E)+\underline{k}(F) = 132,$$
$$N^*(c) = N^*(d) = N^*(F)+\underline{k}(c) = 132,$$
$$N^*(G) = N^*(C)+\underline{k}(G) = 114,$$
$$N^*(f) = N^*(g) = N^*(G)+\underline{k}(f) = 114,$$
$$N^*(H) = N^*(C)+\underline{k}(H) = 115,$$
$$N^*(h) = N^*(i) = N^*(H)+\underline{k}(h) = 115.$$

Przebieg tego obliczenia zilustrowany jest na rys. 30.




*Rys. 30*

Zauważmy, że gdybyśmy trafnie przewidzieli liczbę braków każdego podzespołu, to nie będą tu występowały zwroty do magazynu dobrze wykonanych podzespołów, które nie mogą być użyte w produkcji, gdyż dla każdego podzespołu $x$, takiego że $\beta(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$, mamy

$$\Pi(x_1) = \Pi(x_2) = \ldots = \Pi(x_s).$$

Gdyby interesowała nas odpowiedź na pytanie, ile materiałów należy zamówić na wykonanie planowanej partii $n$ wyrobów, łatwo moglibyśmy na podstawie liczby detali obliczyć ciężar lub cenę interesującego nas materiału.

Wielkich trudności nie sprawi również uwzględnienie faktu, że różne detale wyprodukowane są z identycznego materiału.

*Ćwiczenie*

Przyjmij, iż dla wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 26, wielkości prawdopodobieństw występowania braków są następujące:

| $x$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,2 |

natomiast wielkość planowanej partii wyrobów $n = 60$. Oblicz zapotrzebowanie na wszystkie detale.

# 3. ORGANIZACJA PRZEBIEGU PRODUKCJI WYROBU

## 3.1. HARMONOGRAMY OPERACJI

### *3.1.1. Harmonogram analityczny*

W paragrafie tym będziemy się zajmowali następującym zagadnieniem: ustalony jest termin ukończenia wyrobu oraz czasy trwania wszystkich operacji montażu podzespołów tego wyrobu — pytamy o najpóźniejsze terminy rozpoczęcia i zakończenia każdej operacji, tak aby wyrób końcowy został wyprodukowany w określonym terminie.

Uzyskane przy takich założeniach najpóźniejsze terminy rozpoczęcia i zakończenia każdej operacji będziemy nazywać *harmonogramem analitycznym.*

Niech $\tau(x)$ oznacza czas trwania montażu wyrobu[1] $x$ z jego bezpośrednich składników i niech $T_r(x)$, $T_k(x)$ będą odpowiednio terminami rozpoczęcia i zakończenia montażu wyrobu $x$ z jego bezpośrednich składników.

Wtedy oczywiście[2]

(1) $$T_k(x) = T_r(x) + \tau(x).$$

Jeżeli $x$ jest bezpośrednim składnikiem $y$, to zawsze musi zachodzić

(2) $$T_r(y) \geqslant T_k(x).$$

[1] Przypuśćmy, że wielkość $\tau(x)$ jest również określona, gdy $x$ jest detalem. $\tau(x)$ będzie wtedy oznaczać nie czas montażu $x$, lecz czas obróbki detalu $x$. Do tej pory przyjmowaliśmy, że detale nie są poddawane żadnym operacjom, jednakże w tych rozważaniach założenie to pominiemy.

[2] Zakładamy tu, że czas trwania operacji $\tau(x)$ mierzony jest w takich samych jednostkach, w jakich podawane są terminy $T_k(x)$ i $T_r(x)$.

Mając więc zadany termin zakończenia wyrobu końcowego *W* oraz czasy trwania wszystkich operacji montażu podzespołów *W* możemy na podstawie (1) i (2) podać najpóźniejsze terminy rozpoczęcia i zakończenia produkcji każdego podzespołu *W*, tak aby wyrób końcowy *W* został wyprodukowany w ustalonym terminie.

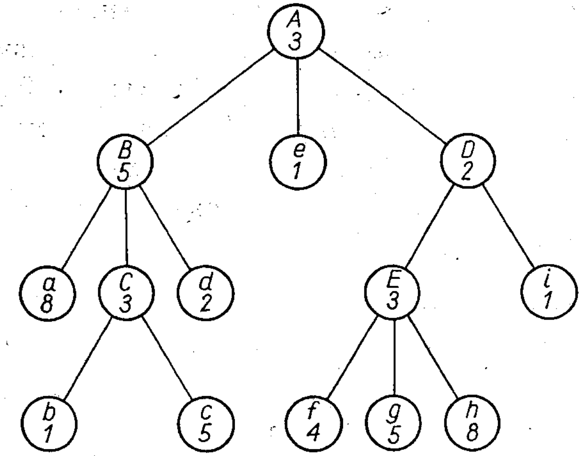
*Przykład.* Rozpatrzmy wyrób, którego drzewo pokazano na rys. 31. Podzespoły tego wyrobu oznaczone są dużymi literami, detale zaś literami małymi. Liczby podane na rysunku oznaczają czasy trwania operacji montażu każdego podzespołu:

| $x$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tau(x)$ | 3 | 5 | 3 | 2 | 3 | 8 | 1 | 5 | 2 | 1 | 4 | 5 | 8 | 1 |

Załóżmy, że żądany termin ukończenia wyrobu końcowego $A$ jest $T_k(A) = 134$. Harmonogram analityczny dla tego wyrobu otrzymamy w następujący sposób:

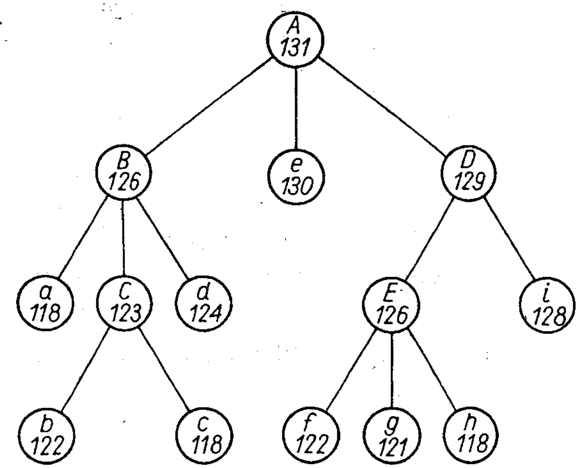
$$\begin{aligned}
T_r(A) &\leqslant T_k(A)-\tau(A) = 134-3 = 131,\\
T_r(B) &\leqslant T_r(A)-\tau(B) = 131-5 = 126,\\
T_r(c) &\leqslant T_r(A)-\tau(c) = 131-1 = 130,\\
T_r(D) &\leqslant T_r(A)-\tau(D) = 131-2 = 129,\\
T_r(a) &\leqslant T_r(B)-\tau(a) = 126-8 = 118,\\
T_r(C) &\leqslant T_r(B)-\tau(C) = 126-3 = 123,\\
T_r(d) &\leqslant T_r(B)-\tau(d) = 126-2 = 124,\\
T_r(E) &\leqslant T_r(D)-\tau(E) = 129-3 = 126,\\
T_r(i) &\leqslant T_r(D)-\tau(i) = 129-1 = 128,\\
T_r(b) &\leqslant T_r(C)-\tau(b) = 123-1 = 122,\\
T_r(c) &\leqslant T_r(C)-\tau(c) = 123-5 = 118,\\
T_r(f) &\leqslant T_r(E)-\tau(f) = 126-4 = 122,\\
T_r(g) &\leqslant T_r(E)-\tau(f) = 126-5 = 121,\\
T_r(h) &\leqslant T_r(E)-\tau(h) = 126-8 = 118.
\end{aligned}$$






*Rys. 31*

Na rysunku 32 podano terminy rozpoczęcia wykonania każdej części. Dla detali można przyjąć, że $\tau(x)$ jest najpóźniejszym terminem dostawy materiału, z którego detal jest wykonywany.




*Rys. 32*

Mając na uwadze obliczanie harmonogramu za pomocą maszyny, algorytm obliczenia wygodnie jest przedstawić w innej postaci wychodząc z pojęcia listy części wyrobu. Ponieważ do obliczeń potrzebna jest znajomość relacji „bezpośredniego składnika", najwygodniejsza będzie tu relacyjna lista części, która przy każdym podzespole $x$ podaje, jakiej części $y$ jest on bezpośrednim składnikiem.

| Numer kroku obliczenia | $x, y$ | $\tau(x)$ | $T_k(x)$ | $T_r(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $A$ | 3 | 134 | 131 |
| 2. | $B\ A$ | 5 | 131 | 126 |
| 3. | $a\ B$ | 8 | 126 | 118 |
| 4. | $C\ B$ | 3 | 126 | 123 |
| 5. | $b\ C$ | 1 | 123 | 122 |
| 6. | $c\ C$ | 5 | 123 | 118 |
| 7. | $d\ B$ | 2 | 126 | 124 |
| 8. | $e\ A$ | 1 | 131 | 130 |
| 9. | $D\ A$ | 2 | 131 | 129 |
| 10. | $E\ D$ | 3 | 129 | 126 |
| 11. | $f\ E$ | 4 | 126 | 122 |
| 12. | $g\ E$ | 5 | 126 | 121 |
| 13. | $h\ E$ | 8 | 126 | 118 |
| 14. | $i\ D$ | 1 | 129 | 128 |

Obliczenia te wykonujemy w następujący sposób: z relacyjnej listy części odczytujemy każdy symbol, poczynając od góry listy, i do każdego z nich wykonujemy obliczenie według wzorów (1), (2). Realizacja tego obliczenia na maszynie jest bardzo prosta.

*Ćwiczenie*

Podać harmonogram dla wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 31, przyjmując, że:



| $x$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tau(x)$ | 2 | 3 | 5 | 7 | 1 | 8 | 9 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 5 | 7 |

oraz $T_k(A) = 68$.

### 3.1.2. *Harmonogram syntetyczny*

Jeśli dane mamy czasy trwania operacji procesu oraz najwcześniejsze terminy dostawy detali (lub materiałów na wykonanie detali), pytamy zaś o najwcześniejszy termin wyprodukowania wyrobu końcowego oraz najwcześniejsze terminy rozpoczęcia i zakończenia wykonywania każdego z podzespołów produkowanego wyrobu — to tak otrzymane terminy będziemy nazywać *harmonogramem syntetycznym.*

Jeżeli $\beta(x) = \{x_1, \dots, x_n\}$, to dla harmonogramu syntetycznego zachodzi oczywiście

$$T_r(x) \geqslant \max\{T_k(x_1), \dots, T_k(x_n)\}, \tag{1}$$

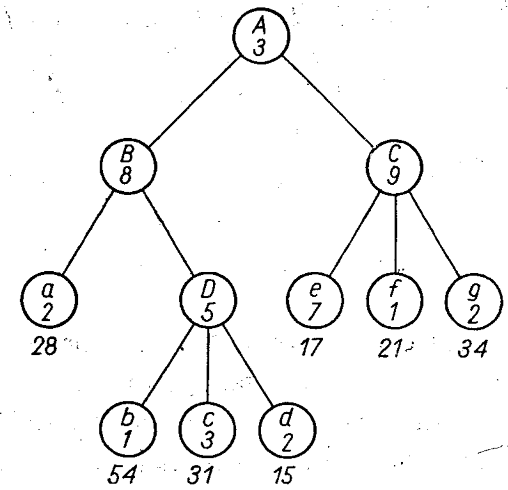
gdzie:
$T_r(x)$ — termin rozpoczęcia wyrobu $x$,
$T_k(y)$ — termin ukończenia wyrobu $y$.

Ponieważ

$$T_k(x) = T_r(x) + \tau(x), \tag{2}$$

więc na podstawie (1) i (2) możemy obliczyć harmonogram syntetyczny dla każdego wyrobu, licząc dla każdej części wyrobu $T_r$ i $T_k$.

*Przykład.* Rozpatrzmy wyrób, którego drzewo znajduje się na rys. 33. Liczby przy częściach oznaczają czasy trwania operacji montażu odpowiedniego podzespołu (lub obróbki detalu).




*Rys. 33*

Załóżmy, że detale (lub materiały na detale) mogą być najwcześniej dostarczone w terminach podanych w poniższej tabelce (terminy te na rys. 33 zamieszczono pod oznaczeniem detali):

| $x$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_r(x)$ | 28 | 54 | 31 | 15 | 17 | 21 | 34 |

Na podstawie (1) i (2) obliczamy harmonogram syntetyczny

$$\begin{aligned}
T_k(b) &= T_r(b)+\tau(b) = 54+1 = 55,\\
T_k(c) &= T_r(c)+\tau(c) = 31+3 = 34,\\
T_k(d) &= T_r(d)+\tau(d) = 15+2 = 17,\\
T_r(D) &= \max\,[T_k(b),\, T_k(c),\, T_k(d)] = 55,\\
T_k(D) &= T_r(D)+\tau(D) = 55+5 = 60,\\
T_k(a) &= T_r(a)+\tau(a) = 28+2 = 30,\\
T_r(B) &= \max\,[T_k(a),\, T_k(D)] = 60,\\
T_k(B) &= T_r(B)+\tau(B) = 60+8 = 68,\\
T_k(e) &= T_r(e)+\tau(e) = 17+7 = 24,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
T_k(f) &= T_r(f)+\tau(f) = 21+1 = 22,\\
T_k(g) &= T_r(g)+\tau(g) = 34+2 = 36,\\
T_r(C) &= \max\,[T_k(c),\, T_k(f),\, T_k(g)] = 36,\\
T_k(C) &= T_r(C)+\tau(C) = 36+9 = 45,\\
T_r(A) &= \max\,[T_k(B),\, T_k(C)] = 68,\\
T_k(A) &= T_r(A)+\tau(A) = 68+3 = 71.
\end{aligned}$$

A więc, produkcja wyrobu $A$ może być najwcześniej zakończona w terminie 71.

Posługując się maszyną harmonogram syntetyczny obliczymy na podstawie rozszerzonej listy części. Uczynimy to w następujący sposób: poczynając od dołu listy odczytujemy po jednym symbolu. Jeżeli odczytamy symbol oznaczający detal, wówczas obliczamy

$$T_k(x) = T_r(x)+\tau(x),$$

i uzyskany wynik umieszczamy na wierzchołku stosu.

Jeżeli odczytamy w liście symbol oznaczający podzespół $x$ o krotności $\varkappa(x)$, to ze stosu odczytujemy $\varkappa(x)$ ostatnich liczb i wybieramy z nich liczbę największą. Będzie to $T_r(x)$. Teraz z kolei obliczamy $T_k(x)$, następnie usuwamy ze stosu odczytanych $\varkappa(x)$ liczb, a umieszczamy w nim uzyskaną wartość $T_k(x)$.

W ten sposób otrzymamy czasy rozpoczęcia i zakończenia wszystkich operacji.

Przebieg takiego obliczenia podajemy niżej.

| Nr kroku obliczenia | Lista części | $\tau(x)$ | $T_r(x)$ | Stos | $T_k(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 11. | *ABC* | 3 | 71 | 71 | 71 |
| 10. | *BaD* | 8 | 60 | 68 | 68 |
| 9. | *a* | 2 | $\underline{28}$ | 60, 28 | 28 |
| 8. | *Dbcd* | 5 | 55 | 60 | 60 |
| 7. | *b* | 1 | $\underline{54}$ | 45, 17, 34, 55 | 55 |

c.d. tablicy

| Nr kroku obliczenia | Lista części | $\tau(x)$ | $T_r(x)$ | Stos | $T_k(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6. | *c* | 3 | $\underline{31}$ | 45, 17, 34 | 34 |
| 5. | *d* | 2 | $\underline{15}$ | 45, 17 | 17 |
| 4. | *Cefg* | 9 | 36 | 45 | 45 |
| 3. | *e* | 7 | $\underline{17}$ | 36, 22, 24 | 24 |
| 2. | *f* | 1 | $\underline{21}$ | 36, 22 | 22 |
| 1. | *g* | 2 | $\underline{34}$ | 36 | 36 |

Kreski umieszczone pod liczbami oznaczają, iż terminy te zostały ustalone przed rozpoczęciem obliczeń.

*Ćwiczenie*

Podać harmonogram analityczny dla wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 33, przyjmując następujące czasy operacji

| $x$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tau(x)$ | 5 | 2 | 1 | 3 | 2 | 8 | 4 | 2 | 1 | 5 | 7 |

oraz terminy dostarczenia detali

| $x$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_r(x)$ | 30 | 15 | 28 | 31 | 17 | 21 | 15 |

### *3.1.3. Korekta harmonogramu syntetycznego*

Z harmonogramu syntetycznego możemy wywnioskować, że wykonywanie bezpośrednich składników niektórych podzespołów jest kończone w różnych terminach.

Ponieważ montaż podzespołu możemy rozpocząć dopiero wtedy, gdy wszystkie jego bezpośrednie składniki są gotowe, ze względów ekonomicznych te składniki, dla których ustalono zbyt wczesny termin wykonania będzie można wykonać w późniejszym terminie, tak aby były one gotowe razem z najpóźniej wykonanym składnikiem.



Mając więc na podstawie harmonogramu syntetycznego obliczony najwcześniejszy termin zakończenia wykonania wyrobu końcowego możemy obliczyć teraz harmonogram analityczny, w którym ustalone będą takie terminy rozpoczynania i kończenia produkcji podzespołów oraz dostawy materiałów, aby wyrób końcowy mógł być wykonany w terminie obliczonym na podstawie harmonogramu syntetycznego. Harmonogram taki nazwiemy *skorygowanym harmonogramem syntetycznym.*

*Przykład.* Skorygujmy harmonogram syntetyczny wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 33.

Korekta tego harmonogramu będzie miała następującą postać.

| $x$ | $\tau(x)$ | $T_k(x)$ | $T_r(x)$ |
|---|---|---|---|
| *A* | 3 | 71 | 68 |
| *BA* | 8 | 68 | 60 |
| *aB* | 2 | 60 | 58 |
| *DB* | 5 | 60 | 55 |
| *bD* | 1 | 55 | 54 |
| *cD* | 3 | 55 | 52 |
| *dD* | 2 | 55 | 53 |
| *CA* | 9 | 68 | 59 |
| *cC* | 7 | 59 | 52 |
| *fC* | 1 | 59 | 58 |
| *gC* | 2 | 59 | 57 |

Poniżej zestawiono różnice terminów dostaw materiałów według harmonogramu syntetycznego i syntetycznego skorygowanego. Terminy skorygowane oznaczone są symbolem $T_r^*(x)$.

| $x$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_r(x)$ | 28 | 54 | 31 | 15 | 17 | 21 | 34 |
| $T_r^*(x)$ | 58 | 54 | 52 | 53 | 52 | 58 | 57 |

Widzimy, że wiele materiałów ($a$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$) można dostarczyć znacznie później nie zmieniając terminu wykonania wyrobu końcowego.

*Ćwiczenie*

Skorygować harmonogram syntetyczny wyrobu, którego drzewo przedstawia rys. 33, przyjmując, że czasy trwania operacji są takie same, jak podano na rys. 33, najwcześniejsze zaś terminy dostaw materiałów są następujące:

| $x$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_r(x)$ | 30 | 21 | 60 | 51 | 17 | 12 | 13 | 8 |

### 3.1.4. *Harmonogram ograniczony*

Jeżeli dla dowolnej części $x$ wyrobu $W$ termin dostarczenia detali $T_r(x)$ jest ograniczony od dołu, tj. $T_r(x)$ nie może być wcześniejszy od terminu z góry ustalonego dla tej właśnie części, to część $x$ nazwiemy — *związaną*; jeżeli natomiast $T_r(x)$ nie jest ograniczony, to $x$ nazwiemy *częścią wolną*.

Obróbkę detalu wolnego możemy zatem rozpocząć w terminie dowolnym, w dowolnym terminie możemy również rozpocząć montaż podzespołu wolnego.

Natomiast obróbkę detalu związanego nie możemy rozpocząć przed ustalonym z góry dla danego detalu terminem (z powodu



braku materiału, siły roboczej itp.). Podobnie rzecz się ma z podzespołem związanym; montaż takiego podzespołu można bowiem rozpocząć nie wcześniej niż w zadanym z góry terminie.

Najwcześniejszy termin rozpoczęcia obróbki lub montażu części $x$ nazwiemy *terminem ograniczającym* i oznaczymy go przez $T_r'(x)$.

Niech $W$ będzie wyrobem ze zbioru detali

$$D(W) = \{x_1, \dots, x_s\}.$$

Przez $D'(W) \subset D(W)$ oznaczymy zbiór detali związanych wyrobu $W$, gdzie

$$D'(W) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\},$$

zaś

$$T_r'(x_{i_1}), T_r'(x_{i_2}), \dots, T_r'(x_{i_k})$$

są terminami ograniczającymi rozpoczęcie obróbki odpowiednich detali związanych.

Jeżeli w drzewie wyrobu $W$ pozostawimy tylko drogi

$$\delta(x_{i_1}), \delta(x_{i_2}), \dots, \delta(x_{i_k}),$$

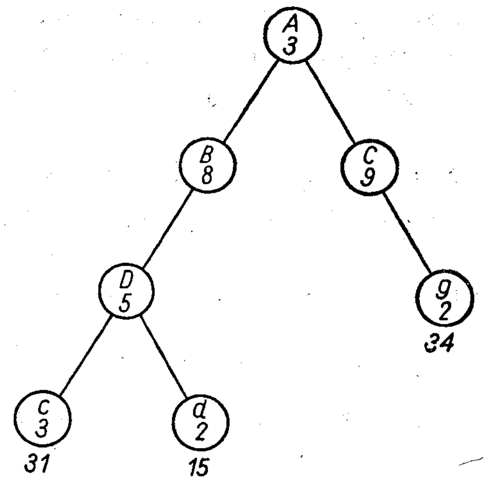
to tak otrzymane drzewo nazwiemy *drzewem* (schematem) *ograniczonym wyrobu W*. Harmonogram syntetyczny dla drzewa ograniczonego wyrobu $W$ nazwiemy *harmonogramem ograniczonym wyrobu W*.

*Przykład.* Rozpatrzmy wyrób, którego drzewo pokazano na rys. 33. Przyjmiemy, że detale $c$, $d$, $g$ są związane (zob. rys. 32), tj.

$$T_r(c) = 31, \quad T_r(d) = 15, \quad T_r(g) = 34,$$

natomiast pozostałe detale są wolne.

Drzewo (schemat) ograniczone wyrobu $A$ będzie więc miało postać pokazaną na rys. 34.




*Rys. 34*

Harmonogram ograniczony będzie dla tego wyrobu następujący:

| Nr kroku obliczenia | $x$ | $\tau(x)$ | $T_r(x)$ | Stos | $T_k(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7. | *ABC* | 3 | 47 | 50 | 50 |
| 6. | *BD* | 8 | 39 | 45, 47 | 47 |
| 5. | *Dbc* | 5 | 34 | 45, 39 | 39 |
| 4. | *c* | 3 | 31 | 45, 17, 34 | 34 |
| 3. | *d* | 2 | 15 | 45, 17 | 17 |
| 2. | *Cg* | 9 | 36 | 45 | 45 |
| 1. | *g* | 2 | 34 | 36 | 36 |

Mając termin zakończenia produkcji wyrobu końcowego, obliczony na podstawie harmonogramu ograniczonego, i znając czasy trwania wszystkich operacji, możemy już obliczyć harmonogram analityczny dla wyrobu końcowego. W naszym przykładzie będzie miał on postać:



| Nr kroku obliczenia | $x$ | $\tau(x)$ | $T_r(x)$ | $T_k(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | *A* | 3 | 47 | 50 |
| 2. | *BA* | 8 | 39 | 47 |
| 3. | *aB* | 2 | 37 | 39 |
| 4. | *DB* | 5 | 34 | 39 |
| 5. | *bD* | 1 | 33 | 34 |
| 6. | *cD* | 3 | 31 | 34 |
| 7. | *dD* | 2 | 32 | 34 |
| 8. | *CA* | 9 | 38 | 47 |
| 9. | *eC* | 7 | 31 | 38 |
| 10. | *fC* | 1 | 37 | 38 |
| 11. | *gC* | 2 | 36 | 38 |

*Ćwiczenie*

Podać harmonogram ograniczony i analityczny dla wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 33, przyjmując czasy operacji oznaczone na rysunku oraz — niżej podane ograniczające terminy rozpoczęcia detali związanych

a)

| $x$ | $a$ | $c$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| $T_r(x)$ | 28 | 31 | 21 |

b)

| $x$ | $a$ | $b$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| $T_r(x)$ | 28 | 54 | 17 |

c)

| $x$ | $b$ | $c$ | $g$ |
|---|---|---|---|
| $T_r(x)$ | 54 | 31 | 34 |

d)

| $x$ | $b$ |
|---|---|
| $T_r(x)$ | 54 |

e)

| $x$ | $c$ |
|---|---|
| $T_r(x)$ | 31 |

Pozostałe detale są wolne.

### 3.1.5. *Harmonogram częściowy*

W paragrafie tym zajmiemy się rozpatrzeniem terminów rozpoczęcia i zakończenia operacji w przypadku, gdy częściami związanymi są zarówno detale, jak i podzespoły wyrobu.

Harmonogram ograniczony, w którym związane są zarówno detale, jak i podzespoły, nazwiemy *harmonogramem częściowym*.

Harmonogram częściowy można obliczyć w podobny sposób jak harmonogram ograniczony, opisany w poprzednim paragrafie. Jednakże ze względów rachunkowych wygodniej jest w tym przypadku postąpić nieco inaczej.

Przyjmiemy, że dla wszystkich części wolnych $x$ $T_r'(x) = 0$.[3]

Harmonogram częściowy ustalamy na podstawie wzoru

$$(1)\qquad T_r(x) = \begin{cases} T_{k,\max}(\beta x), & \text{jeżeli } T_{k,\max}(\beta x) \geqslant T_r'(x), \\ T_r'(x), & \text{jeżeli } T_{k,\max}(\beta x) < T_r'(x) \text{ lub } x \text{ jest detalem,} \end{cases}$$

gdzie:

$$\beta x = \{y_1, y_2, \dots, y_l\},$$
$$T_{k,\max}(\beta x) = \max\,[T_k(y_1), T_k(y_2), \dots, T_k(y_l)],$$
$$T_k(x) = T_r(x) + \tau(x)$$

i dla detali

$$T_r(x) = T_r'(x).$$

*Przykład.* Załóżmy, że w wyrobie, którego drzewo podano na rys. 35, następujące części są związane

| $x$ | $B$ | $C$ | $d$ | $e$ | $D$ | $j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_r'(x)$ | 21 | 25 | 23 | 11 | 30 | 28 |

[3] Przyjęcie założenia, że czas rozpoczęcia obróbki dowolnych części wolnych jest równy zeru, upraszcza znacznie algorytm obliczania harmonogramu częściowego.



zaś wszystkie pozostałe części są wolne. Przyjmijmy więc dla nich $T_r'(x) = 0$.

Obliczenie harmonogramu częściowego będzie następujące:

| Nr kroku obliczenia | $x$ | $\tau(x)$ | $T_r'(x)$ | $T_r(x)$ | Stos | $T_k(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 18. | *ABCD* | 3 | 0 | 36 | 39 | 39 |
| 17. | *BaE* | 2 | 21 | 21 | 36, 29, 23 | 23 |
| 16. | *a* | 1 | 0 | 0 | 36, 29, 5, 1 | 1 |
| 15. | *Ebe* | 5 | 0 | 0 | 36, 29, 5 | 5 |
| 14. | *b* | 3 | 0 | 0 | 36, 29, 2, 3 | 3 |
| 13. | *c* | 2 | 0 | 0 | 36, 29, 2 | 2 |
| 12. | *CdFh* | 4 | 25 | 25 | 36, 29 | 29 |
| 11. | *d* | 1 | 23 | 23 | 36, 2, 20, 24 | 24 |
| 10. | *Fefg* | 7 | 0 | 13 | 36, 2, 20 | 20 |
| 9. | *e* | 2 | 11 | 11 | 36, 2, 5, 3, 13 | 13 |
| 8. | *f* | 3 | 0 | 0 | 36, 2, 5, 3 | 3 |
| 7. | *g* | 5 | 0 | 0 | 36, 2, 5 | 5 |
| 6. | *h* | 2 | 0 | 0 | 36, 2 | 2 |
| 5. | *DiG* | 2 | 30 | 34 | 36 | 36 |
| 4. | *i* | 1 | 0 | 0 | 34, 1 | 1 |
| 3. | *Gjk* | 4 | 0 | 30 | 34 | 34 |
| 2. | *j* | 2 | 28 | 28 | 1, 30 | 30 |
| 1. | *k* | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Można udowodnić, że harmonogram częściowy ustala najwcześniejszy możliwy czas zakończenia wyrobu końcowego przy zadanych założeniach[4].

Przez to, że przyjęliśmy dla części wolnych czas rozpoczęcia zero, nie wpływają one faktycznie na czasy rozpoczęcia części związanych. Termin zakończenia produkcji wyrobu końcowego zależy tylko od terminu rozpoczęcia produkcji części związanych.

[4] Dowodu nie podajemy, gdyż wymagałoby to wprowadzenia szeregu dodatkowych pojęć, które w dalszych rozważaniach nie są nam potrzebne.

Zwróćmy uwagę, że jeżeli najwcześniejszy termin rozpoczęcia produkcji podzespołu związanego jest późniejszy od najpóźniejszego terminu zakończenia wykonania jego składników bezpośrednich, to jako termin rozpoczęcia tego podzespołu musimy przyjąć termin najwcześniejszy. Tak właśnie jest w przypadku podzespołu *C*. Najwcześniejszy termin jego rozpoczęcia jest $T_r'(C) = 25$, natomiast terminy zakończenia bezpośrednich składników *C* wynoszą

$$T_k(d) = 25,\ T_k(F) = 20,\ T_k(h) = 2.$$

A więc terminy zakończenia części *d, F, h* nie mają wpływu na termin rozpoczęcia *C*, a tym samym na termin zakończenia wyrobu końcowego.

Jeżeli natomiast najwcześniejszy termin rozpoczęcia montażu podzespołu jest wcześniejszy od najpóźniejszego terminu wykonania jego bezpośrednich składników, to montaż tego podzespołu możemy dopiero rozpocząć w terminie późniejszym niż termin najwcześniejszy. Tak właśnie jest w przypadku podzespołu *D*. Najwcześniejszy termin rozpoczęcia montażu jest $T_r'(D) = 30$, podczas gdy jego bezpośrednie składniki są kończone w terminach

$$T_k(i) = 1,\ T_k(G) = 34.$$

A więc w harmonogramie częściowym, jako termin rozpoczęcia *D*, musimy przyjąć $T_k(G) = 34$.

Mając dany termin ukończenia produkcji wyrobu końcowego możemy obliczyć harmonogram analityczny. Dla rozpatrywanego przykładu będzie on miał postać:

| Nr kroku obliczenia | $x$ | $\tau(x)$ | $T_r(x)$ | $T_k(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | *A* | 3 | 36 | 39 |
| 2. | *B A* | 2 | 34 | 36 |
| 3. | *a B* | 1 | 33 | 34 |

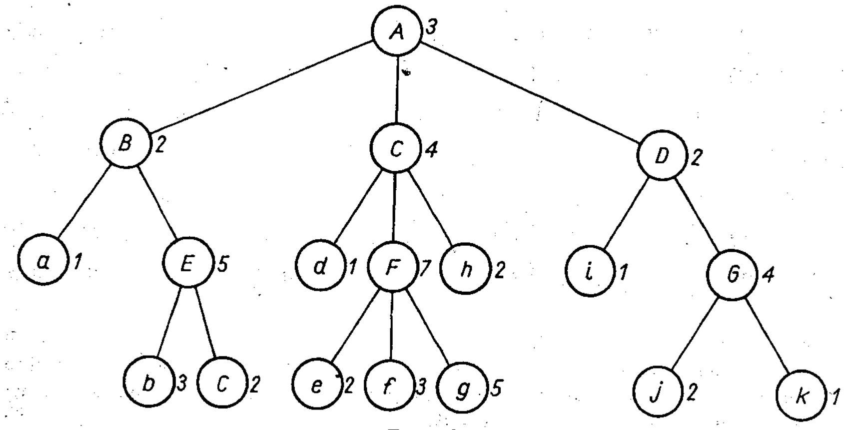


c.d. tablicy

| Nr kroku obliczenia | $x$ | $\tau(x)$ | $T_r(x)$ | $T_k(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 4. | *E B* | 5 | 29 | 34 |
| 5. | *b F* | 3 | 26 | 29 |
| 6. | *C F* | 2 | 27 | 29 |
| 7. | *C A* | 4 | 32 | 36 |
| 8. | *d C* | 1 | 31 | 32 |
| 9. | *F C* | 7 | 25 | 32 |
| 10. | *e F* | 2 | 23 | 25 |
| 11. | *f F* | 3 | 23 | 25 |
| 12. | *g F* | 5 | 20 | 25 |
| 13. | *h C* | 2 | 30 | 32 |
| 14. | *D A* | 2 | 34 | 36 |
| 15. | *i D* | 1 | 33 | 34 |
| 16. | *G D* | 4 | 30 | 34 |
| 17. | *j G* | 2 | 28 | 30 |
| 18. | *k G* | 1 | 29 | 30 |

*Ćwiczenie*

Podać harmonogram częściowy i analityczny dla wyrobu, którego schemat pokazano na rys. 35, przyjmując, że podzespoły *E, D, G* mają najwcześniejsze czasy rozpoczęcia montażu.




*Rys. 35*

$$T_r(E) = 25,\ T_r(D) = 15,\ T_r(G) = 30,$$

dla pozostałych zaś podzespołów czasy rozpoczęcia montażu są dowolne.

### 3.1.6. *Droga krytyczna, część krytyczna*

Drogą $\delta(x)$ w schemacie-drzewie wyrobu końcowego $W$ nazywaliśmy ciąg

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

taki że

1) $x_1 = x$ — jest częścią wyrobu $W$,
2) $x_n = W$ — jest wyrobem końcowym,
3) dla każdego $i$ $(1 \leqslant i < n)$, $x_i$ jest bezpośrednim składnikiem $x_{i+1}$.

Drogę $\delta_H(x)$ nazwiemy *drogą krytyczną* dla harmonogramu $H$($H$ może być dowolnym z omawianych harmonogramów), jeżeli dla każdego $i$ $(1 \leqslant i < n)$

$$T_k(x_i) = T_{k,\max}(\beta x_{i+1}). \tag{1}$$

A więc, aby otrzymać drogę krytyczną dla zadanego harmonogramu, wychodzimy od wierzchołka drzewa i jako poprzedni człon drogi wybieramy ten bezpośredni składnik, który jest wykonany w najpóźniejszym terminie i tak postępujemy aż do chwili, gdy dojdziemy do detalu.[5]

*Przykład.* W przypadku wyrobu, którego drzewo prezentujemy na rys. 35 przy założeniu, że harmonogram częściowy ma postać podaną w przykładzie z poprzedniego paragrafu, droga krytyczna będzie przedstawiała się następująco:

$$j\ G\ D\ A.$$

Ponieważ

$$T_k(D) = 36,\ T_k(C) = 29,\ T_k(B) = 23,$$

podzespół $D$ jest kończony później niż podzespoły $C$, $B$. Z kolei

$$T_k(i) = 1,\ T_k(G) = 34,$$

a więc podzespół $G$ jest gotowy później niż detal $i$.

Podobnie $T_k(j) = 30$, $T_k(k) = 1$, a więc wykonanie detalu $j$ jest zakończone później niż detalu $h$.

Łatwo stwierdzić, że termin zakończenia wyrobu końcowego $W$ dla dowolnego harmonogramu $H$ spełnia zależność

$$T_k(W_H) \geqslant T_r(x_1) + \sum_{i=1}^{n} \tau(x_i), \tag{2}$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest drogą krytyczną dla harmonogramu $H$, $x_1$ zaś detalem wyrobu $W$.

Jeżeli w drodze krytycznej $\delta_H(x)$ jest spełniony dodatkowy warunek

$$T_r(x_{i+1}) = T_k(x_i) \text{ dla każdego } i\ (1 \leqslant i < n), \tag{3}$$

to drogę krytyczną $\delta_H(x)$ nazywamy *drogą spójną*.

Najdłuższą drogę spójną nazwiemy *drogą maksymalną*, pierwszy element drogi maksymalnej zaś — *częścią krytyczną* wyrobu wykonywanego według zadanego harmonogramu.

Oczywiście w przypadku dowolnej drogi maksymalnej $\delta_H(x_1) = x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$T_k(W_H) = T_r(x_1) + \sum_{i=1}^{n} \tau(x_i). \tag{4}$$

[5] Dróg krytycznych przy zadanym harmonogramie może być więcej niż jedna. Jeżeli na przykład dla jakiegoś podzespołu istnieje więcej niż jeden bezpośredni składnik, taki że termin zakończenia jego wykonania jest późniejszy od terminów zakończenia wykonania wszystkich innych składników bezpośrednich tego podzespołu, to dróg krytycznych będzie oczywiście więcej niż jedna.

Najwcześniejszy termin ukończenia wyrobu końcowego zależy od terminu rozpoczęcia montażu części krytycznych. Aby więc przyspieszyć wykonanie wyrobu końcowego — zakładając, że czasy operacji są ustalone — należy starać się przyspieszyć terminy rozpoczęcia produkcji części krytycznych.

Mając dany harmonogram częściowy możemy łatwo znaleźć część krytyczną.

Przebieg tego obliczenia będzie następujący:

Na podstawie rozszerzonej listy części obliczamy dla bezpośrednich składników wyrobu końcowego $x(\beta x = \{y_1, y_2, \ldots, y_l\})$

(5) $$T_{k,\max}(\beta x) = \max[T_k(y_1), T_k(y_2), \ldots, T_k(y_l)],$$

a następnie sprawdzamy, czy

(6) $$T_{k,\max}(\beta x) < T'_r(x).$$

Bezpośredni składnik $y_i (1 \leqslant i \leqslant l)$, którego termin ukończenia jest najpóźniejszy spośród terminów zakończenia ustalonych dla bezpośrednich składników $x$, nazwiemy *najpóźniejszym bezpośrednim składnikiem* $x$ i oznaczymy przez $\max(\beta x)$.

Jeżeli warunek (6) jest spełniony, to $x$ jest szukaną częścią krytyczną i obliczenie możemy zakończyć; jeżeli warunek (6) nie jest spełniony, to $x$ nie jest częścią krytyczną i poszukiwanie najpóźniejszego bezpośredniego składnika dla części $\max(\beta x)$ powtarzamy jeszcze raz na podstawie (5) i (6). Postępujemy w ten sposób tak długo, aż znajdziemy część krytyczną.

*Przykład.* Znajdziemy część krytyczną dla wyrobu, którego drzewo podano na rys. 35, przyjmując harmonogram częściowy podany w przykładzie znajdującym się w poprzednim paragrafie.



| Nr kroku obliczenia | $x$ | $T'_r(x)$ | $T_k(x)$ | $\max \beta x$ | $T_{k,\max}(\beta x) < T'_r(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $A\ B\ C\ D$ | 0 | 39 | $D$ | $T_k(D) > T'_r(A)$ |
| | $B\ a\ E$ | 21 | 23 | | |
| | $a$ | 0 | 1 | | |
| | $E\ b\ c$ | 0 | 5 | | |
| | $b$ | 0 | 3 | | |
| | $c$ | 0 | 2 | | |
| | $C\ d\ F\ h$ | 25 | 29 | | |
| | $d$ | 23 | 24 | | |
| | $F\ e\ f\ g$ | 0 | 20 | | |
| | $e$ | 11 | 13 | | |
| | $f$ | 0 | 3 | | |
| | $g$ | 0 | 5 | | |
| | $h$ | 0 | 2 | | |
| 2. | $D\ i\ G$ | 30 | 36 | $G$ | $T_k(G) > T'_r(D)$ |
| | $i$ | 0 | 1 | | |
| 3. | $G\ j\ k$ | 0 | 34 | | |
| | $j$ | 28 | 30 | $j$ | $T_k(j) > T'_r(G)$ |
| | $k$ | 0 | 1 | | |

Ponieważ $j$ jest detalem, obliczenia nie musimy kontynuować, $j$ jest więc detalem krytycznym.

*Ćwiczenie*

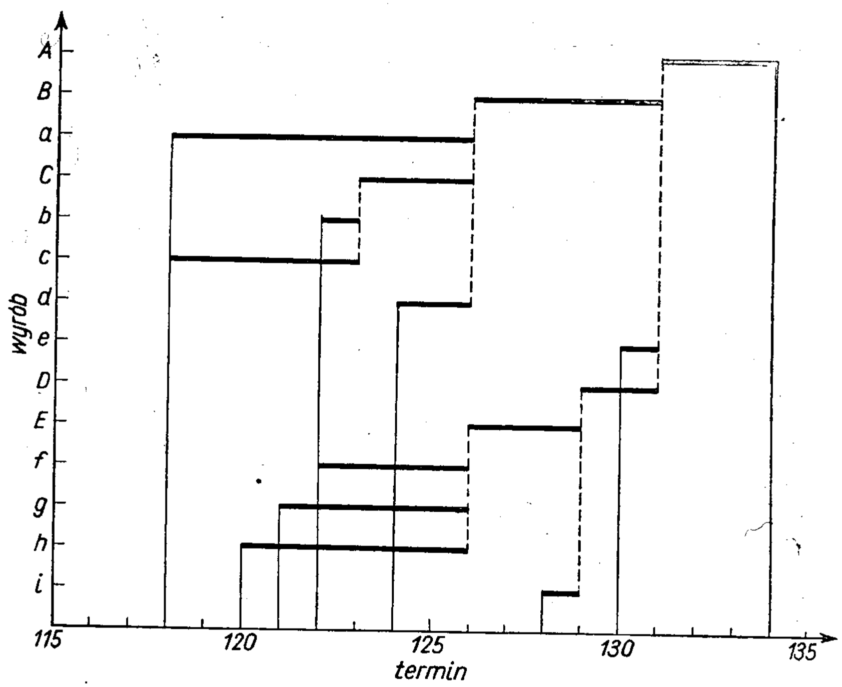
Obliczyć części krytyczne dla wyrobu, którego schemat pokazano na rys. 35, przyjmując, że części wymienione w tabliczce poniżej są częściami związanymi:

| $x$ | $a$ | $b$ | $F$ | $h$ | $G$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'_r(x)$ | 20 | 15 | 10 | 16 | 12 | 17 |

### 3.1.7. *Wykresy przebiegu operacji*

Jeżeli drzewo wyrobu przedstawimy w układzie współrzędnych, to nazwiemy je *wykresem przebiegu operacji* lub krótko — *wykresem operacji*. Wykres ten jest graficznym przedstawieniem harmonogramu.

Przyjmijmy, że na osi poziomej układu współrzędnych odłożymy czas w ustalonych jednostkach, na osi pionowej zaś rozmieścimy całą listę części wyrobu. Jeżeli w takim układzie współrzędnych zaznaczymy linią ciągłą czas trwania operacji każdej części, od terminu rozpoczęcia do terminu zakończenia, to otrzymamy wykres Gantta.




*Rys. 36*



*Przykład.* Rozpatrzmy wykres operacji przedstawiony na rys. 36 dla wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 31, zakładając termin zakończenia wyrobu końcowego $T_k(A) = 134$. Pionowymi liniami przerywanymi połączono bezpośrednie składniki każdej części. Z wykresu tego można łatwo odczytać terminy rozpoczęcia i zakończenia każdej operacji oraz czas jej trwania.

W podobny sposób możemy przedstawić inne rodzaje harmonogramów omawiane w tym rozdziale.

*Ćwiczenie*

Podać wykres harmonogramu syntetycznego dla wyrobu, którego drzewo pokazano na rys. 31.

## 3.2. HARMONOGRAMY OBCIĄŻEŃ

Każdy proces produkcyjny wymaga pewnych środków technicznych (np. obrabiarek, maszyn, narzędzi). Zamiast mówić o różnych środkach dla uproszczenia przyjmiemy, że wykonanie każdej operacji wymaga jakiejś jednej maszyny.[6]

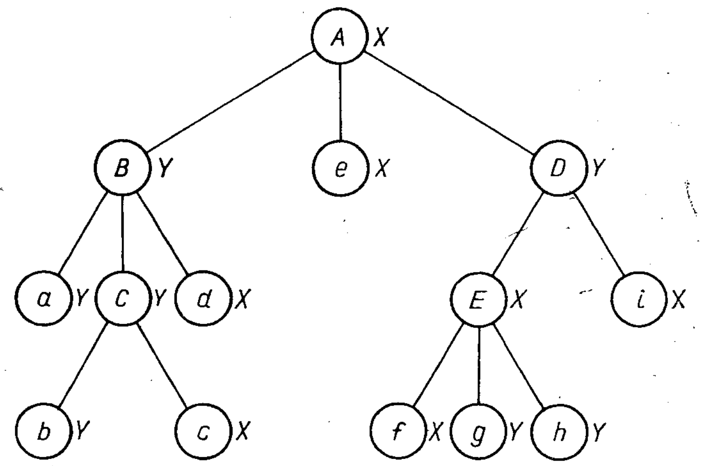
W rozdziale tym założymy, że detale są obrabiane, a więc pojęcie operacji odnosi się również do detali.

Przyjmiemy dalej, dla uproszczenia, że dysponujemy tylko jednym egzemplarzem każdej maszyny potrzebnej do wykonywania operacji procesu produkcyjnego, tj. że do realizacji tego procesu używana jest jedna wiertarka, jedna tokarka itp. Założenie to upraszcza znacznie rozważania nie zmniejszając ich ogólności.

Podane dalej metody można po niewielkich modyfikacjach zastosować wówczas, gdy proces jest realizowany za pomocą większej liczby maszyn jednakowego rodzaju.

[6] W rzeczywistości wykonanie jednej operacji może wymagać więcej niż jednej maszyny.

A więc założenie, że każda operacja jest wykonywana za pomocą jednej maszyny, należy tu traktować jako upraszczające. Chodzi ogólnie o to, że do wykonania poszczególnej operacji potrzebne są pewne środki techniczne, które nazwaliśmy umownie maszyną.




*Rys. 37*

Na rysunku 37 pokazano, jaką maszyną wykonywana jest każda operacja procesu. Litery $X$ i $Y$ oznaczają dwie maszyny, za pomocą których realizowany jest proces produkcyjny.

### 3.2.1. *Algorytm obliczeń*

Załóżmy, że określony jest termin wyprodukowania wyrobu końcowego oraz czasy trwania wszystkich operacji procesu (bez obróbki detali). Dany jest również zespół maszyn (po jednej każdego rodzaju) potrzebnych do wykonania operacji. Musimy ustalić harmonogram dla każdej maszyny. Zanim przystąpimy do algorytmu obliczania harmonogramu obciążeń, zwrócimy uwagę, że termin rozpoczęcia obróbki każdego detalu



zależy od dwu parametrów: z jednej strony operacja musi być rozpoczęta w takim terminie, aby obrabiana część była gotowa przed terminem rozpoczęcia montażu podzespołu, którego jest ona bezpośrednim składnikiem; z drugiej zaś termin rozpoczęcia operacji jest uzależniony od tego, kiedy maszyna, na której ma być obrabiana dana część, jest wolna. A więc obliczając termin rozpoczęcia każdej operacji musimy uwzględnić oba te czynniki.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_l$ będą maszynami używanymi w realizacji procesu produkcyjnego.

Oznaczmy przez $T_r^j(x)$ — czas rozpoczęcia obróbki wyrobu $x$ na maszynie $X_j$ $(1 \leqslant j \leqslant l)$, przez $T_k^j(x)$ — czas zakończenia obróbki wyrobu $x$ na maszynie $X_j$.

Niech $\beta x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ i $W$ niech oznacza wyrób końcowy. Harmonogram obciążeń możemy ustalić według następującego wzoru

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} 1) & T_r^j(W) = T_k^j(W) - \tau(W), \\ 2) & T_r^j(x_i) = \min\,[T_r^s(x), T_r^j(y)] - \tau(x_i), \end{array}$$

gdzie:

$\tau(x)$ — czas trwania obróbki (operacji) wyrobu $x$,

$y$ — ostatni wyrób obrabiany przed wyrobem $x_i$ na maszynie $X_j$.

Na podstawie wzoru (1) możemy obliczyć harmonogram obciążeń maszyn $X_1, X_2, \ldots, X_l$ przy produkowaniu dowolnego wyrobu w procesie podstawowym.

*Przykład.* Rozpatrzmy wyrób, którego schemat jest prezentowany na rys. 31 i 37. Na rysunku 31 podano wszystkie czasy operacji, na rys. 37 zaś podano maszyny potrzebne do wykonania każdej operacji.

Załóżmy termin końcowy 134, jak uczyniliśmy w poprzednim przykładzie dla tego właśnie wyrobu

$$T_k^X(A) = 134.$$

Przebieg obliczenia harmonogramu obciążeń według wzoru (1) podajemy w zamieszczonej tablicy:

| $x$ | $z$ | Maszyna | $\tau(x)$ | $T_k(x)$ | $T_r(y)$ | $T_r^X(x)$ | $T_r^Y(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | | $X$ | 3 | 134 | | 131 | |
| $B$ | $a$ | $Y$ | 5 | 131 | 131 | | 126 |
| $D$ | $A$ | $Y$ | 2 | 126 | 131 | | 124 |
| $e$ | $A$ | $X$ | 1 | 131 | 131 | 130 | |
| $a$ | $B$ | $Y$ | 8 | 124 | 126 | | 116 |
| $C$ | $B$ | $Y$ | 3 | 116 | 126 | | 113 |
| $d$ | $B$ | $X$ | 1 | 126 | 124 | 124 | |
| $E$ | $D$ | $X$ | 3 | 124 | 124 | 121 | |
| $i$ | $D$ | $X$ | 1 | 121 | 124 | 120 | |
| $b$ | $C$ | $Y$ | 1 | 111 | 113 | | 112 |
| $c$ | $C$ | $X$ | 5 | 113 | 113 | 108 | |
| $f$ | $E$ | $X$ | 4 | 108 | 121 | 104 | |
| $g$ | $E$ | $Y$ | 5 | 112 | 121 | | 107 |
| $h$ | $E$ | $Y$ | 8 | 107 | 121 | | 99 |

Rubryki $T_k(x)$ i $T_r(y)$ zawierają odpowiednie terminy rozpoczęcia i zakończenia poszczególnych operacji, nie wskazując na maszynę, na której się one odbywają, ta informacja bowiem nie jest potrzebna do obliczeń. Ostatnie dwie rubryki tablicy — $T_r^X(x)$, $T_r^Y(x)$ — zawierają czasy rozpoczęcia obróbki każdego wyrobu na odpowiedniej maszynie.

Obliczenia oparto na relacyjnej liście części nieco zmienionej w stosunku do list omawianych poprzednio. Sprawy tej nie będziemy szczegółowo omawiać, aby nie wprowadzać jeszcze jednego pojęcia listy. Przyjęty układ jest wygodny i uważny Czytelnik z łatwością samodzielnie go rozszyfruje. Można by wprawdzie stosować tu taką listę relacyjną, jaka była omawiana poprzednio, jednakże zaciemniałoby to nieco przebieg obliczenia.[7]

[7] Przyjęty sposób zapisu drzewa wyrobu jest nieco dokładniej omówiony w książce Z. Pawlak, *Organizacja maszyn bezadresowych*, Warszawa 1965, s. 29—31.



*Ćwiczenie*

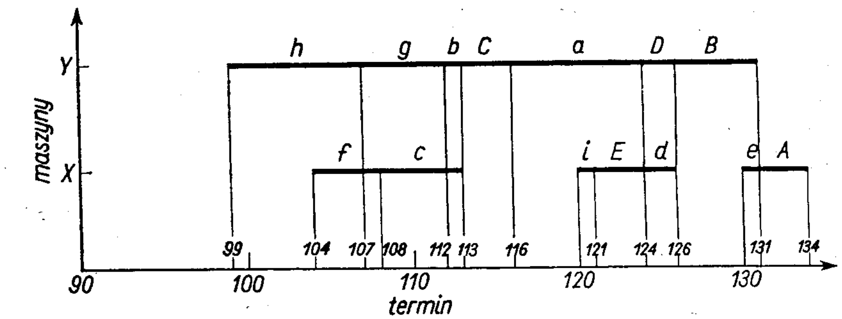
Podać harmonogram obciążeń przyjmując, że wyrób, którego schemat przedstawiono na rys. 31, jest wykonywany przy pomocy trzech maszyn $X$, $Y$, $Z$,

| Wyrób | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Maszyna | $X$ | $Y$ | $Y$ | $Z$ | $Z$ | $X$ | $X$ | $Z$ | $Z$ | $Y$ | $Y$ | $Y$ | $X$ | $Z$ |

### 3.2.2. *Wykresy operacji dla obciążeń maszyn*

Harmonogram obciążeń maszyn można też przedstawić w postaci wykresu operacji, przyjmując, że na osi pionowej umieścimy nazwy maszyn zamiast wyrobów.

Rysunek 38 przedstawia wykres operacji dla rozpatrywanego w poprzednim paragrafie przykładu obciążeń maszyn. Zwróćmy uwagę, że wyrób $f$ moglibyśmy obrabiać nieco później, a mianowicie w terminie 116—120 zamiast w terminie 104—108. Jednakże podany w paragrafie 3.2.1. algorytm nie pozwala na przyjęcie tych późniejszych terminów.




*Rys. 38*

Można by oczywiście podać taki algorytm, który by wyznaczał możliwie najpóźniejsze wykonanie wszystkich części, a jednocześnie pozwalał wykonać wyrób końcowy w założonym terminie.

W podobny sposób można skonstruować harmonogramy obciążeń przy innych założeniach, jak to czyniliśmy w poprzednim rozdziale przy omawianiu harmonogramów operacji.

*Ćwiczenie*

Podać harmonogram obciążeń w postaci wykresu dla zadania podanego w poprzednim paragrafie.

## *WYKAZ SYMBOLI*

$\in$ — jest elementem zbioru
$\notin$ — nie jest elementem zbioru
$\Phi$ — zbiór pusty
$\bar{X}$ — liczba elementów zbioru $X$
$\subset$ — zawieranie zbiorów
$\cup$ — suma zbiorów
$\cap$ — iloczyn zbiorów
$-$ — różnica zbiorów
$\langle x, y \rangle$ — para uporządkowana
$<$ — relacja mniejszości
$R(x, y)$ — relacja dwuczłonowa
$R : X \to Y$ — funkcja o dziedzinie $X$ i przeciwdziedzinie $Y$
$R(x, y)$ — relacja „bycia składnikiem"
$C(y)$ — zbiór części wyrobu $y$
$W(X)$ — wyrób o zbiorze części $X$
$S(x, y)$ — relacja „bycia bezpośrednim składnikiem"
$\beta(y)$ — zbiór bezpośrednich składników wyrobu $y$
$\rho(x)$ — rząd wyrobu $x$
$\varkappa(x)$ — krotność wyrobu $x$
$\gamma(x)$ — głębokość wyrobu $x$
$\sigma(x)$ — szerokość wyrobu $x$
$\lambda x$ — lista części wyrobu $x$
$\omega(X)$ — funkcja wagi
$\vartheta_j(X)$ — funkcja pomocnicza
$Z(X)$ — zasięg litery $X$ w liście
$\varphi(X)$ — funkcja sprawdzająca

$\mathfrak{F}_i$ — zbiór części w $i$-tym kroku produkcji
$\beta^*(X)$ — zbiór wszystkich bezpośrednich składników wyrobów należących do $X$
$P$ — proces produkcyjny
$d(P)$ — długość procesu produkcyjnego
$PQ$ — złożenie procesów $P$ i $Q$
$P_W$ — proces produkcyjny wyrobu $W$
$D(W)$ — liczba detali wyrobu $W$
$\varkappa^*(W)$ — najmniejsza krotność podzespołu wyrobu $W$
$[x]$ — część całkowita z $x$
$S(P)$ — produkcja seryjna
$t_i(P_j)$ — $i$-ty krok procesu $j$
$T_r(P)$ — krok masowy
$\mathfrak{M}(P)$ — produkcja masowa
$\mathfrak{S}_i^j$ — zbiór czynnych składników kroku $t_i$
$\mathfrak{W}_i^j$ — zbiór wyników rzeczywistych kroku $t_i$
$\mathfrak{S}_j^*$ — suma wszystkich czynnych składników
$\mathfrak{W}_j^*$ — suma wszystkich wyników rzeczywistych
$\rightarrow$ — operacja transportu
$S_{\delta}$ — stanowisko operacyjne
$M_d$ — magazyn detali
$M_p$ — magazyn podzespołów
$M_w$ — magazyn wyrobów końcowych
$P(W)$ — zbiór wszystkich podzespołów wyrobu $W$
$\boldsymbol{M}_{k,n}$ — macierz stanów magazynu
$V_n^j$ — wektor podzespołów
$\boldsymbol{U}_{k,n}$ — macierz detali
$K(t_i)$ — koszt kroku $t_i$
$K(P_W)$ — koszt wykonania wyrobu $W$ w procesie $P_W$
$\tau_i$ — czas trwania operacji $t_i$
$o_i$ — koszt operacji montażu
$m$ — koszt jednostkowy magazynowania



$p_i = \mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_i+1$ — zbiór wyrobów nie wykorzystanych w operacji $t_i$
$R_i(\psi)$ — $i$-ty redukt formuły Łukasiewicza
$V_i$ — $i$-ta warstwa procesu
$V_i^{\varkappa}$ — maksymalny podzespół warstwy $V_i$
$V_i^{\tau}$ — minimalny podzespół warstwy $V_i$
$\tau(x)$ — czas trwania montażu wyrobu $x$
$\pi(V_i)$ — minimalny podzespół warstwy $V_i$
$\alpha_k$ — współczynnik kosztów całkowitych
$\omega$ — współczynnik kosztów magazynowania
$\tau_i^*$ — maksymalny czas operacji
$U(x)$ — wartość wyrobu $x$
$U(X)$ — wartość zbioru wyrobów $X$
$c_i$ — zysk operacji $i$
$K_c(P_W)$ — koszt całkowity wykonania wyrobu $W$
$Z(P_W)$ — zysk procesu produkcyjnego $P_W$
$S(P_W)$ — sprawność procesu produkcyjnego $P_W$
$\mathfrak{T}_i(P_W)$ — wyroby w toku w $i$-tym kroku produkcji $P_W$
$D_i(P_W)$ — wartość detali ujętych w $i$-tym kroku produkcji
$\underline{k}(x)$ — funkcja kontroli wyrobu $x$
$\Pi(x)$ — funkcja przepływu wyrobu $x$
$\delta(x)$ — droga z części $x$
$\Delta(x)$ — funkcja strat wyrobu $x$
$\Delta^*(x)$ — rozszerzona funkcja strat
$\underline{h}(x)$ — funkcja zwrotów części
$\Gamma(x)$ — funkcja zwrotów detali
$\Gamma^*(x)$ — rozszerzona funkcja zwrotów detali
$\mu(x)$ — funkcja materiałów
$\mathfrak{P}(m_i)$ — ilość materiału $m_i$ w wyrobie końcowym
$\mathfrak{C}(x_j)$ — waga (cena) detalu $x_j$
$\mathfrak{S}(m_i)$ — wielkość strat materiału $m_i$

$\mathfrak{Z}(m_i)$ — wielkość zwrotów materiału $m_i$
$p(x_i)$ — prawdopodobieństwo odrzucenia przez kontrolę techniczną podzespołu $x_i$
$N(x)$ — funkcja zapotrzebowania detali $x$
$T_r(x)$ — termin rozpoczęcia wyrobu $x$
$T_k(x)$ — termin zakończenia wyrobu $x$
$T_r^*(x)$ — skorygowany termin rozpoczęcia wyrobu $x$
$T_r'(x)$ — ograniczający termin rozpoczęcia wyrobu $x$
$T_{k,\max}(\beta x)$ — najpóźniejszy termin zakończenia bezpośredniego składnika wyrobu $x$
$\max(\beta x)$ — bezpośredni składnik $x$ o najpóźniejszym terminie rozpoczęcia
$T_r^X(x)$ — termin rozpoczęcia wyrobu $x$ na maszynie $X$

## SKOROWIDZ POJĘĆ