

realization of goals cannot be determined unless there exists some conception of the dimensions of performance, their relative importance, and their relationships with one another. These relationships may be one of causation, of simple correlation, of interaction; they may be linear and compensatory or non-linear and non-compensatory. A framework is proposed for conceptualizing organizational performance, with distinctions among several different classes of performance dimensions and with consideration for several types of relationships among them.

ZDZISŁAW PAWLAK

Matematyczna teoria procesu składania

Celem niniejszej pracy jest próba naszkicowania matematycznej teorii, łączącej w konsekwentną całość pojęcia procesu produkcyjnego, planu (programu) produkcji, organizacji procesu produkcyjnego itp. Przez proces produkcyjny będziemy tu rozumieli proces składania przedmiotu z jego części. Takie rozumienie pojęcia procesu produkcyjnego nie obejmuje oczywiście wszystkich rodzajów procesów produkcyjnych, ale wydaje się dobrym punktem wyjściowym do badań na tym polu. Tak więc w dalszym ciągu przez proces produkcyjny będziemy zawsze rozumieli proces składania. Zamiast proces produkcyjny będziemy również używali terminu produkcja. Odnośnie produkcji przyjmujemy szereg dalszych założeń upraszczających, badanie bowiem procesu składania z uwzględnieniem wszystkich szczegółów może być w obecnej fazie zbyt trudne. Z drugiej zaś strony wprowadzenie zbyt dużej liczby uproszczeń może zanadto ograniczyć praktyczną przydatność proponowanej teorii.

Produkcja

Przed rozpoczęciem produkcji (składania przedmiotu z jego części) dysponujemy skończonym zbiorem przedmiotów, które będziemy nazywali *elementami produkcji*. Z tych elementów przez zastosowanie do nich odpowiednich operacji składania (montażu) otrzymujemy *półprodukty* (lub podzespoły), do nich stosujemy nowe operacje składania itd. aż do otrzymania *produktu końcowego*.

Podane określenie produkcji ma charakter intuicyjny. Celem

dokładniejszego badania własności procesu niezbędne jest podanie ściślejszej definicji pojęcia procesu składania, co jest głównym celem niniejszej pracy.

Pojęciem wyjściowym rozważań będzie pojęcie *przedmiotu*. Przedmioty będziemy oznaczali małymi literami alfabetu łacińskiego, ewentualnie ze wskaźnikami u dołu lub u góry, np. x, y, x_0, x_0^1 etc. Skończone zbiory przedmiotów będziemy oznaczali dużymi literami łacińskimi

$$X(k) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}.$$

A więc $X(k)$ oznacza skończony zbiór k przedmiotów. Duża litera ze wskaźnikiem u dołu np. $X_i(k)$ oznacza

$$X_i(k) = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_k^i\}.$$

Liczbę i będziemy nazywali *wskaźnikiem zbioru przedmiotów* X .

Jeżeli wszystkie przedmioty zbioru

$$X(k) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}, \quad k > 1$$

złożymy za pomocą jednej operacji składania w jeden przedmiot, to przedmiot ten oznaczymy przez

$$y(k) = \pi X(k) = \pi \{x_1, x_2, \dots, x_k\}.$$

Rodzaj zastosowanej operacji składania nie interesuje nas tutaj bliżej, ważne jest dla nas, tylko to, że ze skończonego zbioru przedmiotów utworzyliśmy nowy przedmiot za pomocą jednej operacji i że w tej operacji wszystkie przedmioty zbioru $X(k)$ weszły w skład przedmiotu $\pi X(k)$ ¹.

Jeżeli

$$y(k) = \pi X(k),$$

to elementy zbioru $X(k)$ będziemy nazywali *bezpośrednimi składnikami* przedmiotu $y(k)$. Niech Φ oznacza przedmiot pusty (brak przedmiotu). Pusty zbiór przedmiotów również oznaczymy przez Φ .

¹ Należy zwrócić uwagę na różnicę między zbiorem przedmiotów $X(k)$, a przedmiotem złożonym $\pi X(k)$. W pierwszym przypadku mamy nie powiązane ze sobą jeszcze części składowe jakiegoś przedmiotu, w drugim zaś te same części zostały już złożone, za pomocą odpowiedniej operacji, tworząc nowy przedmiot.

Wtedy

$$y = \Phi$$

będzie oznaczało przedmiot pusty, natomiast

$$y(0) = \pi \Phi$$

przedmiot, którego zbiór składników jest pusty. Przedmiot taki, że

$$y(0) = \pi \Phi \quad \text{i} \quad y(0) \neq \Phi$$

będziemy nazywali *przedmiotem prostym* (lub *elementem*) produkcji.

Jeżeli

$$y(k) = \pi X(k),$$

to zbiór bezpośrednich składników $X(k)$ przedmiotu $y(k)$ oznaczymy przez

$$\delta y(k) = \delta \pi X(k) = X(k).$$

Elementy zbioru przedmiotów $X(k)$, będziemy też oznaczali przez

$$\{\varepsilon_1 X(k), \varepsilon_2 X(k), \dots, \varepsilon_k X(k)\}.$$

Niech

$$Y(p) = F^* X(k), \quad p \leq k$$

oznacza zbiór przedmiotów

$$\{y_1(k_1), y_2(k_2), \dots, y_p(k_p)\} \text{ lub krócej } \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$$

takich że

$$\delta y_i \cap \delta y_j \neq \Phi \quad \text{dla } y_i \neq y_j$$

oraz

$$\bigcup_{i=1}^p \delta y_i = \delta y_1 \cup \delta y_2 \cup \dots \cup \delta y_p \subset X(k)$$

gdzie \cup oznacza iloczyn zbiorów, \cup — sumę zbiorów, a \subset — relację zawierania się zbiorów, natomiast

$$X(k) = \{X_1(k_1), X_2(k_2), \dots, X_p(k_p)\}$$

przy czym

$$\pi X_i(k_i) = y_i.$$

F^* będziemy nazywali częściowym krokiem produkcji. Mówiąc prościej krok częściowy produkcji polega na jednoczesnym wykonaniu jednej lub więcej operacji składania przedmiotów ze zbioru $X(k)$ w ten sposób, że każdy przedmiot ze zbioru $X(k)$ może być bezpośrednim składnikiem tylko jednego przedmiotu należącego do $Y(p)$.

Zbiór $X(k)$ nazwiemy składnikiem kroku F^* , a zbiór $Y(p)$ — wynikiem kroku F^* . Jeżeli $p = 1$, to krok nazwiemy prostym.

Przykład. Jeżeli

$$X(5) = \{a, b, c, d, e\}$$

oraz w wyniku kroku F^* z elementów a i c utworzono przedmiot $\pi \{a, c\}$, a z przedmiotów b i d utworzono przedmiot $\pi \{b, d\}$, to

$$F^* X(5) = \{\pi \{a, c\}, \pi \{b, d\}\}.$$

Niech

$$Z(r) = FX(k)$$

oznacza zbiór przedmiotów

$$\{z_1, z_2, \dots, z_r\},$$

taki że

$$Z(r) = (X(k) - \bigcup_{i=1}^p \delta y_i) \cup F^* X(k).$$

gdzie — oznacza różnicę zbiorów.

F będziemy nazywali krokiem właściwym produkcji, zbiór $X(k)$ składnikiem tego kroku oraz zbiór $FX(k)$ wynikiem kroku F . Np. dla poprzedniego przykładu krok F będzie polegał na przekształceniu zbioru

$$X(5) = \{a, b, c, d, e\}$$

na zbiór

$$FX(5) = \{e, \pi \{a, c\}, \pi \{b, d\}\}.$$

A więc wynikiem kroku F jest zbiór, którego elementami są wszystkie wyniki kroku częściowo F^* oraz te elementy zbioru składników, które nie zostały użyte w żadnej operacji składania kroku F^* .

Produkcją będziemy nazywali ciąg

$$X_0(k_0), X_1(k_1), \dots, X_n(k_n),$$

jeżeli dla każdego i , $0 \leq i < n$

$$X_{i+1}(k_{i+1}) = F_{i+1} X_i(k_i)$$

gdzie F_{i+1} oznacza $i + 1$ krok produkcji. Liczbę n nazwiemy długością produkcji. Produkcję będziemy oznaczali literami P , Q , R , ewentualnie ze wskaźnikiem u dołu np. P_1, Q_1, R_1 etc.

Przykład. Ciąg

$$X_0(5) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$X_1(3) = \{e, \pi \{a, c\}, \pi \{b, d\}\}$$

$$X_2(2) = \{\pi \{e, \pi \{a, c\}\}, \pi \{b, d\}\}$$

jest produkcją, gdyż

$$X_1(3) = F_1 X_0(5)$$

oraz

$$X_2(2) = F_2 X_1(3).$$

W wyniku tej produkcji ze zbioru elementów

$$X_0(5) = \{a, b, c, d, e\}$$

w dwu krokach F^1 i F^2 otrzymaliśmy dwa przedmioty: $\pi \{a, c\}$ i $\pi \{b, d\}$.

Jeżeli n jest długością produkcji P oraz $k_n = 1$, to P nazwiemy produkcją jednostkową, a jeżeli $k_n > 1$, to P nazwiemy produkcją równoległą. Produkcja w poprzednim przykładzie była więc produkcją równoległą. W wyniku produkcji jednostkowej otrzymujemy jeden przedmiot. Przedmiot ten będziemy nazywali produktem końcowym produkcji P .

Przykład: Jeżeli w poprzednio rozpatrywanym przykładzie produkcji dołączymy jeszcze jeden krok F_3 , który ze zbioru

$$X_2(2) = \{\pi \{e, \pi \{a, c\}\}, \pi \{b, d\}\}$$

utworzy zbiór

$$X_3(1) = \pi \{\pi \{e, \pi \{a, c\}\}, \pi \{b, d\}\},$$

to

$$X_0(5), X_1(3), X_2(2), X_3(1)$$

będzie produkcją jednostkową, a $X_3(1)$ produktem końcowym tej produkcji.

Jeżeli wszystkie kroki produkcji są proste, to produkcję nazwiemy *sekwencyjną*, jeżeli natomiast choć jeden krok produkcji nie jest prosty, to produkcję nazwiemy *jednoczesną*.

W produkcji sekwencyjnej w każdym kroku składany jest tylko jeden przedmiot, natomiast w produkcji jednoczesnej mogą istnieć kroki, w trakcie których ze składników zostaje jednocześnie utworzonych więcej niż jeden przedmiot. Rozpatrywany do tej pory przykład produkcji był produkcją jednoczesną, gdyż w kroku F_1 zostały jednocześnie złożone dwa przedmioty $\pi\{a, c\}$ oraz $\pi\{b, d\}$.

Natomiast produkcja sekwencyjna może mieć postać jak niżej:

$$X_0(5) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$X_1(4) = \{\pi\{a, c\}, b, d, e\}$$

$$X_2(3) = \{\pi\{a, c\}, \pi\{b, d\}, e\}$$

$$X_3(2) = \{\pi\{\pi\{a, c\}, e\}, \pi\{b, d\}\}$$

$$X_4(1) = \pi\{\pi\{\pi\{a, c\}, e\}, \pi\{b, d\}\}$$

Zauważmy, że w ten sposób każdemu przedmiotowi (produktowi końcowemu) można przypisać pewną formułę, którą będziemy nazywać *strukturą* przedmiotu. Np. przedmiot $X_4(1)$ posiada strukturę

$$\pi\{\pi\{\pi\{a, c\}, e\}, \pi\{b, d\}\}.$$

Powstaje tu pewna niejednoznaczność, gdyż ten sam napis raz oznacza przedmiot, a innym razem jego strukturę, jednakże nie będzie to prowadzić do nieporozumień, gdyż zawsze odpowiedni napis będziemy poprzedzali słowem „przedmiot” lub „struktura”.

Jeżeli przedmioty x i y posiadają jednakowe struktury, to przedmioty te nazwiemy *równoważnymi* i zapiszemy

$$x \equiv y.$$

Jeżeli produkty końcowe produkcji P i Q są równoważne, to powiemy że produkcje P i Q są równoważne i zapiszemy

$$P \equiv Q.$$

Niech

$$P = X_0(k_0), X_1(k_1), \dots, X_n(k_n)$$

$$Q = Y_0(p_0), Y_1(p_1), \dots, Y_n(p_n).$$

Jeżeli $P \equiv Q$ oraz dla każdego i , $0 \leq i \leq n$

$$X_i(k_i) \equiv Y_i(p_i),$$

to powiemy, że produkcje P i Q są *równe* i zapiszemy

$$P = Q.$$

Produkcje równoważne produkują więc jednakowe przedmioty, natomiast produkcje równe produkują jednakowe przedmioty w jednakowy sposób, tj. za pomocą takich samych operacji wykonywanych w takiej samej kolejności.

Ciąg
$$P = P_1, P_2, \dots, P_n, \quad n > 1$$

nazwiemy *produkcją seryjną*.

Jeżeli

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n,$$

to P nazwiemy *ustaloną, jednorodną produkcją seryjną*, natomiast jeżeli

$$P_1 \equiv P_2 \equiv \dots \equiv P_n,$$

to P nazwiemy *ustaloną niejednorodną produkcją seryjną*.

Jeżeli natomiast istnieją takie i, j , $1 \leq i, j \leq n$, że

$$P_i \neq P_j,$$

to P nazwiemy *ustaloną niejednorodną produkcją seryjną*.

Produkcja ustalona produkuje więc jednakowe przedmioty w każdym poszczególnym procesie jednostkowych wchodzących w skład produkcji seryjnej. Jeżeli wszystkie przedmioty są produkowane w identyczny sposób, to mówimy o produkcji jednorodnej. Natomiast jeżeli w wyniku produkcji seryjnej, otrzymane produkty końcowe są jednakowe jednakże zostały one otrzymane przez równoważne produkcje jednostkowe, to produkcja taka jest niejednorodna. Tzn. że produkty takiej produkcji zostały otrzymane w różny spo-

sób, np. za pomocą różnych operacji wykonywanych w różnej kolejności. Natomiast produkcję w wyniku której otrzymujemy różne przedmioty, nazywamy zmienną.

Produkcja masowa

Niech $\mathfrak{X}(n)$ ewentualnie $\mathfrak{X}_i(n)$ oznacza układ n zbiorów przedmiotów

$$\mathfrak{X}(n) = X_1(k_1), X_2(k_2), \dots, X_n(k_n)$$

i niech P oznacza produkcję jednostkową długości s , z krokami F_1, F_2, \dots, F_s , oraz zbiorem elementów $X(k)$. Przyjmiemy ponadto, krok F_0 , który oznacza nieutworzenie żadnego przedmiotu ze zbioru składników, tj.

$$F_0 X(k) = X(k).$$

Przyjmiemy ponadto, że $\mathfrak{X}_1(n)$ oznacza taki układ zbiorów, że

$$X_1(k_1) = X_2(k_2) = \dots = X_n(k_n) = X(k).$$

Przez

$$Y(i) = \mathfrak{F}_i \mathfrak{X}(n) \quad 0 \leq i \leq n$$

będziemy rozumieli przyporządkowanie układowi $\mathfrak{X}(n)$ układu $Y(i)$ określonego następująco:

$$\mathfrak{F}_i \mathfrak{X}(n) = \begin{cases} F_0 X_j(k_j), & \text{jeżeli } j > i, \\ F_1 X_j(k_j), & \text{jeżeli } j = i, \\ F_2 X_j(k_j), & \text{jeżeli } j = i - 1, \\ \dots & \dots \\ F_s X_j(k_j), & \text{jeżeli } j = i - s, \\ F_0 X_j(k_j), & \text{jeżeli } j < i - s. \end{cases}$$

Produkcją masową \mathfrak{M} nazwiemy ciąg

$$\mathfrak{X}_1(n), \mathfrak{X}_2(n), \dots, \mathfrak{X}_{n+s}(n)$$

jeżeli $n > s$, oraz dla każdego i , $1 \leq i \leq n + s$

$$\mathfrak{X}_{i+1}(n) = \mathfrak{F}_i \mathfrak{X}_i(n).$$

Produkcję P będziemy nazywali bazą produkcji masowej \mathfrak{M} , a \mathfrak{F}_i , krokiem i produkcji masowej \mathfrak{M} .

Z podanej definicji widać, że w pierwszym kroku \mathfrak{F}_1 produkcji \mathfrak{M} zostanie wykonany tylko jeden krok bazy F_1 na zbiorze $X_1(k_1)$. W drugim kroku produkcji \mathfrak{M} zostaną wykonane dwa kroki bazy, F_1 na zbiorze $X_2(k_2)$ oraz F_2 na zbiorze $F_1 X_1(k_1)$ itd. W kroku s produkcji \mathfrak{M} zostanie utworzony ze zbioru $X_1(k_1)$ pierwszy produkt końcowy bazy P . W kroku $s + 1$ zostanie utworzony drugi produkt końcowy ze zbioru $X_2(k_2)$ itd. Po n krokach procesu \mathfrak{M} otrzymamy $n - s$ produktów końcowych, ze zbiorów $X_1(k_1), X_2(k_2), \dots, X_{n-s}(k_{n-s})$. Po dalszych $s - n$ krokach, tj. po $n + s$ krokach procesu \mathfrak{M} , otrzymamy n produktów końcowych, ze wszystkich elementów $X_1(k_1), X_2(k_2), \dots, X_n(k_n)$.

Ciąg

$$\mathfrak{X}_1(n), \mathfrak{X}_2(n), \dots, \mathfrak{X}_s(n)$$

nazwiemy *rozruchem* produkcji \mathfrak{M} .

Ciąg

$$\mathfrak{X}_{s+1}(n), \mathfrak{X}_{s+2}(n), \dots, \mathfrak{X}_n(n)$$

nazwiemy *stanem ustalonym* produkcji \mathfrak{M} .

Ciąg

$$\mathfrak{X}_{n+1}(n), \mathfrak{X}_{n+2}(n), \dots, \mathfrak{X}_{n+s}(n)$$

nazwiemy *końcem* produkcji \mathfrak{M} .

W czasie rozruchu produkcji nie otrzymujemy żadnych produktów końcowych a tylko produkty częściowe. W stanie ustalonym produkcji w każdym kroku otrzymujemy jeden produkt końcowy. W końcu produkcji otrzymujemy również w każdym kroku jeden produkt końcowy, jednakże kolejno wszystkie operatory bazy F_1, F_2, \dots, F_s przestają produkować nowe przedmioty.

Przykład. Niech

$$\mathfrak{X}_1(5) = X_1(k), X_2(k), X_3(k), X_4(k), X_5(k)$$

lub krócej

$$\mathfrak{X}_1(5) = X_1, X_2, X_3, X_4, X_5.$$

Niech bazą będzie produkcja P z krokami F_1, F_2, F_3 , o długości 3. Wtedy produkcja masowa o bazie P może mieć postać następująca:

Rozruch

$$\mathfrak{X}_1(5) = X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$$

$$\mathfrak{F}_1 \mathfrak{X}_1(5) = \mathfrak{X}_2(5) = F_1 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$$

$$\mathfrak{F}_2 \mathfrak{X}_2(5) = \mathfrak{X}_3(5) = F_2 F_1 X_1, F_1 X_2, X_3, X_4, X_5$$

Stan ustalony

$$\mathfrak{F}_3 \mathfrak{X}_3(5) = \mathfrak{X}_4(5) = F_3 F_2 F_1 X_1, F_2 F_1 X_2, F_1 X_3, X_4, X_5$$

$$\mathfrak{F}_4 \mathfrak{X}_4(5) = \mathfrak{X}_5(5) = F_3 F_2 F_1 X_1, F_3 F_2 F_1 X_2, F_2 F_1 X_3, F_1 X_4, X_5$$

$$\mathfrak{F}_5 \mathfrak{X}_5(5) = \mathfrak{X}_6(5) = F_3 F_2 F_1 X_1, F_3 F_2 F_1 X_2, F_3 F_2 F_1 X_3, F_2 F_1 X_4, F_1 X_5$$

Zakończenie produkcji

$$\mathfrak{F}_6 \mathfrak{X}_6(5) = \mathfrak{X}(5) = \\ = F_3 F_2 F_1 X_1, F_3 F_2 F_1 X_2, F_3 F_2 F_1 X_3, F_3 F_2 F_1 X_4, F_2 F_1 X_5$$

$$\mathfrak{F} \mathfrak{X}(5) = \mathfrak{X}(5) = \\ = F_3 F_2 F_1 X_1, F_3 F_2 F_1 X_2, F_3 F_2 F_1 X_3, F_3 F_2 F_1 X_4, F_3 F_2 F_1 X_5$$

Plan produkcji

Każdemu przedmiotowi można w sposób jednoznaczny przyporządkować drzewo (definicja drzewa podana jest niżej) w następujący sposób: Przedmiotom przyporządkowujemy gałęzie drzewa a operacjom składania-rozgałęzienia w ten sposób, że składnikom odpowiadają gałęzie wchodzące do rozgałęzienia reprezentującego daną operację, a gałęzi wychodzącej z tegoż rozgałęzienia — odpowiada przedmiot powstały w wyniku tejże operacji składania. Gałęzi końcowej odpowiada wtedy produkt końcowy procesu; gałęziom wolnym drzewa odpowiadają elementy przedmiotu.

Zanim pokażemy dokładniej sposób przyporządkowania przedmiotom — drzew, podamy najpierw definicję drzewa.

Niech G oznacza skończony zbiór elementów zwanych gałęziami i niech R oznacza skończony zbiór elementów zwanych rozgałęzieniami.

Elementy zbioru X (gałęzie) będziemy oznaczali małymi literami alfabetu łacińskiego, np. a, b, c , ewentualnie ze wskaźnikami u dołu $a_1, a_2, a_k, b_1, b_2, b_k$, itd. Elementy zbioru R będziemy oznaczali du-

żymi literami alfabetu łacińskiego, A, B, C , ewentualnie ze wskaźnikami, u dołu $A_1, A_2, A_k, B_1, B_2, B_k$ itd.

Jeżeli a jest elementem zbioru G , zapiszemy $a \in G$ i podobnie dla zbioru R — $A \in R$ oznacza, że A jest elementem zbioru R .

Drzewem będziemy nazywali parę uporządkowaną $\langle G, R \rangle$ spełniającą następujące warunki:

1) Każdemu $A \in R$ jest przyporządkowany ciąg

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle, \quad k \geq 1, a_i \in G$$

a_0 — będziemy nazywali gałęzią wychodzącą (wyjściową) z rozgałęzienia A .

a_1, a_2, \dots, a_k — będziemy nazywali gałęziami wchodzącymi (wejściowymi) do rozgałęzienia A .

k — nazwiemy rzędem rozgałęzienia A .

Ciąg

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle$$

będziemy oznaczali też przez $g(A)$, i -ty element tego ciągu — przez $g_i(A)$. Jeżeli A ma rząd k będziemy też pisali $A_{(k)}$.

2) Dla każdej gałęzi $a \in G$ istnieje co najmniej jedno takie rozgałęzienie

$$A_k \in R, \text{ że}$$

$$a = g_i(A_k); \quad 0 \leq i \leq k$$

3) Istnieje dokładnie jeden taki element $a \in G$, że dla każdego $A_k \in R$ i dla każdego $i, 0 < i \leq k$

$$a^* \neq g_i(A_k),$$

a^* — będziemy nazywali gałęzią końcową drzewa D , a odpowiadające jej rozgałęzienie A — rozgałęzieniem końcowym drzewa D .

4) Dla każdej gałęzi $a \in G$ istnieje dokładnie jeden taki ciąg

$$a_0, A_{k_0}, a_1, A_{k_1}, \dots, a_{n-1}, A_{k_{n-1}}, a_n,$$

że

$$a_0 = a^*, \quad a_n = a$$

oraz dla każdego $i, 0 \leq i \leq k_{n-1}$

$$a_i = g_0(A_{k_i}),$$

$$a_{i+1} = g_j(A_{k_i}); \quad 0 < j \leq k_i$$

Ciąg

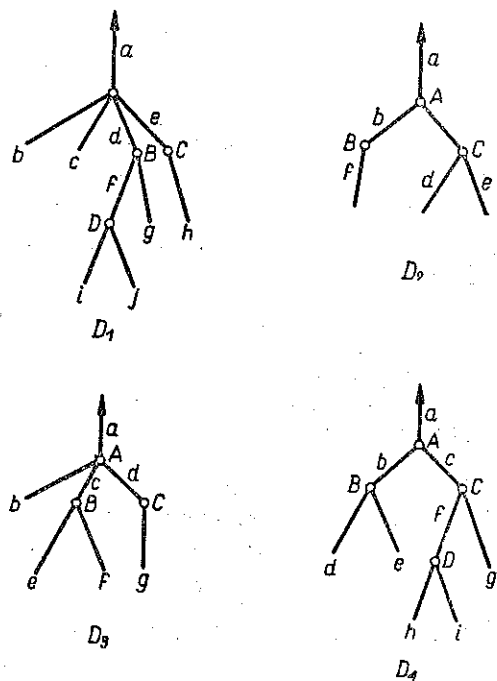
$$a_0, A_{k_0}, a_1, A_{k_1}, \dots, a_{n-1}, A_{k_{n-1}}, a_n$$

będziemy nazywali drogą od a_n do a_0 w drzewie D .

A więc warunek 4) mówi, że z każdej gałęzi istnieje dokładnie jedna droga do gałęzi końcowej. Jeżeli $a \in K$ i nie istnieje takie rozgałęzienie $A \in R$, że

$$a = g_0(A)$$

to A nazwiemy gałęzią *wolną* drzewa. Gałęzie nie będące gałęzią końcową drzewa i nie będące gałęzią wolną nazwiemy *związanymi*. Przykłady drzew pokazano na rys. 1.



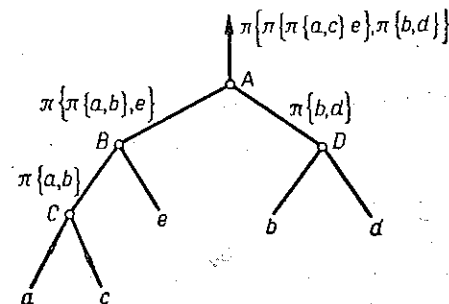
Rys. 1

Strzałkami skierowanymi do rozgałęzienia zaznaczono gałęzie wejściowe, a strzałkami skierowanymi od rozgałęzienia — gałęzie wyjściowe. Np. w drzewie R_1 końcową jest gałąź a , a gałęziami

wolnymi są b, c, i, j, h . Pozostałe gałęzie, tj. d, f, e są związanymi. Podobnie w drzewie D_2 gałęzią końcową jest a , gałęziami wolnymi są f, d, e , a związanymi b i c . Przykład. Przedmiotowi

$$\pi \{ \pi \{ \pi \{ a, c \}, e \}, \pi \{ b, d \} \}$$

przypiszemy drzewo (rys. 2).



Rys. 2

Drzewo przedmiotu wraz z ciągiem wszystkich kroków jego produkcji jednostkowej będziemy nazywali *planem* produkcji jednostkowej. Na przykład planem produkcji

$$\begin{aligned} x_0(5) &= \{a, b, c, d, e\} \\ F_1 X_0(5) = x_1(3) &= \{e, \pi \{a, c\}, \pi \{b, d\}\} \\ F_2 X_1(3) = x_2(2) &= \{\pi \{e, \pi \{a, c\}\}, \pi \{b, d\}\} \\ F_3 X_2(2) = x_3(1) &= \pi \{ \pi \{e, \pi \{a, c\}\}, \pi \{b, d\} \} \end{aligned}$$

będzie wyżej podane drzewo oraz ciąg kroków

$$\begin{aligned} F_1 X_0(5) &= C, D \\ F_2 F_1 X_0(5) &= B \\ F_3 F_2 F_1 X_0(5) &= A \end{aligned}$$

Znaczy to, że w pierwszym kroku F_1 mają być wykonane dwie operacje złożenia, oznaczone na drzewie przedmiotu literami C oraz D . W drugim kroku F_2 wykonywana jest jedna operacja oznaczona literą B , i w trzecim kroku również jedna operacja, oznaczona literą A .

Planem seryjnej produkcji ustalonej i jednorodnej będziemy nazywali parę $\langle P, n \rangle$, gdzie P jest planem dowolnego procesu jednostkowego produkcji seryjnej, a n — liczbą produkcji jednostkowych w produkcji seryjnej.

Planem seryjnej produkcji ustalonej niejednokrotnie będziemy nazywali ciąg

$$D, F_1^1, F_2^1, \dots, F_k^1, F_1^2, F_2^2, \dots, F_{k_2}^2, \dots, F_1^n, F_2^n, \dots, F_{k_n}^n,$$

gdzie D jest drzewem produkowanego przedmiotu, a ciąg

$$F_1^i, F_2^i, \dots, F_{k_i}^i$$

przedstawia kroki i -tej produkcji jednostkowej, występującej w tej produkcji seryjnej.

Planem seryjnej produkcji zmiennej jest ciąg

$$D_1, D_2, \dots, D_n, F_1^1, F_2^1, \dots, F_{k_1}^1, \\ F_1^2, F_2^2, \dots, F_{k_2}^2, \dots, F_1^n, F_2^n, \dots, F_{k_n}^n,$$

gdzie D_i jest drzewem i -tego produktu końcowego, a ciąg kroków ma znaczenie nie jak poprzednio.

Planem produkcji masowej będziemy nazywali ciąg

$$D, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, p,$$

gdzie D jest drzewem produkowanego przedmiotu, a \mathfrak{F}_i i -tym krokiem produkcji, oraz p — liczbą przedmiotów, które mają zostać wyprodukowane.

Plan produkcji mówi więc o tym, o jakiej strukturze przedmiot zostanie wyprodukowany i za pomocą jakich operacji składania oraz w jakiej kolejności mają być te operacje wykonane. Mówiąc prościej, plan produkcji mówi co mamy wykonać, w jaki sposób i w jakiej ilości.

Koszt i wartość produkcji

Jeżeli y jest przedmiotem, to koszt produkcji przedmiotu y oznaczmy przez $K(y)$, a wartość wyprodukowanego przedmiotu y —

przez $W(y)$. $K(X)$ i $W(X)$ niech oznaczają wartość i koszt zbioru przedmiotów X . Przyjmiemy, że

$$W(X) = \sum_{i=1}^n W(x_i),$$

$$K(X) = \sum_{i=1}^n K(x_i).$$

Jeżeli

$$y = \pi \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \pi X(k_n),$$

to

$$K(y) = \sum W(x_i) + K_0(y) + K_t(y) + K_m(y) = W(X) + K_0(y) + K_t(y) + K_m(y) \\ = W(X) + C',$$

gdzie

$K_0(y)$ — koszt wykonania operacji złożenia przedmiotu y z jego składników,

$K_m(y)$ — koszt magazynowania składników przedmiotu y ,

$K_t(y)$ — koszt transportu składników z magazynu do operatora.

C' — będziemy nazywali *stałą składania*. (W skład stałej składania mogą wchodzić nie tylko koszty $K_0(y)$, $K_m(y)$, $K_t(y)$, ale również wszelkie inne koszty związane ze złożeniem przedmiotu z jego składników bezpośrednich).

Założymy ponadto, że

$$W(y) = C'' K(y),$$

gdzie C'' jest współczynnikiem wartości takim, że

$$C'' = 1, \quad \text{jeżeli } \delta y = \Phi,$$

$$C'' > 1, \quad \text{jeżeli } \delta y \neq \Phi.$$

Niech

$$X_0, X_1, \dots, X_n$$

będzie produkcją jednostkową. Obliczymy wartość i koszt produktu końcowego X_n -tej produkcji.

Przyjmiemy

$$K(X_0) = W(X_0) = C_0.$$

Ponieważ

$$X_1 = F_1^* X_0 \cup (X_0 - \delta F_1^* X_0),$$

więc

$$K(X_1) = K(F_1^* X_0) + K(X_0) - K(\delta F_1^* X_0).$$

Zgodnie z określeniem kosztu przedmiotu złożonego

$$K(F_1^* X_0) = W(\delta F_1^* X_0) + C_1'.$$

A więc

$$K(X_1) = K(X_0) + (W(\delta F_1^* X_0) - K(\delta F_1^* X_0)) + C_1'.$$

Jednakże

$$W(\delta F_1^* X_0) - K(\delta F_1^* X_0) = 0.$$

Z powyższego wynika że

$$K(X_1) = K(X_0) + C_1 = C_0 + C_1'.$$

Ponieważ

$$X_2 = F_2^* X_1 \cup (X_1 - \delta F_2^* X_1),$$

więc

$$K(X_2) = K(F_2^* X_1) + K(X_1) - K(\delta F_2^* X_1).$$

Z definicji kosztu przedmiotu złożonego

$$K(F_2^* X_1) = W(\delta F_2^* X_1) + C_2'.$$

Stąd

$$K(X_2) = K(X_1) + (W(\delta F_2^* X_1) - K(\delta F_2^* X_1)) + C_2'.$$

Przyjmijmy, że

$$K(\delta F_2^* X_1) = k \cdot K(X_1), \quad \text{gdzie } 0 < k < 1.$$

Wtedy możemy napisać

$$K(X_2) = K(X_1) + k(C_1'' K(X_1) - K(X_1)) + C_2',$$

skąd otrzymujemy ostatecznie

$$K(X_2) = (C_0 + C_1') (1 + k(C_1'' - 1)) + C_2'.$$

Jeżeli współczynnik wartości C_1'' jest bardzo bliski jedności, to

$$K(X_2) = C_0 + C_1' + C_2'.$$

Jeżeli natomiast współczynnik k jest bardzo bliski zera, to również

$$K(X_2) = C_0 + C_1' + C_2'.$$

Współczynnik k mówi, ile elementów ze zbioru składników zostało wykorzystanych w kolejnym kroku produkcji. W dalszym ciągu dla uproszczenia będziemy przyjmowali, że k jest bardzo bliskie jedności, tzn., że w każdym kroku jest wykorzystywana maksymalna ilość składników, wobec czego możemy napisać

$$K(X_2) = (C_0 + C_1') C_1'' + C_2'.$$

Ogólnie dla zbioru X_i można podać następujący przybliżony iteracyjny wzór na koszt

1. $K(X_0) = C_0,$
2. $K(X_{i+1}) = K(X_i) C_i'' + C_{i+1}'.$

Wzór ten jest po prostu uogólnieniem wzoru na koszt jednego przedmiotu złożonego. Mówi on, że koszt przedmiotów wyprodukowanych w i -tym kroku produkcji jest równy sumie wartości składników wszystkich wyprodukowanych przedmiotów (półproduktów) oraz pewnej stałej. Pisząc powyższy wzór w postaci jawnej otrzymamy następujące wyrażenie na koszt produktu końcowego:

$$K(X_n) = (\dots ((C_0 + C_1') C_1'' + C_2') C_2'' + \dots + C_{n-1}') C_{n-1}'' + C_n'.$$

Jeżeli dla każdego i oraz j , $0 < i, j \leq n$, $C_i' = C_j'$ oraz $C_i'' = C_j''$, to produkcję nazwiemy *zrównoważoną*. Dla produkcji zrównoważonej koszt produktu końcowego wynosi więc

$$K(X_n) = (((C_0 + C') C'' + C') C'' + \dots + C') C'' + C'.$$

Wyrażenie

$$K_r(X_n) = C_0 + \sum_{i=1}^n C_i'$$

nazwiemy kosztem rzeczywistym produktu końcowego X_n , natomiast wyrażenie

$$p = \frac{W(X_n)}{K_r(X_n)}$$

współczynnikiem wartości produkcji. Współczynnik ten mówi, jaki jest stosunek wartości produktu do kosztów rzeczywistych jego wyprodukowania.

Wzory te są oczywiście słuszne również dla produkcji seryjnej i masowej z tym, że inne wartości będą miały w nich stałe składowania oraz współczynniki wartości C_i .

Organizacja produkcji

Przez organizację produkcji będziemy rozumieli jej techniczną realizację. Zanim podamy zasady organizacji omawianych tu typów produkcji pokażemy najpierw organizację produkcji *normalnej*, a wszystkie inne typy produkcji sprowadzimy później do produkcji normalnych.

Zbiór

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

nazwiemy *normalnym*, jeżeli istnieje co najwyżej jedno takie j , $1 \leq j \leq k$, że dla każdego i , $1 \leq i \leq k$

$$\delta x_i = \Phi, \quad \text{jeżeli} \quad i \neq j,$$

oraz

$$\delta x_i \neq \Phi, \quad \text{jeżeli} \quad i = j.$$

A więc zbiór normalny, to taki zbiór, którego co najwyżej jeden element jest przedmiotem złożonym a wszystkie elementy są przedmiotami prostymi.

Produkcję jednostkową sekwencyjną

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

nazwiemy *normalną*, jeżeli dla każdego i , $1 \leq i \leq k$, X_i jest zbiorem normalnym.

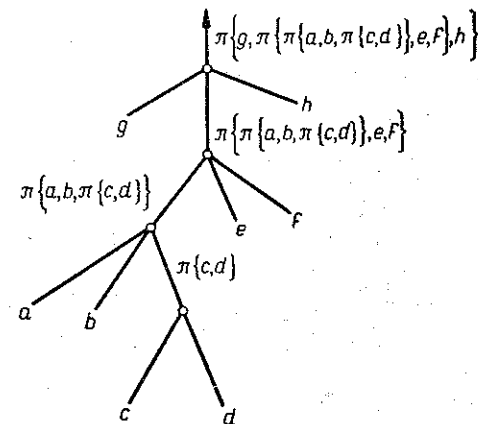
Z definicji produkcji wynika, że zbiór X_1 jest zbiorem przedmiotów prostych, a pozostałe zbiory produkcji normalnej zawierają dokładnie po jednym przedmiocie złożonym.

Przedmiot, którego zbiór składników w bezpośrednich jest normalny będziemy nazywać *przedmiotem normalnym*.

Przykład. Rozpatrzmy produkcję przedmiotu normalnego o strukturze następującej:

$$\pi \{g, \{\pi \{a, b, \pi \{c, d\}\}, \{e, f\}, h\}\}.$$

Drzewo tego przedmiotu przedstawia rys. 3.



Rys. 3

Produkcję tego przedmiotu zapiszemy w postaci

$$X_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$F_1 X_1 = X_2 = \{a, b, \pi \{c, d\}, e, f, g, h\}$$

$$F_2 X_2 = X_3 = \{\pi \{a, b, \pi \{c, d\}\}, e, f, g, h\}$$

$$F_3 X_3 = X_4 = \{\pi \{\pi \{a, b, \pi \{c, d\}\}, e, f\}, g, h\}$$

$$F_4 X_4 = X_5 = \pi \{\pi \{\pi \{a, b, \pi \{c, d\}\}, c, f\}, g, h\}$$

Produkcję seryjną

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

nazwiemy *normalną produkcją seryjną*, jeżeli dla każdego i , $1 \leq i \leq n$, P_i jest normalnym procesem jednostkowym.

Jeżeli bazą produkcji masowej \mathfrak{M} jest jednostkowa produkcja normalna, to produkcję \mathfrak{M} nazwiemy *masową produkcją normalną*.

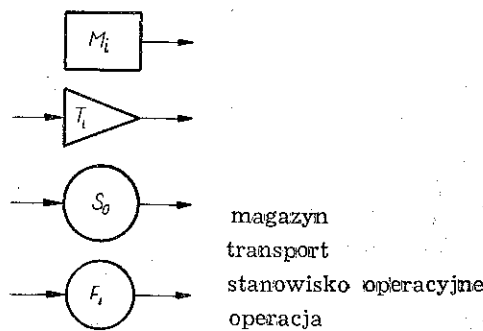
Jeżeli jako bazę produkcji masowej przyjmiemy produkcję podaną w powyższym przykładzie, to produkcja masowa będzie miała postać:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \\ \mathfrak{X}_2 &= \mathfrak{X}_3 = F_1 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \\ \mathfrak{X}_3 &= \mathfrak{X}_4 = F_2 X_1, F_1 X_2, X_3, X_4, X_5 \\ \mathfrak{X}_4 &= \mathfrak{X}_5 = F_3 X_1, F_2 X_2, F_1 X_3, X_4, X_5 \\ \mathfrak{X}_5 &= \mathfrak{X}_6 = F_4 X_1, F_3 X_2, F_2 X_3, F_1 X_4, X_5 \\ \mathfrak{X}_6 &= \mathfrak{X}_7 = F_4 X_1, F_4 X_2, F_4 X_3, F_3 X_4, F_2 X_5 \\ \mathfrak{X}_7 &= \mathfrak{X}_8 = F_4 X_1, F_4 X_2, F_4 X_3, F_4 X_4, F_3 X_5 \\ \mathfrak{X}_8 &= \mathfrak{X}_9 = F_4 X_1, F_4 X_2, F_4 X_3, F_4 X_4, F_4 X_5 \end{aligned}$$

Do realizacji dowolnej produkcji składania konieczne są:

1. Magazyn przedmiotów (przedmiotów prostych, półproduktów i produktów końcowych).
2. Stanowiska operacyjne wykonujące występujące w produkcji operacje składania.
3. Transport przedmiotów.

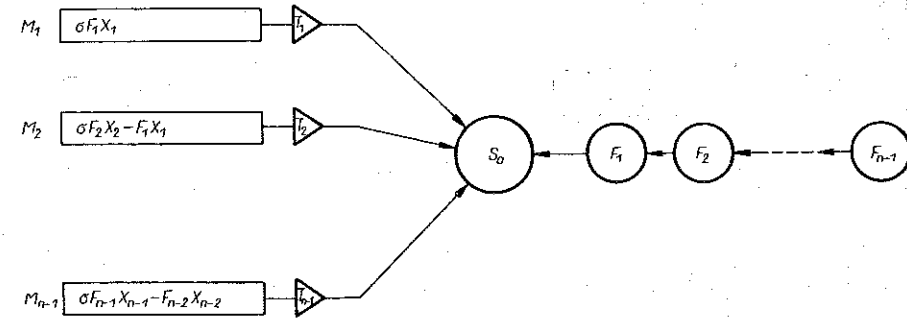
Stanowisko operacyjne nazwiemy *uniwersalnym* jeżeli może ono wykonywać każdą operację występującą w procesie. Stanowisko nazwiemy *specjalnym* jeżeli może ono wykonywać tylko jedną z operacji występujących w procesie. Dla opisu organizacji produkcji przyjmijmy następujące oznaczenia graficzne:



Rys. 4

Z definicji normalnej produkcji jednostkowej wynika, że może być ona zrealizowana według schematu podanego na rys. 5. Sche-

mat ten będziemy nazywali schematem *produkcji gniazdowej*. W produkcji gniazdowej znajduje się jedno uniwersalne stanowisko operacyjne S_0 , wykonujące kolejno wszystkie operacje procesu normalnego F_1, F_2, \dots, F_{n-1} . Ponadto w produkcji tej występuje $n-1$



Rys. 5

magazynów M_1, M_2, \dots, M_{n-1} , w których magazynowane są odpowiednio przedmioty

$$\begin{aligned} &\delta F_1 X_1 \\ &\delta F_2 X_2 - F_1 X_1 \\ &\dots\dots\dots \\ &\delta F_{n-1} X_{n-1} - F_{n-2} X_{n-2} \end{aligned}$$

Oczywiście wszystkie $n-1$ magazynów przedmiotów prostych możemy uważać za jeden magazyn z $n-1$ miejscami. Każdy z magazynów M_i zawiera wszystkie przedmioty proste wchodzące w skład przedmiotu $F_i X_i$, tzn. elementy potrzebne do wykonania kroku F_i . Wykonanie kroku F_i w produkcji normalnej polega na zrealizowaniu następujących czynności:

1. Pobranie przedmiotów $F_i X_i - F_{i-1} X_{i-1}$ (tj. składników prostych) z magazynu M_i .
2. Transport pobranych elementów z magazynu do stanowiska operacyjnego S_0 .
3. Nastawienie stanowiska operacyjnego na wykonanie operacji F_i .
4. Wykonanie nastawionej operacji przez stanowisko robocze,

na pobranych z magazynu elementach oraz na znajdującym się na stanowisku operacyjnym produkcie częściowym $F_{i-1} X_{i-1}$.

Dla schematu normalnej produkcji gniazdowej jest charakterystyczne uniwersalne stanowisko operacyjne, oraz to, że produkt częściowy każdej operacji pozostaje nieruchomy na stanowisku operacyjnym.

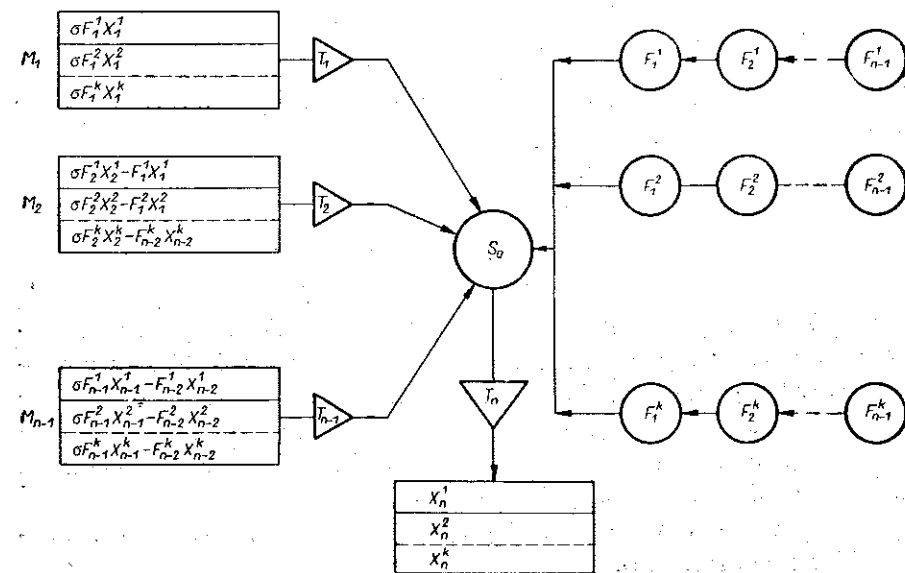
Podobnie możemy określić schemat normalnej seryjnej produkcji gniazdowej. Niech normalna produkcja seryjna

$$P_1, P_2, \dots, P_k,$$

gdzie

$$P_j = X_1^j, X_2^j, \dots, X_n^j$$

będzie produkcją zmienną (tj. taką, w której w każdej produkcji



Rys. 6

jednostkowej P_i produkowany jest inny przedmiot), to schemat produkcji gniazdowej dla tego przypadku będzie miał postać pokazaną na rys. 6. Schemat ten jest bardzo podobny do schematu

produkcji jednostkowej z tą jedynie różnicą, że obecnie w każdym z magazynów M_i przechowywane są elementy każdej operacji $F_1^i, F_2^i, \dots, F_k^i$, oraz konieczny jest magazyn produktów końcowych każdej produkcji P_j , dokąd jest transportowany każdy produkt końcowy ze stanowiska operacyjnego S_0 . W związku z powyższym do podanych poprzednio czterech czynności dochodzi jeszcze czynność:

5. Przesłanie produktu końcowego do magazynu M_n , która jest wykonywana po zakończeniu każdej produkcji P_j .

Obecnie rozpatrzmy schemat organizacyjny normalnej produkcji masowej.

Niech

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

oznacza normalną produkcję jednostkową. Wprowadzimy oznaczenie

$$S_i = \delta F_i X_i - F_{i-1} X_{i-1}.$$

S_i jest więc zbiorem prostych składników przedmiotu $F_i X_i$. Z definicji normalnej produkcji jednostkowej wynika więc, że

$$X_i = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{n-1}.$$

Niech

$$x_1, x_2, \dots, x_{k+n}$$

będzie normalną produkcją masową. Wtedy możemy napisać, że

$$x_1 = X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^k = S_1^1, S_2^1, \dots, S_{n-1}^1, S_1^2, S_2^2, \dots, S_{n-1}^2, \dots, S_1^k, S_2^k, \dots, S_{n-1}^k.$$

Wprowadzając powyższe oznaczenia schemat organizacji normalnej produkcji masowej można przedstawić w postaci jaką pokazano na rys. 7. Schemat ten nazwiemy schematem produkcji taśmowej. W schemacie tym magazyny M_1, M_2, \dots, M_{n-1} zawierają składniki proste

$$M_1 S_1^1, S_2^1, \dots, S_{n-1}^1$$

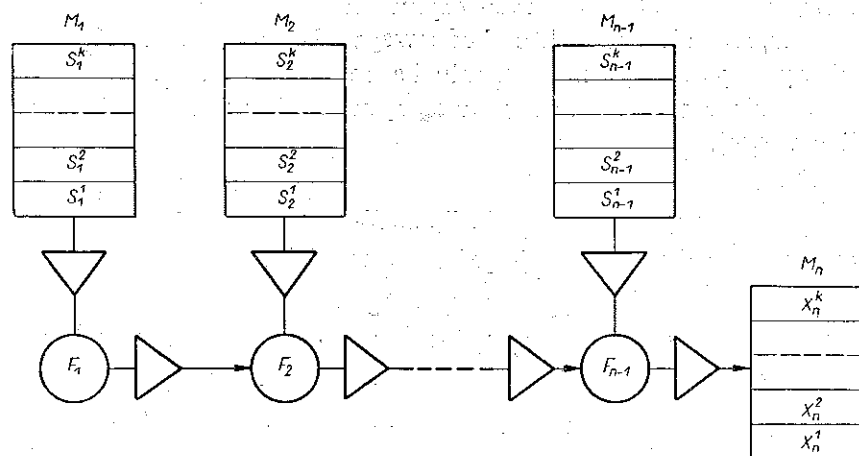
$$M_2 S_2^1, S_2^2, \dots, S_k^2$$

.....

$$M_{n-1} S_{n-1}^1, S_{n-2}^2, \dots, S_{n-1}^k$$

Składniki te z magazynów są kolejno transportowane do odpowiednich stanowisk operacyjnych, z których każde wykonuje tylko jedną operację produkcji. Wszystkie stanowiska operacyjne prak-

cują jednocześnie i każdy półprodukt jest przesyłany do następnego stanowiska operacyjnego (taśma). Produkty końcowe są magazynowane w magazynie M_n . Produkcja taśmowa wymaga więc jednakowego czasu trwania wszystkich operacji. Na schemacie tym można prześledzić wszystkie fazy produkcji.



Rys. 7

Łatwo wykazać, że każdą produkcję można rozłożyć na produkcje normalne. Schematy produkcji gniazdowej i taśmowej nie ulegną wtedy zasadniczej zmianie, z tą jedynie różnicą, że jeżeli jakiś składnik operacji nie jest przedmiotem prostym, to zamiast magazynu elementów w odpowiednim schemacie znajdzie się magazyn produktów końcowych odpowiedniej produkcji produkującej te właśnie elementy.

*

Przedstawiona próba matematyzacji niektórych pojęć teorii organizacji obejmuje niewielki zakres problematyki tej dziedziny, jednakże wydaje się, że w podobny sposób można ująć znacznie szerszy zakres zagadnień związany z teorią produkcji. Wydaje się również, że przedstawiony aparat pojęciowy pozwoli nie tylko na sprecyzowanie podstawowych pojęć teorii produkcji, ale również na liczbowe badanie własności procesów produkcyjnych.

Здзіслав Павляк

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЦЕССА СКЛАДЫВАНИЯ

Резюме

Предметом статьи является точная формулировка понятия производства а также некоторых других терминов связанных с производством. Статья состоит из следующих частей: производство, план производства, стоимость производства и организация производства.

В первой части представлены точные определения а также примеры единичного производства, серийного производства и примеры массового производства произвольных материальных предметов.

Вторая часть содержит точное определение понятия плана производства для каждого из классов производства, которые определяются в начале статьи.

В третьей части выделены общие формулы на стоимость произведенного продукта в процессе единичного производства.

В последней четвертой части объединяются известные принципы организации производства, а именно гнездовое производство и конвейерное производство, с понятиями введенными в первом разделе с указанием что они являются простым последствием принятых определений понятия производственного процесса.

Автор предполагает, что представленная концепция определения производства может быть применена к продолжающимся процессам.

Zdzisław Pawlak

A MATHEMATICAL THEORY OF ASSEMBLING

Summary

Concerned with a precise formulation of the concept of production and some other terms connected with production. Contents: Production.

Part I includes formal definitions and examples of unit production, serial production, and mass production of any material objects.

Part II offers a precise formulation of the concept of the plan of production for every type of production specified above.

Part III gives the derivations of the formulae of the costs of a product turned out in the process of unit production.

Part IV establishes relationships between the well-known principles of the organization of production namely nest production and assembly-line production, and the concepts defined in Part I; it is demonstrated that such principles are direct consequences of the adopted definition of the production process.

It seems probable that the concept of a definition of production as presented in the paper can also be applied to continuous processes.

TADEUSZ PSZCZOŁOWSKI

Prakseologiczne poglądy Friedricha von Gottl-Ottlilienfelda

Oskar Lange w pierwszym rozdziale drugiego tomu *Ekonomii politycznej* („*Ekonomista*“ nr 1/1962 oraz *Człowiek i technika w produkcji*, Warszawa 1965, PWN, seria Omega) wspomina o pracy Fr. von Gottl-Ottlilienfelda pt. *Wirtschaft und Technik* włączonej do części drugiej zbiorowo opracowanego zarysu ekonomii społecznej (*Grundriss der Sozialökonomik*, Tübingen 1914). Lange pisze mianowicie, że praca Ottlilienfelda jest „jedynym dotychczas systematycznym ujęciem zasad prakseologicznych występujących we współczesnej technice produkcji“. Wzmianka ta spowodowała nasze zainteresowanie się wspomnianą pracą oraz jej autorem.

Fr. von Gottl-Ottlilienfeld (ur. 1868—1958) był filozofem i ekonomistą; wykładał m. in. na uniwersytetach w Heidelbergu, Brünne, Monachium, Kilonii, Hamburgu i od 1926 w Berlinie. Emerytowany w 1941. Jest autorem szeregu książek, w których powtarzają się zagadnienia bliskie prakseologii: *Gospodarczy charakter pracy* (*Der wirtschaftliche Charakter der Arbeit*, Berlin 1910), wymieniona praca o gospodarce i technice (*Wirtschaft und Technik*), *O znaczeniu racjonalizacji* (*Vom Sinn der Rationalisierung*, Berlin 1924), *Gospodarka jako życie* (*Wirtschaft als Leben*, Berlin 1925), *Fordismus* (Jena 1926), *Wieczna gospodarka* (*Ewige Wirtschaft*, Berlin 1943).

W pracy niniejszej zajmiemy się poglądami Gottl-Ottlilienfelda zawartymi przede wszystkim w dziele wskazanym przez Oskara Langego. Ze względu na operowanie terminologią prakseologiczną i terminami w wolnym przekładzie podawane są wszędzie w na-