

O ile siła ściskająca nie przekracza wartości krytycznej, wówczas po usunięciu się chwilowej przyczyny zakrzywiającej, pręt może odzyskać swą postać prostolinjową, w tym jednak tylko wypadku, o ile przed tem naprężenia w nim nie przekroczyły granicy sprężystości, t.j. o ile

$$\sigma = \frac{P}{A} < K'$$

Ze wszystkiego powiedzianego w tym paragrafie wynika, że o wyboczeniu może być tylko wówczas mowa, gdy siły ściskające pręt proste są ściśle osiowe i gdy wypadkowy ich mimośród tylko wtedy nie znika wraz z chwilową przyczyną zakrzywiającą, której był wynikiem, o ile siła podłużna większa jest od siły krytycznej. Pod tym względem różni się wyboczenie zasadniczo od tak zwanego jednoczesnego ściskania i zginania (por. § 3), kiedy mimośród sił podłużnych występuje już przy najmniejszych wartościach sił, wobec czego pręt jednocześnie ściskany i zginany nigdy prostolinjowej formy równowagi mieć nie może.

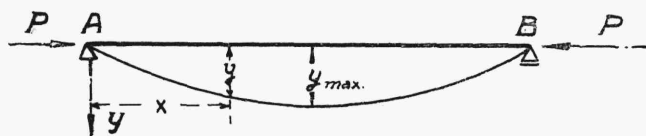
Niestateczna równowaga sprężysta prętów zakrzywionych ma narazie stosunkowo niewielkie znaczenie w konstrukcjach budowlanych (przykład — bardzo cienkie dźwigary łukowe) i dlatego tu omawiana nie będzie.

## 5. Rachunkowe wyznaczenie siły krytycznej.

O ile wyboczenie odbywa się w granicach sprężystości danego materiału, t.j. o ile  $K_k < K'$ , wówczas siłę krytyczną wyznaczyć możemy z równań teorii sprężystości.

Robimy to na podstawie rozważań następujących.

Przypuśćmy, iż pewien pręt prosty  $AB$ , obciążony przez podłużne siły ściskające  $P$ , większe od wartości krytycznej, przybrał krzywolinjową formę równowagi, przedstawioną na rys. 197. Niech będzie  $y = y_{\max}$



Rys. 197.

największe ugięcie na długości pręta, a  $M$  odpowiedni moment zginający, czyli że  $M = Py$ . O ile siły podłużne będą się tu zmniejszały,

wówczas jednocześnie z nimi będzie malało wygięcie pręta i moment zginający. Zmniejszając siły  $P$ , możemy doprowadzić je do wartości krytycznej  $P_k$ , przy której możliwa jest prostolinjowa forma równowagi pręta. Możemy więc wyznaczyć siłę  $P_k$  z równania następującego:

$$P_k = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{M}{y} \right] \quad (322)$$

Z rozdz. VII wiadomem jest, że równanie odkształconej może mieć dwie postacie różniczkowe, ściślej:

$$EJ \cdot \frac{1}{\rho} = M \quad (323)$$

i przybliżoną:

$$EJ y'' = M \quad (324)$$

kiedy uważamy wielkość  $(y')^2$  za znikomo małą w porównaniu z jednością. W wypadku zginania pręta siłami podłużnymi ugięcia przybierają wartości duże, a więc i kąty nachylenia stycznych do odkształconej względem osi  $X$ -ów nie mogą być uważane za małe. Przy poszukiwaniu równania odkształconej nie możemy wobec tego korzystać ze wzoru (324), lecz uciekać się musimy do wzoru (323).

Inaczej rzecz się ma, gdy chodzi jedynie o wyznaczenie siły krytycznej  $P_k$ <sup>1)</sup>. Dla tego celu wyzyskać możemy równanie (324), opierając się na następującem rozumowaniu.

Ułamkowi  $P = \frac{M}{y}$  możemy nadać jedną z następujących postaci:

$$P = \frac{EJ \cdot \frac{1}{\rho}}{y} \quad P = \frac{EJ y''}{y} \quad (325)$$

Obydwa te wzory możemy przedstawić w formie takich ułamków, aby miały one jednakowe liczniki, a mianowniki, różniące się od siebie o wielkości nieskończenie małe. Wiadomo, że ułamki takie mają te same granice, wobec czego:

$$P_k = \lim \left[ \frac{M}{y} \right]_{y=0} = \lim \left[ \frac{EJ \cdot \frac{1}{\rho}}{y} \right]_{y=0} = \lim \left[ \frac{EJ y''}{y} \right]_{y=0}$$

czyli że siła krytyczna otrzyma tę samą wartość, niezależnie od tego, czy do jej wyznaczenia będziemy korzystali z równania (323), czy też z równania (324).

Mając na uwadze układ współrzędnych, przedstawiony na rys. 197, możemy nadać równaniu (324) postać następującą:

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = - P \cdot y \quad (326)$$

<sup>1)</sup> F. Jasiński, „Badania nad sztywnością prętów“, 1895.

Całka ogólna tego równania przybiera formę:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (327)$$

gdzie  $k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ .

Stałe całkowania wyznaczamy tu z następujących warunków:

- 1) przy  $x = 0$  mamy, że  $y = 0$ , skąd  $C_2 = 0$ ,
- 2) przy  $x = l$  mamy, że  $y = 0$ , skąd:

$$C_1 \sin kl = 0 \quad (328)$$

Z równania (328) wynika, że albo  $C_1 = 0$  i wówczas pręt ma stałe kształt prostoliniowy, co przeczy założeniu, albo też  $\sin kl = 0$ , skąd  $kl = n \cdot \pi$  zaś:

$$P = \frac{EJ n^2 \pi^2}{l^2} \quad (329)$$

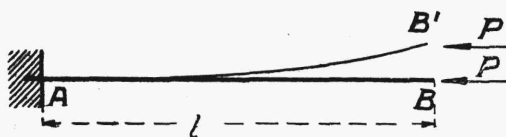
Najmniejszą siłę  $P$  możemy otrzymać z równania (329) przy  $n = 1$ , czyli że:

$$P_k = \frac{EJ \pi^2}{l^2} \quad (330)$$

Ten wzór i następne znane są pod nazwą wzorów Euler'a.

Wypadek wyboczenia pręta na podporach przegubowej i przegubowo-przesuwnej nazywamy podstawowym (rys. 197).

Jeżeli pręt jest utwierdzony w jednym końcu, w drugim zaś swobodny i obciążony siłą  $P$  (rys. 198), wówczas możemy uzupełnić sobie pręt myś-



Rys. 198.

lowo w ten sposób, aby stanowił on połowę pręta, podpartego w sposób przedstawiony na rys. 197 o długości podwójnej, t.j.  $2l$ . Warunki pracy połowy tego pręta będą te same, co warunki pręta danego.

Aby znaleźć odpowiednią siłę krytyczną, musimy tylko wstawić do wzoru (330) zamiast  $l$  podwójną długość pręta  $2l$ . Otrzymamy wówczas, że

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \quad (331)$$

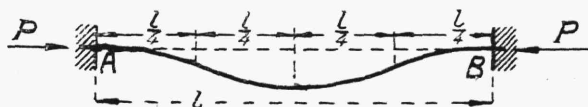
Z porównania wzorów (330) i (331) wynika, że oba te wzory można przedstawić pod jedną postacią, a mianowicie pod postacią następującą:

$$P_k = \frac{\pi^2 E I}{(\mu l)^2} \quad (332)$$

gdzie  $\mu$  w pierwszym wypadku jest równe 1, a w drugim 2. Współczynnik  $\mu$  nosi nazwę współczynnika długości.

Wzorem (332) można objąć i inne wypadki podłużnego obciążenia pręta, więc np. wypadek pręta przedstawionego na rys. 199, t.j. pręta utwierdzonego w dwóch końcach i ściskanego siłami  $P$ ; mamy wówczas  $\mu = 0,5$ .

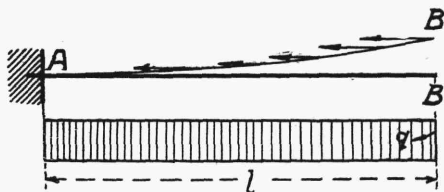
Dla pręta utwierdzonego w jednym końcu i obciążonego siłami podłużnymi, zaczepionymi w sposób ciągły i równomierny wzdłuż pręta (rys. 200), mamy:



Rys. 199.

$\mu = 1,2$ , przyczem w tym wypadku  $P = ql$ , gdzie  $q$  oznacza zmienne jednostkowe podłużne obciążenie pręta. Ten rodzaj obciążenia odpowiada obciążeniu słupa ciężarem własnym.

Wypadek obciążenia podłużnego, przedstawionego na rys. 201, znajduje zastosowanie w obliczeniu pasów ściskanych w mostach otwartych<sup>1)</sup>.



Rys. 200.



Rys. 201.

## 6. Doświadczalne wyznaczenie siły krytycznej.

Rachunkowe wyznaczenie siły krytycznej stosowane jest na razie tylko w granicach sprężystości, natomiast doświadczalne jej wyznaczenie możliwym jest również i poza temi granicami, oczywiście ze ścisłością, zależną od aparatury doświadczeń.

<sup>1)</sup> Por. pracę autora „O stateczności pasów ściskanych w mostach otwartych”, 1923 Prace Warszawskiego Tow. Politechnicznego.