

$$a + y = \frac{a}{\cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}}} \quad (319')$$

poczem naprężenia wyznaczyć możemy z równania (318), przyjmując $M_x = P(a + y)$.

Kwestja naprężeń bezpiecznych dla powyższych wypadków wytrzymałości złożonej omówiona będzie w § 7 niniejszego rozdziału.

4. Wyboczenie sprężyste i niesprężyste prętów prostych.

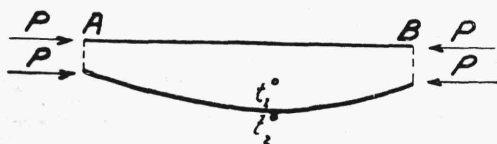
Wyboczeniem w języku potocznym bywa nieraz nazywane każde wogóle zniszczenie pręta prostego pod działaniem podłużnych sił ściskających, a więc i pod wpływem jednoczesnego zginania i ściskania. W mechanice budowli rozróżniamy dwa tylko rodzaje wyboczenia, znane pod nazwą wyboczenia sprężystego i wyboczenia niesprężystego.

Wyboczenie sprężyste polega na tem, że pręt sprężysty, pierwotnie prosty i ściskany siłami podłużnemi ściśle osiowemi, zakrzywiony pod działaniem pewnej wypadkowej przyczyny zewnętrznej, nie wraca po usunięciu tej przyczyny do swego kształtu prostolinjowego, o ile siła podłużna przekroczyła pewną wartość, zwaną siłą krytyczną. O ile siła ściskająca nie przekroczyła wartości krytycznej, wówczas, po usunięciu przyczyny zakrzywiającej, pręt staje się ponownie prostym.

Przyczyny, mogące wywołać zakrzywienie pręta ściskanego osiowo, mogą mieć bądź charakter dynamiczny, bądź też niedynamiczny. Mogą to więc być, z jednej strony, wstrząsy, małe uderzenia i inne podobne okoliczności, powodujące chwilowy mimośród sił podłużnych, z drugiej zaś strony, różne chwilowo występujące czynniki termiczne lub technologiczne. Damy tu przykłady występowania zjawiska wyboczenia w obydwóch tych wypadkach.

Pierwszy przykład:

Wyobraźmy sobie prosty pręt sprężysty, obciążony podłużnemi siłami



Rys. 193.

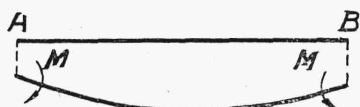
wyciągającami. Jeżeli boczną powierzchnię takiego pręta ogrzejemy w sposób nierównomierny, to pręt może ulec zakrzywieniu, które jednak znika po wyrównaniu się temperatury w poszczególnych punktach jego powierzchni.

Inaczej rzecz się będzie miała, o ile na pręt będą działały podłużne siły ściskające (rys. 193). W tym wypadku, mianowicie, zakrzywienie pręta, wywołane przez nierównomierny rozkład temperatury na jego po-

wierzchni, powoduje dalsze zginanie pręta, które nie zawsze znika po wyrównaniu się temperatury, co zależy znowu od tego, czy siła ściskająca przekroczyła wartość krytyczną, czy też jej jeszcze nie przekroczyła. W pierwszym wypadku będziemy mieli do czynienia z wyboczeniem, po nastąpieniu którego albo ustali się krzywolinjowa forma równowagi pręta, albo się pręt złamie. Krzywolinjowy rodzaj równowagi w konstrukcjach budowlanych nie jest naogół dopuszczalny dla prętów prostych.

Drugi przykład:

O ile w dwóch końcach pręta pryzmatycznego AB (rys. 194) podłużnie nieobciążonego, zaczepimy dwa momenty M , równe, co do war-



Rys. 194.



Rys. 195.

tości bezwzględnej, i różne, co do zwrotu, to pręt przyjmuje kształt krzywej, po wyzwoleniu się jednak z pod działania momentów, wraca do swego pierwotnego kształtu prostolinjowego AB . Zjawisko nie ulegnie zmianie, o ile do końców pręta AB , oprócz wymienionych momentów, zaczepimy jeszcze dwie równe sobie wyciągające siły P (rys. 195). O ile jednak siły podłużne P będą siłami ściskającymi (rys. 196), wówczas, po usunięciu momentów M , pręt będzie tylko o tyle powracał do swego prostolinjowego kształtu pierwotnego, o ile wielkość sił P nie przekroczy wartości krytycznej, w przeciwnym zaś razie będzie on zachowywał, podobnie, jak w przykładzie poprzednim, kształt krzywolinjowy. Wygięcie się pręta będzie tu rezultatem działania momentu siły podłużnej (momentu Py), nie zaś momentu M (przyczyna zakrzywiająca), którego rola polega jedynie na tem, iż powoduje on powstawanie ramion y tamtego momentu.

O ileby pręt ściskany pozostawał sprężystym, niezależnie od wielkości powstających w nim naprężeń, to byłoby jasnem, że wielkość chwilowego momentu M nie ma żadnego wpływu na ostateczny krzywolinjowy kształt wyboczonego pręta, ani też na ostateczne w nim naprężenia. O ile jednak mamy do czynienia z materiałem o sprężystości ograniczonej, wówczas powstać może kwestja, czy same momenty M nie wywołują odkształceń trwałych i czy przez to nie stają się właściwą przyczyną wyboczenia. To też należy mieć w określeniu wyboczenia na widoku momenty M



Rys. 196.

nieskończenie małe w porównaniu do momentów sił podłużnych, powodujących ostateczne wygięcie pręta. W następujący schematyczny sposób wyjaśnimy, jak może nieskończenie mały moment M być przyczyną skończonego wygięcia się pręta ściskanego.

Nieskończenie małe momenty zakrzywiające M wywołują nieskończenie małe ugięcie $d'y$ w środku pręta ściskanego. Ponieważ ugięcie to odgrywa rolę ramienia siły P , dochodzimy tą drogą do nieskończenia małego momentu zginającego $M' = Pd'y$; moment zginający M' wywołuje przyrost ugięcia $d''y$ i przyrost momentu zginającego $M'' = Pd''y$; moment M'' wywołuje przyrost ugięcia $d'''y$ i przyrost momentu $M''' = Pd'''y$ i t.d. Dodając do siebie we właściwy sposób nieskończenie wielką liczbę nieskończenia małych ugięć dy , dojść możemy w rezultacie do ostatecznego, skończonego ugięcia y w środku pręta ściskanego, należy jednak pamiętać, że skończone wygięcie pręta nastąpić może dopiero po przekroczeniu przez siłę P wartości krytycznej.

W podobny sposób możemy sobie również przedstawić i znikanie skończonego ugięcia pręta y po usunięciu przyczyny zakrzywiającej.

Mając powyższe na uwadze, możemy twierdzić, że przyczyna zakrzywiająca albo wogóle nie wywołuje w pręcie żadnych naprężeń (o ile ma charakter niedynamiczny), albo też wywołuje w nim tylko naprężenia nieskończenie małe w porównaniu do naprężeń, wywoływanych przez siły ściskające, czyli naprężenia praktycznie równe zeru (o ile ma charakter dynamiczny).

Jeżeli wartość sił ściskających jest mniejsza od wartości krytycznej ($P < P_k$), możemy obliczać największe naprężenia normalne w pręcie ze wzoru:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (320)$$

O ile siły ściskające przekroczyły wartość krytyczną i pręt przybrał kształt krzywoliniowy ($P > P_k$), wówczas największe naprężenia normalne w pręcie dają się wyznaczyć ze wzoru:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Py}{W} \quad (321)$$

Gdy siła ściskająca P jest siłą krytyczną ($P = P_k$), wówczas wypadek ten może być uważany jednocześnie, jako krańcowy dla prostoliniowego kształtu pręta, przy zwiększaniu się siły P , i, jako krańcowy dla krzywoliniowego kształtu pręta, przy zmniejszaniu się tej siły. Prostoliniowy kształt równowagi uważamy tu za niestateczny, gdyż tu najdrobniejsza chwilowa przyczyna zakrzywiająca (a więc np. wspomniany wyżej moment M , wywołujący w pręcie naprężenia nieskończenie małe w porównaniu z naprężeniami, wywołanymi przez siłę ściskającą P) po usunięciu się pozostawia pręt w postaci krzywoliniowej. O ile wartość ściskającej siły podłużnej

przekroczy siłę krytyczną, to, ujmując rzecz z punktu widzenia fizycznego, jakaś przyczyna zakrzywiająca zawsze wystąpić musi, tak jak musi wystąpić przyczyna, powodująca zejście z osi środka ciężkości stożka, stojącego na swym wierzchołku (równowaga niestateczna), i wywołująca w dalszym ciągu wywrócenie się stożka.

Ponieważ w konstrukcjach budowlanych wyginanie się prętów, przeznaczonych do przyjmowania wyłącznie sił osiowych, nie może być dopuszczone, więc, przy ściskaniu prętów, siła krytyczna P_k odgrywa podobną rolę, jak siła, która rozrywa pręt wyciągany. W ten sposób ułamek

$$K_k = \frac{P_k}{A}$$

zwany naprężeniem krytycznym przedstawia niejako wytrzymałość danego pręta na wyboczenie.

O ile naprężenie krytyczne jest mniejsze od naprężenia danego materiału na granicy sprężystości, a więc o ile

$$K_k < K'$$

wówczas zjawisko wyboczenia ma miejsce w granicach sprężystości, czyli że mamy do czynienia z wyboczeniem sprężystym.

W prętach stosowanych w konstrukcjach budowlanych i przy materiałach, będących tu w użyciu, po przekroczeniu przez siłę podłużną wartości krytycznej, naprężenia obliczone ze wzoru (321) wzrastają tak szybko, że już, przy wartościach siły podłużnej mało różniących się od $P = P_k$, przekraczają zwykle granicę wytrzymałości danego materiału, wobec czego następuje ich trwałe odkształcenie. Ta okoliczność pozwala tem bardziej uważać w zagadnieniach praktyki naprężenie krytyczne nawet przy wyboczeniu sprężystym za wytrzymałość (doraźną) na wyboczenie.

Wyboczenie niesprężyste następuje wówczas, gdy

$$K_k > K'$$

t.j. gdy naprężenie krytyczne przekracza granicę sprężystości.

Powyżej dane określenie dla wyboczenia sprężystego znajduje zastosowanie i w razie wyboczenia niesprężystego z tem jedynie zastrzeżeniem, że tu nie może być oczywiście mowy o sprężystej krzywolinjowej formie równowagi.

W tym wypadku, o ile przy $P = P_k$ lub $P > P_k$ jakaś chwilowa przyczyna zakrzywiająca wywoła moment sił podłużnych, wówczas naprężenia w pręcie obliczone ze wzoru (321), jako bezwarunkowo przekraczające granicę sprężystości a przeważnie nawet granicę wytrzymałości, muszą wywołać natychmiast złamanie się (trwałe odkształcenie) pręta. I tutaj więc naprężenie krytyczne odgrywa rolę wytrzymałości pręta na wyboczenie.

O ile siła ściskająca nie przekracza wartości krytycznej, wówczas po usunięciu się chwilowej przyczyny zakrzywiającej, pręt może odzyskać swą postać prostolinjową, w tym jednak tylko wypadku, o ile przed tem naprężenia w nim nie przekroczyły granicy sprężystości, t.j. o ile

$$\sigma = \frac{P}{A} < K'$$

Ze wszystkiego powiedzianego w tym paragrafie wynika, że o wyboczeniu może być tylko wówczas mowa, gdy siły ściskające pręt proste są ściśle osiowe i gdy wypadkowy ich mimośród tylko wtedy nie znika wraz z chwilową przyczyną zakrzywiającą, której był wynikiem, o ile siła podłużna większa jest od siły krytycznej. Pod tym względem różni się wyboczenie zasadniczo od tak zwanego jednoczesnego ściskania i zginania (por. § 3), kiedy mimośród sił podłużnych występuje już przy najmniejszych wartościach sił, wobec czego pręt jednocześnie ściskany i zginany nigdy prostolinjowej formy równowagi mieć nie może.

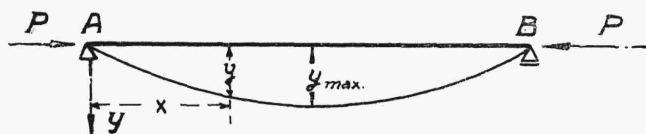
Niestateczna równowaga sprężysta prętów zakrzywionych ma narazie stosunkowo niewielkie znaczenie w konstrukcjach budowlanych (przykład — bardzo cienkie dźwigary łukowe) i dlatego tu omawiana nie będzie.

5. Rachunkowe wyznaczenie siły krytycznej.

O ile wyboczenie odbywa się w granicach sprężystości danego materiału, t.j. o ile $K_k < K'$, wówczas siłę krytyczną wyznaczyć możemy z równań teorii sprężystości.

Robimy to na podstawie rozważań następujących.

Przypuśćmy, iż pewien pręt prosty AB , obciążony przez podłużne siły ściskające P , większe od wartości krytycznej, przybrał krzywolinjową formę równowagi, przedstawioną na rys. 197. Niech będzie $y = y_{\max}$



Rys. 197.

największe ugięcie na długości pręta, a M odpowiedni moment zginający, czyli że $M = Py$. O ile siły podłużne będą się tu zmniejszały,

wówczas jednocześnie z nimi będzie malało wygięcie pręta i moment zginający. Zmniejszając siły P , możemy doprowadzić je do wartości krytycznej P_k , przy której możliwa jest prostolinjowa forma równowagi pręta. Możemy więc wyznaczyć siłę P_k z równania następującego:

$$P_k = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{M}{y} \right] \quad (322)$$