

W ten sposób dochodzimy do następującego wzoru dla naprężenia normalnego przy zginaniu niesymetrycznym:

$$\sigma = \frac{M_x y}{J_x} - \frac{M_y x}{J_y} \quad (298)$$

Wstawiając tu zamiast  $M_x$  i  $M_y$  ich wartości ze str. 181 i przyjmując  $\sigma = 0$ , dochodzimy do następującego równania osi obojętnej:

$$\frac{y \cos \varphi}{J_x} - \frac{x \sin \varphi}{J_y} = 0 \quad (298')$$

Oznaczając przez  $\alpha$  kąt  $\sphericalangle Y O o$  nachylenia prostej (298') względem osi  $Y$ -ów, otrzymujemy z równania (298'), że

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \varphi \cdot \frac{J_y}{J_x} = \operatorname{ctg} \varphi \cdot \frac{r_y^2}{r_x^2} \quad (299)$$

gdzie  $r_y$  i  $r_x$  oznaczają odpowiednie promienie bezwładności.

Z równania (299) otrzymujemy, że

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{r_y^2}{r_x^2}$$

co oznacza, że ślad płaszczyzny sił  $UO$  ( $\sphericalangle U O Y = \varphi$ ) i oś obojętna  $oo$  są kierunkami sprzężonymi względem środkowej elipsy bezwładności przekroju poprzecznego belki.

Z powyższego wynika, że, o ile siły zewnętrzne działają na belkę w płaszczyźnie jednej z osi głównych jej przekroju poprzecznego, to oś obojętna pokrywać się będzie z kierunkiem drugiej osi głównej. O ile płaszczyzna sił przecina przekrój poprzeczny belki pod kątem różnym od prostego względem osi głównej, wówczas oś obojętna nie będzie do tej płaszczyzny prostopadła, a więc zginanie nie będzie odbywało się w płaszczyźnie sił (zginanie ukośne).

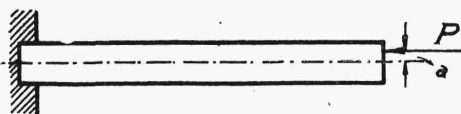
Znalazwszy oś obojętną przekroju belki zginanej, ustalamy położenie punktów najdalej od tej osi odsuniętych. Są to punkty największych naprężeń normalnych; do wyznaczenia tych naprężeń służy nam wzór (298).

## 2. Ściskanie mimośrodowe (w granicach ważności zasady superpozycji).

Jeżeli na pręt pryzmatyczny działa, poza siłami ściskającymi, jeszcze pewien moment zginający (por. rys. 191 i 192), wówczas pręt wygina się, a jego

ugięcia odgrywają rolę ramion dla momentów siły podłużnej względem poszczególnych punktów osi pręta. W ten sposób działanie sił podłużnych jest tu uzależnione od działania sił prostopadłych do osi pręta, lub momentów zewnętrznych, a więc zasada superpozycji nie znajduje tu naogół zastosowania. W tych razach jednak, gdy ugięcia ściskanych prętów lub słupów są małe, możemy wpływ ich na działanie sił podłużnych pomijać i postępować tak, jakgdyby zasada superpozycji moc swą zachowywała. Najważniejszym z wypadków tego rodzaju jest wypadek tak zwanego ściskania mimośrodowego.

Przypuśćmy, że mamy pręt nieważki (rys. 185), obciążony siłą  $P$ , działającą równolegle do jego osi w odległości  $a$  od niej. Działanie tej siły na pręt zastępujemy przez równoznaczny układ sił, składający się z siły  $P$ , działającej wzdłuż osi pręta i z momentu  $M = Pa$ . Jeżeli osie  $OX$  i  $OY$  oznaczają główne osie środkowe przekroju pręta (rys. 186), to otrzymamy tu ze wzoru (298), że naprężenia, powstające w przecie wskutek działania momentu  $M$ , równają się dla pewnego punktu  $R(x, y)$  przekroju poprzecznego:



Rys. 185.

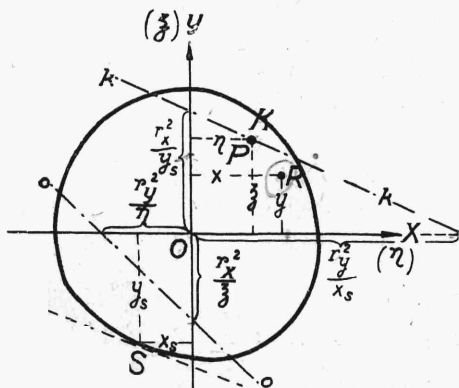
$$\sigma' = \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y} \quad (300)$$

gdyż oba momenty  $M_x$  i  $M_y$  wywołują w punkcie  $R$  naprężenia ściskające, oznaczone tu znakiem  $+$ . W danym wypadku  $M_x = P \cdot \xi$  a  $M_y = P \cdot \eta$ , przyczem punkt  $K(\xi, \eta)$  oznacza punkt zaczepienia siły podłużnej (w rzucie).

Siła  $P$ , działająca wzdłuż osi pręta, wywołuje naprężenia równomiernie rozłożone w przekroju i równe:

$$\sigma'' = \frac{P}{A} \quad (301)$$

Ponieważ, według założenia, w danym wypadku zasada superpozycji znajduje zastosowanie, to ogólne naprężenie w punkcie  $R$  wyniesie:



Rys. 186.

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y} \quad (302)$$

Według wzoru (302) obliczamy naprężenia przy ściskaniu mimośrodowym.

Wstawiamy tu zamiast  $J_x, J_y, M_x, M_y$  ich wartości:

$$\begin{aligned} J_x &= A \cdot r_x^2 ; & J_y &= A \cdot r_y^2 \\ M_x &= P \cdot \xi & i & M_y = P \cdot \eta \end{aligned} \quad (303)$$

poczem otrzymujemy:

$$\sigma = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{\eta x}{r_y^2} + \frac{\xi y}{r_x^2} \right) \quad (304)$$

Ponieważ oś obojętna jest to prosta, wzdłuż której naprężenia normalne równe są zeru, więc równanie jej możemy otrzymać, zakładając  $\sigma = 0$ .

Równanie to będzie miało następującą postać:

$$1 + \frac{y}{\left( \frac{r_x^2}{\xi} \right)} + \frac{x}{\left( \frac{r_y^2}{\eta} \right)} = 0 \quad (305)$$

Z równania (305) wynika, iż, aby otrzymać na rys. 186 oś obojętną  $oo$ , należy na osiach  $OY$  i  $OX$  odłożyć, odpowiednio, odcinki  $-\frac{r_x^2}{\xi}$  i  $-\frac{r_y^2}{\eta}$ .

Otrzymana w ten sposób prosta dzieli przekrój na część ściskaną i wyciąganą, przyczem ściskana część przekroju położona jest od strony punktu zaczepienia siły  $P$ , wyciągana zaś po stronie przeciwnej.

Zachodzi nieraz potrzeba ustalenia granic, w jakich może przesuwać się punkt  $K$  zaczepienia siły  $P$ , aby nigdzie w przekroju poprzecznym pręta nie powstawały naprężenia wyciągające.

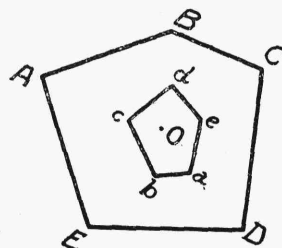
Aby takie granice ustalić, przekształcamy równanie (305) w następujący sposób:

$$1 + \frac{\xi}{\left( \frac{r_x^2}{y} \right)} + \frac{\eta}{\left( \frac{r_y^2}{x} \right)} = 0 \quad (306)$$

Jeżeliby odcinki  $y$  i  $x$  odpowiadały tu pewnemu punktowi  $S$  (o współrzędnych  $x = -x_s$  i  $y = -y_s$ ) na obwodzie przekroju, wówczas równanie (306), rozpatrywane, jako równanie dla zmiennych  $\xi$  i  $\eta$  byłoby równaniem prostej  $kk$ , posiadającej tę własność, że o ile po niej przesuwają się punkt  $K$  zaczepienia siły  $P$ , to oś obojętna pozostaje styczną do obwodu w punkcie  $S$ , a więc w przekroju nie ma naprężeń wyciągających.

Ponieważ odpowiednio do każdego punktu  $S$  obwodu można ustawić równanie prostej  $kk$  (306), więc szereg takich kolejnych prostych, przecinając się, zakreśla granice, w których może się przesuwać po przekroju punkt  $K$  zaczepienia siły  $P$ , nie wywołując w pręcie naprężeń wyciągających. Ograniczona tą drogą część pola przekroju nosi nazwę rdzenia przekroju (rys. 187). W razie krzywoliniowego obwodu przekroju, obwód rdzenia jest również krzywoliniowy.

Ponieważ każdemu punktowi obwodu rdzenia odpowiada prosta, wyrażona równaniem (305), styczna do obwodu przekroju, a każdemu punktowi  $S$  tego obwodu, odpowiada prosta wyrażona równaniem (306), styczna do obwodu rdzenia, to znaczy, że oba obwody są wielobokami wzajemnymi.



Rys. 187.

Weźmy pręt (słup) o przekroju prostokątnym i o wymiarach  $d$  na  $b$  (rys. 188). W wypadku szczególnym, gdy punkt  $K$  zaczepienia siły  $P$  znajduje się na osi  $OX$ , wzór (304) przekształca się w następujący ( $\xi = 0$ ):

$$\sigma = \frac{P}{A} \cdot \left( 1 + \frac{\eta \cdot x}{r_y^2} \right) \quad (307)$$

W danym razie mamy:

$$r_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{b d^3}{12 d b}} \quad (308)$$

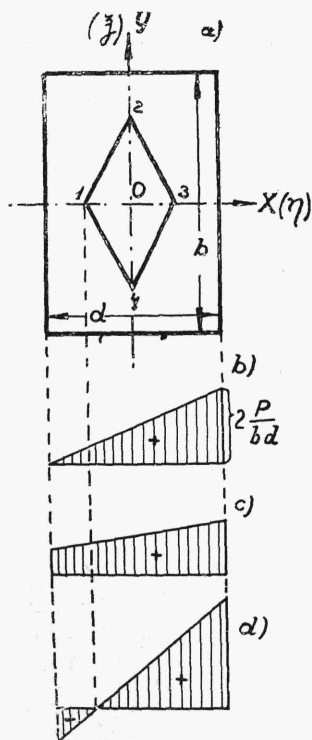
$$r_y^2 = \frac{d^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{P}{d b} \left( 1 + \frac{12 \eta \cdot x}{d^2} \right) \quad (309)$$

Na obwodzie przekroju prostokątnego, mianowicie, przy  $x = \pm \frac{d}{2}$ , mamy więc, że

$$\sigma = \frac{P}{d b} \cdot \left( 1 \pm \frac{6 \eta}{d} \right) \quad (310)$$

Aby na obwodzie naprężenie było równe zeru ( $\sigma = 0$ ), trzeba aby  $\eta = \frac{1}{6} d$ , z czego



Rys. 188

wynika, iż: o ile nie chcemy mieć w przekroju naprężeń wyciągających, punkt zaczepienia siły  $P$  nie może wychodzić poza środkową trzecią część szerokości  $d$  danego przekroju.

Rozkład naprężeń w tym wypadku jest uwidoczniiony na rys. 188b. W razie gdy siłę  $P$  zaczepimy wewnątrz odcinka 13, wykres naprężeń będzie miał kształt przedstawiony na rys. 188c. W razie, gdy siłę zaczepimy poza tym odcinkiem, wykres będzie miał kształt przedstawiony na rys. 188d.

Dla siły zaczepionej na osi  $OY$  drogą analogicznego rozumowania znajdziemy na tej osi punkty o rzędnych  $\xi = \frac{b}{6}$ , jako graniczne dla rdzenia. Łącząc ze sobą punkty 1, 2, 3, 4, otrzymujemy obwód rdzenia.

Wykreślamy teraz rdzeń przekroju dwuteowego (rys. 189).

Uwzględniamy, jako krańcowe położenia osi obojętnej, jedynie krańcowe stopowe i proste punktowne, które łącznie z tamtymi tworzą prostokąt. W ten sposób wyznaczenie rdzenia zbliża się tu do obliczenia poprzedniego. We wzór (304) wstawiamy kolejno

$$\eta = 0 \text{ i } y = -\frac{b}{2}$$

oraz  $\xi = 0$  i  $x = -\frac{d}{2}$ . Przy  $\sigma = 0$  otrzymujemy wówczas:

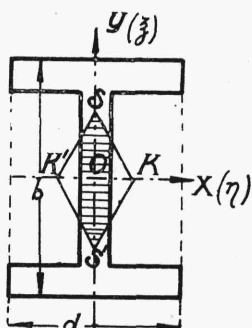
$$\xi = OS = \frac{2r_x^2}{b} \quad ; \quad \eta = OK = \frac{2r_y^2}{d} \quad (311)$$

W podobny sposób dla przekroju kolistego znajdujemy (rys. 190):

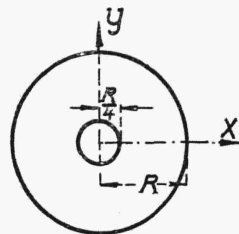
$$\xi = \eta = \frac{R}{4}$$

Odległości 01, 02, 03 i 04 na rys. 188a oraz odległości  $OS$ ,  $OS'$ ,  $OK$ ,  $OK'$  na rys. 189 nazywamy niekiedy promieniami rdzenia przekroju ( $k$ ). Mnożąc pierwszy wzór (311) przez pole przekroju  $A$  ustalamy następującą zależność między promieniem rdzenia a wskaźnikiem wytrzymałości:

$$W = A \cdot k \quad (312)$$



Rys. 189.



Rys. 190.