

Napężenie to może być uważane za miarodajne przy obliczeniu płyt o niezmienniej grubości. W razie płyty kolistej (t. j. przy $a = b = r$) napężenie w miejscu utwierdzenia wynosi na podstawie wzoru (1008):

$$\sigma_{\max} = \sigma_u = \pm \frac{3}{4} \cdot \frac{qr^2}{h^2} \quad (1009)$$

W środku płyty napężenie równa się w tym wypadku:

$$\sigma_0 = \pm \frac{3qr^2(1 + \mu)}{8h^2} \quad (1010)$$

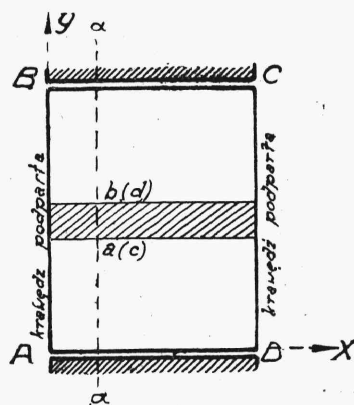
zaś odpowiednie ugięcie wynosi:

$$w_0 = w_{\max} = \frac{3}{16} \cdot \frac{qr^4(1 - \mu^2)}{Eh^3} \quad (1011)$$

3. Płyty prostokątne.

Bierzemy płytę prostokątną (rys. 457) równomiernie obciążoną, podpartą lub utwierdzoną wzdłuż krawędzi AB i CD , zaś wzdłuż krawędzi BC i AD swobodną. Przypuśćmy, że w kierunku osi OY płyta nie może się wydłużać, skąd $\varepsilon_y = 0$ i $v = 0$. Jest to wypadek tak zwanego cylindrycznego wygięcia płyty. W związku z tem z równania (958) mamy, że $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$, a równanie (990) odkształconej powierzchni środkowej płyty przybiera postać następującą:

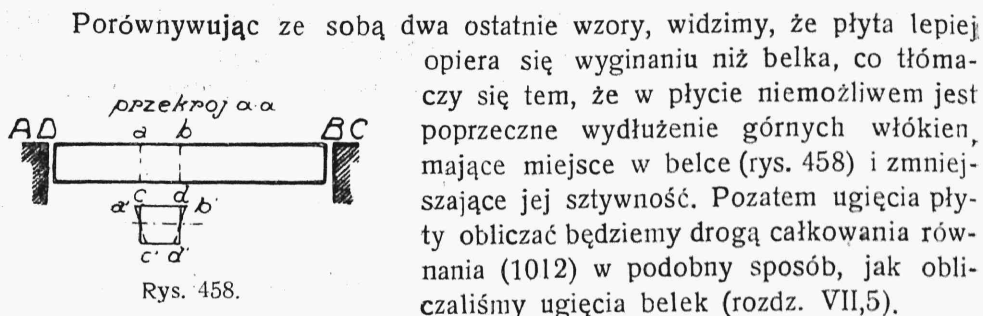
$$\frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad (1012)$$



Rys. 457.

Równanie różniczkowe osi odkształconej belki o szerokości 1 mogłoby zostać przedstawione pod następującą postacią (por. rozdz. XI,8):

$$\frac{Eh^3}{12} \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad (1013)$$



Obliczenie płyty, podpartej na wszystkich czterech krawędziach (rys. 459) wykonywamy tu sposobem opartym na równaniu:

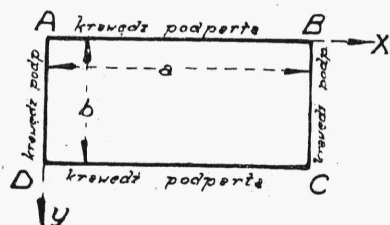
$$\frac{\partial U}{\partial A} = 0$$

a omówionym w rozdziale o energii sprężystej (rozd. XVI,8). Według Timoszenki, sposób ten daje w wypadkach, gdy stosunek długości boków płyty waha się między 0,5 a 1, ścisłość około 5% w porównaniu ze sposobem opartym na całkowaniu równania odkształconej środkowej powierzchni płyty.

Zakładamy, że ugięcie wyraża się wzorem:

$$w = \sum_{i,j} A_{ij} \sin \frac{\pi x i}{a} \sin \frac{\pi y j}{b} \quad (1014)$$

przyczem ograniczamy się do jednego tylko wyrazu szeregu (1014).



Rys. 459.

Wzór (1014) odpowiada warunkom brzegowym płyty, gdyż przy $x=0$ i $x=a$ mamy $w = 0$ i $\frac{\partial w}{\partial x} \neq 0$ oraz przy $y=0$

i $y=b$ mamy $w = 0$ i $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$. Większa

liczba wyrazów w szeregu (1014) szybko zwiększa ścisłość rozwiązania. Przyjęte według wzoru (1014) ugięcie w wstawiamy we

wzór (981) dla energii sprężystej. W tym celu obliczamy pochodne

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} :$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\pi}{a} A_1 \sin \frac{\pi y}{b} \cdot \cos \frac{\pi x}{a} \quad (1015)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{\pi^2}{a^2} A_1 \sin \frac{\pi y}{b} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \quad (1016)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{\pi^2}{b^2} A_1 \sin \frac{\pi y}{b} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \quad (1017)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\pi^2}{ab} A_1 \cos \frac{\pi y}{b} \cdot \cos \frac{\pi x}{a} \quad (1018)$$

Wzór (981) przybiera wobec tego postać następującą:

$$\begin{aligned} V = & \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{h^3}{24} \cdot \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\pi^4}{a^4} A_1^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} + \right. \\ & + \frac{\pi^4}{b^4} A_1^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} + 2\mu \frac{\pi^4}{a^2 b^2} A_1^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} + \\ & \left. + 2(1 - \mu) A_1^2 \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} \right] dx dy \quad (1019) \end{aligned}$$

Wchodzące tu całki równają się odpowiednio:

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \int_0^a \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \quad (1020)$$

wobec czego

$$V = \frac{A_1^2 \pi^4 E h^3 a b}{96 (1 - \mu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \quad (1021)$$

Wzór dla pracy sił zewnętrznych w razie obciążenia równomiernego i swobodnego podparcia płyty przybiera następującą postać:

$$T = \sum Pw = \int_0^a \int_0^b q A_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{4 A_1 q a b}{\pi^2} \quad (1022)$$

Funkcja U będzie się więc równała:

$$U = V - \sum Pw = \frac{A_1^2 \pi^4 E h^3 a b}{96 (1 - \mu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{4 A_1 q a b}{\pi^2} \quad (1023)$$

Ustawiamy równanie $\frac{\partial U}{\partial A} = 0$:

$$\frac{A_1 \pi^4 E h^3 a b}{48 (1 - \mu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{4 q a b}{\pi^2} = 0 \quad (1024)$$

skąd, przy $b = a \kappa$, gdzie κ jest to stosunek długości boków płyty,

$$A_1 = \frac{192 q b^4 (1 - \mu^2)}{\pi^6 E h^3 (1 + \kappa^2)^2} \quad (1025)$$

W razie obciążenia płyty ciężarem skupionym P w środku płyty wzór (1022), funkcja U oraz parametr A_1 przybierają następujące formy:

$$\sum Pw = A_1 P \left[\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right]_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} = A_1 P \quad (1026)$$

$$U = \frac{A_1^2 \pi^4 E h^3 a b}{96 (1 - \mu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - A_1 P = 0 \quad (1027)$$

$$A_1 = \frac{48 P b^4 (1 - \mu^2)}{\pi^4 E h^3 a b (1 + \kappa^2)^2} \quad (1028)$$

Normalne naprężenia w płycie otrzymamy, wstawiając ugięcia w we wzory (976) i (977):

$$\sigma_x = \pm \frac{\pi^2 E A_1}{1 - \mu^2} z \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right) \quad (1029)$$

$$\sigma_y = \pm \frac{\pi^2 E A_1}{1 - \mu^2} z \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \left(\frac{\mu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (1030)$$

Największe naprężenia będą miały miejsce w środku płyty (t.j. przy

$x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$) na płaszczyznach ograniczających płytę t. j. przy
 $z = \pm \frac{h}{2}$.

O ile płyta jest utwierdzona, wówczas w rozwiązaniu poprzedniem zmieniają się tylko warunki brzegowe. Warunkom tym czyni zadość w tym wypadku szereg następujący:

$$w = \frac{1}{4} \sum_1^{nm} A_i \left(1 - \cos \frac{2\pi x i}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y j}{b} \right) \quad (1031)$$

Przy $x = 0$ i $x = a$ mamy tu $w = 0$ i $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, a przy $y = 0$ i $y = b$ mamy $w = 0$ i $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$. Obliczamy drugie pochodne ugięcia przy $i = j = 1$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\pi^2}{a^2} A_1 \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \quad (1032)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\pi^2}{b^2} A_1 \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \quad (1033)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\pi^2}{ab} A_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{2\pi y}{b} \quad (1034)$$

Wstawiając otrzymane wartości pochodnych we wzór dla energii sprężystej, otrzymujemy drogą całkowania:

$$V = \frac{\pi^4 A_1^2 ab E h^3}{96 (1 - \mu^2)} \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right) \quad (1035)$$

lub przy $b = a$:

$$V = \frac{\pi^4 A_1^2 ab E h^3}{96 (1 - \mu^2)} \cdot \frac{1}{b^4} (3\pi^4 + 2\pi^2 + 3) \quad (1036)$$

Przy obciążeniu stałym, równym na jednostkę kwadratową q , praca sił zewnętrznych równa się tu:

$$T = \sum Pw = \int_0^a \int_0^b q A_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy =$$

$$= \frac{q A_1 ab}{4} \quad (1037)$$

Funkcja U przybiera wtedy postać następującą:

$$U = \frac{\pi^4 A_1^2 ab E h^3}{96 (1 - \mu^2)} \cdot \frac{1}{b^4} (3\kappa^4 + 2\kappa^2 + 3) - \frac{q A_1 ab}{4} \quad (1038)$$

Ustawiamy równanie $\frac{\partial U}{\partial A} = 0$:

$$\frac{\pi^4 A_1 ab E h^3}{48 (1 - \mu^2)} \cdot \frac{1}{b^4} (3\kappa^4 + 2\kappa^2 + 3) - \frac{q ab}{4} = 0 \quad (1039)$$

skąd

$$A_1 = \frac{12 q b^4 (1 - \mu^2)}{\pi^4 (3\kappa^4 + 2\kappa^2 + 3) E h^3} \quad (1040)$$

W razie obciążenia płyty utwierdzonej ciężarem skupionym, zaczepionym w jej środku, wzór dla pracy sił zewnętrznych przybiera następującą postać:

$$\sum Pw = \frac{P A_1}{4} \left[\left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \right]_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} = A_1 P \quad (1041)$$

Ponieważ w tym wypadku:

$$U = \frac{\pi^4 A_1^2 ab E h^3}{96 (1 - \mu^2)} \cdot \frac{1}{b^4} (3\kappa^4 + 2\kappa^2 + 3) - A_1 P \quad (1042)$$

więc dla A_1 otrzymujemy wzór następujący:

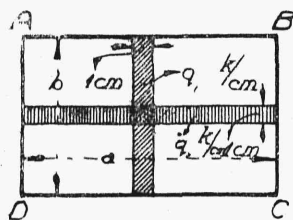
$$A_1 = \frac{48 P (1 - \mu^2) b^4}{\pi^4 ab E h^3 (3\kappa^4 + 2\kappa^2 + 3)} \quad (1043)$$

Wzory dla naprężeń normalnych przybierają tu następującą postać:

$$\begin{aligned}\sigma_x = & - \frac{EA_1 \pi^2}{1 - \mu^2} z \left[\frac{1}{a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{b^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right] \\ \sigma_y = & - \frac{EA_1 \pi^2}{1 - \mu^2} z \left[\frac{\mu}{a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{b^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right]\end{aligned}\quad (1044)$$

W tych wypadkach, gdy chodzi jedynie o prowizoryczne wyznaczenie głównych wymiarów płyty, mając na widoku dalsze ściślejsze obliczanie, można skorzystać ze wzorów opartych na założeniu, że płyta rozcięta jest na belki-pasma, z których każde wygina się samodzielnie.

Stosujemy tu następujący sposób rozumowania (rys. 460).



Rys. 460.

Przypuśćmy, że obciążenie pasma zakreskowanego ukośnie wynosi na jednostkę długości q_1 , przyczem szerokość pasma równa jest jednostce; takie samo obciążenie w zastosowaniu do pasma zaciemnianego pionowo równa się q_2 .

Ponieważ pasma obojdwóch kierunków pokrywają się wzajemnie, więc mamy, że suma $q_1 + q_2 = q$ t. j. równa się obciążeniu jednostkowemu całej płyty.

Ugięcie w środku środkowych belek-pasem równa się:

$$y_1 = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_1 a^4}{EJ} \quad y_2 = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_2 b^4}{EJ} \quad (1045)$$

Ponieważ $y_1 = y_2$, więc

$$q_1 a^4 = q_2 b^4 \quad (1046)$$

co, łącznie ze wzorem $q_1 + q_2 = q$, daje:

$$q_1 = q \frac{b^4}{a^4 + b^4} \quad q_2 = q \frac{a^4}{a^4 + b^4} \quad (1047)$$

Przyjmując, że momenty rozkładają się w płycie odpowiednio do obciążenia obydwóch rodzajów pasem, mamy dla środka płyty;

$$M_1 = \frac{q_1 \cdot a^2}{8} \quad M_2 = \frac{q_2 \cdot b^2}{8} \quad (1048)$$

Dla płyty utwierdzonej wzdłuż czterech krawędzi odpowiednie wzory wynoszą:

$$\text{u krawędzi} \quad M_1 = \frac{q_1 \cdot a^2}{12} \quad M_1 = \frac{q_2 \cdot b^2}{12} \quad (1049)$$

$$\text{w środku} \quad M_2 = \frac{q \cdot a^2}{24} \quad M_2 = \frac{q \cdot b^2}{24} \quad (1050)$$

Podobny sposób obliczenia został zaproponowany przez Bach'a ¹⁾.

4. Zbiorniki cienkościenne ²⁾.

Zbiorniki do wody, gazu, nafty i t.p. mają przeważnie ściany cienkie w porównaniu do swych pozostałych wymiarów i dlatego, przy wyznaczaniu naprężeń możemy tu założyć, że na całej grubości ścian naprężenia normalne (równoległe do powierzchni ścian) nie ulegają zmianie. Zbiorniki cienkościenne mają najczęściej kształt brył obrotowych. Rysunek 461 przedstawia przekrój południkowy takiego zbiornika.

Zapomocą dwóch nieskończenie bliskich płaszczyzn południkowych i dwóch nieskończenie bliskich powierzchni stożkowych wycinamy część *ABCD* ściany zbiornika o wymiarach *ds''* i *ds'* liczonych odpowiednio wzdłuż przekroju południkowego i równoleżnikowego. Uważając, że na całej długości *ds''* i *ds'* krzywizna wycinka ściany nie zmienia się, otrzymujemy (rys. 462):

$$d\varphi' = \frac{ds'}{\rho'} \quad d\varphi'' = \frac{ds''}{\rho''} \quad (1051)$$

¹⁾ Por. C. Bach u. R. Baumann „Elastizität u. Festigkeit“, 1924, str. 613, oraz np. szwajcarskie przepisy dotyczące budownictwa żelazobetonowego.

²⁾ Por. H. Lorenz, „Technische Elastizitätslehre“, 1913, str. 26.