

Linia wpływowa dla dolnej części krzyżulca ac ma kształt $A'vuB'$, przedstawiony na rys. 368e t. j. taki, jakiby miała linia wpływowa całego krzyżulca, gdyby nie było drugorzędnego zawieszenia. Aby otrzymać linję wpływową dla górnej części tegoż krzyżulca, dodajemy tu rzędnę linji wpływowej dla krzyżulca ac zawieszenia drugorzędnego, przedstawionej za pomocą trójkąta vsu . Linję vsu otrzymujemy na tej zasadzie, iż rzędna tej linji wpływowej nad podporą a drugorzędnego zawieszenia powinna odpowiadać $\frac{1}{\sin \varphi}$, jak dla zwyczajnej kratownicy krzyżulcowej. Droga do-

dawania do siebie rzędnych linij $A'vuB'$ i vsu znajdujemy linję $A'vsB'$ dla krzyżulca K_{ac} . W sposób analogiczny do poprzedniego można uzasadnić, iż punkt s linji wpływowej leży na przedłużeniu linji uB' .

Aby otrzymać linję wpływową dla słupa bc , wykreślamy linję wpływową dla tegoż słupa przy jeździe górnej ($A'r'rB'$) i dolnej ($A'ttB'$) w założeniu, że drugorzędnego zawieszenia nie ma. Wobec tego, że przeniesienie działania ciężarów z dolnego pasa na górny odbywa się w danym wypadku w granicach między dwoma zawieszeniami (węzły f i k), muszą więc obie powyższe linje wpływowe łączyć się ze sobą na tej przestrzeni prostemi i dlatego otrzymujemy na linji wpływowej, zamiast prostych rr' i tt' , proste st' i $s't'$. Odpowiednia linja wpływowa przedstawiona jest na rys. 368f.

Linję tę moglibyśmy otrzymać również i z warunków równowagi węzła c .

5. Odkształcenie kratownic.

Odkształcenie kratownicy przegubowej polega na wydłużeniu się lub skróceniu jej poszczególnych prętów i na związanem z tem przesunięciu się węzłów i zmianą kątów między prętami.

Oznaczmy przez i oraz j dwa dowolne węzły kratownicy statycznie wyznaczalnej a przez l_{ij} odległość między nimi w stanie nieodkształconym.

Analityczny sposób obliczenia przesunięć wynika bezpośrednio z równania:

$$l_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \quad (648)$$

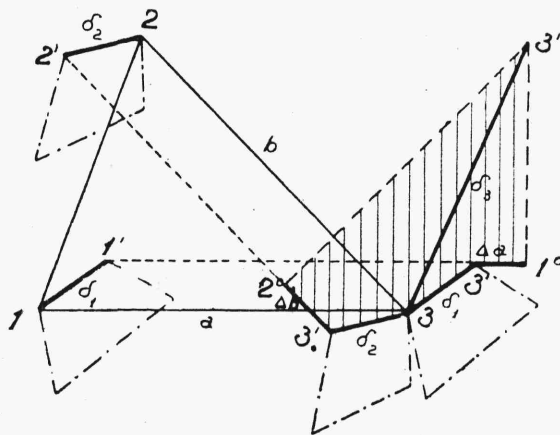
wyrażającego zależność między długością pręta a współrzędnymi jego końców. Zależność między przyrostem długości pręta a przyrostami jego współrzędnych otrzymujemy więc ze wzoru następującego:

$$\begin{aligned} l_{ij} \Delta l_{ij} = & (x_i - x_j) \Delta x_i - (x_i - x_j) \Delta x_j + \\ & + (y_i - y_j) \Delta y_i - (y_i - y_j) \Delta y_j \end{aligned} \quad (649)$$

Równań typu (649) będziemy mieli do rozporządzenia tyle, ile jest boków w kratownicy, czyli $2k - 3$, gdzie k oznacza liczbę węzłów. Liczba niewiadomych przyrostów $\Delta x = u$ i $\Delta y = v$ w tych równaniach wyniesie również $2k - 3$, gdyż oba przesunięcia jednej z podpór (nieruchomej) i jedno przesunięcie drugiej podpory (ruchomej) są równe zeru. Obliczenie przesunięć węzłów z równania (649) natrafia wprawdzie jedynie na trudności o charakterze arytmetycznym, te jednak są tu dla większych kratownic dosyć znaczne i dlatego wspomniany sposób obliczenia przesunięć węzłów bywa najczęściej zastępowany przez sposób wykreślny Williot'a lub rachunkowy Maxwell'a i Mohr'a. Obroty poszczególnych prętów kratownicy bywają tu obliczane na podstawie odpowiednich przesunięć węzłów.

Wykreślny sposób Williot'a oparty jest na następującem rozumowaniu.

Przypuśćmy, że trójkąt 1,2,3 (rys. 369) stanowi część statycznie wy-



Rys. 369.

znaczalnej kratownicy. Odcinki δ_1 i δ_2 są danymi przesunięciami węzłów 1 i 2; chodzi o wyznaczenie przesunięcia węzła 3. Punkt, dokąd przeniesie się węzeł 3 wskutek przesunięć węzłów 1 i 2 (δ_1 i δ_2) i wskutek wydłużeń prętów 13 i 23, musi się znajdować na przecięciu tych prętów, mamy więc do wykonania następującą konstrukcję geometryczną.

Przenosimy pręty 13 i 23 w ten sposób, aby, pozostając równoległymi do swych poprzednich kierunków, przechodziły one przez nowe położenia węzłów 1 i 2. Wzdłuż nowych kierunków $1'3'$ i $2'3'$, poczynając od punktów $3'$ i $3''$ odkładamy wydłużenia prętów (odcinki $3'2^0 = \Delta b$ i $3'1^0 = \Delta a$). W dalszym ciągu z punktów $1'$ i $2'$ zakreślamy promieniami $2'2^0$ i $1'1^0$

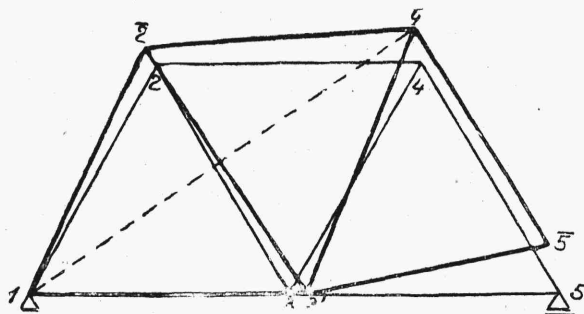
łuki koła do wzajemnego się ich przecięcia. Wobec tego, że łuki te są bardzo małe w porównaniu do promieni, możemy, zamiast łuków, zastosować proste $2^0 3''$ i $1^0 3''$. Prosta $33''$ będzie przesunięciem węzła 3.

Rysunek wskazuje, iż dla wyznaczenia przesunięcia węzła 3 powinniśmy zamknąć wielobok zacieniowany, którego bokami są przesunięcia węzłów 1 i 2 i wydłużenia prętów 13 i 23.

Wielobok ten nie jest bezpośrednio zależny od długości prętów i dlatego możemy na planie przesunąć węzłów pomijając same pręty kratownicy, co pozwala na dowolny wybór skali przesunięć. Będziemy więc tu mieli do czynienia tylko z wielobokiem $2^0 3'' 1^0 3'' 33'' 2^0$ (plan Williot'a).

O ile węzły 1 i 2 nie są końcowymi węzłami kratownicy, przesunięcia δ_1 i δ_2 są rezultatem przesunięć innych węzłów (nie uwidoczniionych na rysunku) i odpowiednich wydłużeń. Przesunięcia δ_1 i δ_2 mogą być wraz z nimi przeniesione (linje kreskowano-punktowane) do punktu 3, w którym tą drogą możemy otrzymać przesunięcia wszystkich węzłów kratownicy.

Przy układaniu planu Williot'a dla kratownicy, przedstawionej na rys.



Rys. 370.

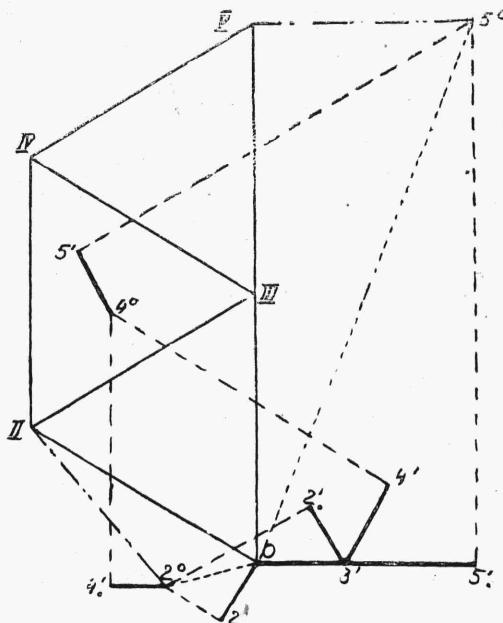
370, uważamy węzeł 1 za nieruchomy a pręt 13 za nieobracalny, nie liczymy się natomiast z nieprzesuwalnością punktu 5 w kierunku pionowym. Na rys. 371, poczynając od punktu 0, dowolnie obranego, odkładamy odcinek $03'$, równy wydłużeniu pręta 13 i odcinek $02'$, równy wydłużeniu pręta 12.

Kierunek odkładanych wydłużeń powinien być taki, jak gdyby punkt 0 (na rys. 371) znajdował się na końcu tego pręta, dla którego wydłużenie odkładamy (w założeniu pewnych sił w węzłach).

Poczynając od punktu $3'$ (na rys. 371) odkładamy wydłużenia prętów 32, 34 i 35. Są to odcinki $3'2''$, $3'4''$ i $3'5''$. Na zbiegu prostopadłych do końców wydłużeń $02'$ i $3'2''$ otrzymujemy punkt 2^0 , którego odległość od 0 daje przesunięcie węzła 2 w założeniu, że punkt 1 jest nieruchomy a pręt 13 nieobracalny. Od punktu 2^0 odkładamy wydłużenie pręta 24. Na zbiegu prostopadłych do końców wydłużeń $2^0 4''$ i $3'4''$ znajdujemy punkt 4^0 (odległość $4^0 0$ daje przesunięcie węzła 4), od którego odkładamy wydłu-

zenie 4°5' pręta 45. Wreszcie na zbiegu prostopadłych do wydłużeń 4°5' i 3°5' znajdujemy punkt 5°, którego odległość od 0 daje nam przesunięcie węzła 5 w założeniu, że punkt 1 jest nieruchomy a pręt 13 nieobracalny,

Rzeczywiste przesunięcie węzła 5 może mieć jedynie kierunek poziomy, gdyż w kierunku pionowym węzeł ten nie może ulec przesunięciu. Aby otrzymać przesunięcie rzeczywiste węzła, obracamy całą kratownicę (rys. 370) dookoła punktu 1. Odpowiedni łuk (cięciwa) obrotu (rys. 371) przedstawiony jest na rys. jako odcinek prostej OV. Dodając do siebie geometrycznie przesunięcia OV i 05°, otrzymujemy rzeczywistą wartość przesunięcia węzła 5 równą V5° i wielkość odcinka OV.



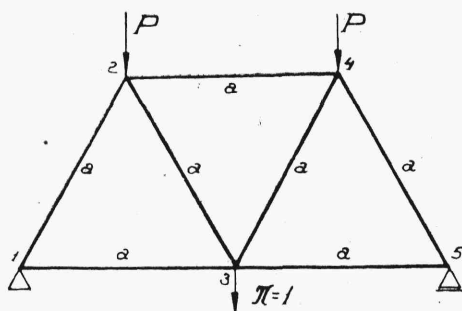
Rys. 371.

Obrót kratownicy dookoła węzła 1 z położenia 1 2 3 4 5 do położenia 1 2 3 4 5 wywołuje przesunięcia węzłów, proporcjonalne do odpowiednich promieni obrotów. Tak więc przesunięcie węzła 4 może być uważane, jako obrót względem punktu 1 przy promieniu obrotu $\overline{14}$, i może być przedstawione na planie przesunień, jako prosta OIV prostopadła do promienia, przyczem długość tego odcinka otrzymujemy ze stosunku $OIV = OV \frac{\overline{14}}{15}$. W ten sam sposób otrzymać możemy na planie przesunięcia OII i OIII, będące rezultatem obrotu kratownicy dookoła punktu 1, poczem, łącząc ze sobą ich końce, otrzymujemy, w myśl przytoczonej proporcjonalności, kratę geometrycznie podobną do danej (rys. 371). W rezultacie rzeczywiste przesunięcia węzłów kratownicy otrzymujemy z planu, jako sumy wektorów OIV i 04°, OII i 02° i t.d., czyli jako odległości punktów IV i 4°, II i 2° i t.d.

Sposób Williot'a jest najbardziej na miejscu, gdy chodzi o wyznaczenie całkowitych przesunień wszystkich węzłów danej kratownicy.

Wyznaczenie odkształceń kratownicy metodą Maxwell'a i Mohr'a oparte jest na zasadzie prac wirtualnych.

Bierzemy, mianowicie, pewną kratownicę, np. kratownicę przedstawioną na rys. 372 (nawet bez sił pionowych P) i zastępujemy w niej jeden z prętów, np. pręt 24 o długości a , przez pręt o długości $a - \Delta a$. Wskutek tej zamiany węzeł 3 kratownicy przesunie się ku dołowi o v_3 .



Rys. 372.

Przypuśćmy, iż, w ciągu omawianej wymiany prętów, do węzła 3 kratownicy jest zaczepiona pionowa siła Π . Siła taka wywołuje w poszczególnych prętach kratownicy siły S_i^π , w pręcie zaś 24 siłę S_{24}^π .

W ten sposób na węzły 2 i 4 działają siły S_{24}^π skierowane ku tym węzłom. Wobec tego, że, przy wymianie pręta o długości a na pręt o długości $a - \Delta a$,

węzły 2 i 4 uległy zbliżeniu się o Δa , siły S_{24}^π wykonać musiały pracę równą $-S_{24}^\pi \cdot \Delta a$, gdzie znak $-$ tłumaczy się tem, że kierunek przesunięcia nie zgadza się tu z kierunkiem działania siły. Jednocześnie siła Π wykonywa pracę Πv_3 .

Z powyższego wynika:

- 1^o, że siły Π i S_{24}^π tworzą układ sił od siebie zależnych,
- 2^o, że przesunięcia Δa i v_3 są również od siebie wzajemnie zależne,
- 3^o, że przesunięcia Δa i v_3 nie zależą od sił Π i S_{24}^π .

Ponieważ przesunięcia Δa i v_3 możemy uważać za możliwe (wirtualne) przesunięcia węzłów, więc, ze względu na równowagę układu, możemy zastosować równanie prac wirtualnych:

$$\Sigma (P \cdot c) = 0$$

gdzie P oznacza siłę działającą na dane ciało, a c wirtualne przesunięcie jej punktu zaczepienia w kierunku działania siły. Równanie przybiera w danym wypadku następującą formę:

$$\Pi \cdot v_3 - S_{24}^\pi \cdot \Delta a = 0 \quad (650)$$

Zależność siły S_{24}^π od siły Π możemy przedstawić sobie w sposób:

$$S_{24}^\pi = Z_{24} \cdot \Pi$$

gdzie Z_{24} zależy wyłącznie od kształtu i wymiarów kratownicy. W związku z tem równanie (650) przechodzi w równanie:

$$\Pi \cdot v_3 - Z_{24} \cdot \Pi \cdot \Delta a = 0$$

skracając to równanie przez Π lub zakładając $\Pi = 1$, otrzymujemy wreszcie wzór następujący:

$$v_3 = Z_{24} \Delta a \quad (651)$$

w którym Z_{24} oznacza siłę powstającą w pręcie 24 kratownicy pod działaniem siły $\Pi = 1$, zaczepionej w węźle 3 w kierunku poszukiwanego przez nas przesunięcia.

O ile większa liczba prętów kratownicy uległa wydłużeniu, wówczas przesunięcie pewnego węzła m wyraża się wzorem:

$$v_m = \sum Z_i \cdot \Delta l_i \quad (652)$$

gdzie Z_i oznacza siłę, powstającą w pewnym pręcie kratownicy pod działaniem siły 1, zaczepionej w węźle m i mającej kierunek przesunięcia v_m , a l_i długość tego pręta.

Przechodzimy do wyznaczenia sprężystych odkształceń kratownicy.

Ponieważ przy ustawianiu wzoru (652) nie korzystaliśmy z żadnych założeń, co do natury wydłużeń Δl , możemy więc przyjąć, że są to wydłużenia sprężyste równe $\Delta l = \frac{S l}{EA}$, gdzie S oznacza siłę, powstającą w pewnym pręcie kratownicy pod działaniem zaczepionych do niej sił zewnętrznych P . W związku z tem równanie (652) przybiera postać następującą:

$$v_m = \sum \frac{Z_i S_i \Delta l_i}{EA_i} \quad (653)$$

O ile siły Z_i i S_i , działające na dany pręt i , są obie jednego znaku np. obie są siłami wyciągającymi, to działają one na węzły, między którymi pręt i jest zawarty, w kierunku od nich, zaś wydłużenie pręta i ma jednocześnie kierunek odwrotny. W związku z tem praca $Z_i \cdot \Delta l_i$ ma war

tość ujemną; co było wyżej wzięte pod uwagę przy wyprowadzeniu wzoru (653) i wobec czego we wzorze tym powinniśmy siły wyciągające Z_i oraz S_i przyjmować za dodatnie a siły ściskające za ujemne.

Zastosujemy wzór (653) do wyznaczenia pionowego przesunięcia węzła 3 kratownicy, przedstawionej na rys. 372, w której $l_i = \text{const} = a$ i która znajduje się pod działaniem dwóch sił P , zaczepionych w węzłach 2 i 4.

Aby skorzystać tu ze wzoru (653) obliczamy przedwszystkiem siły Z , powstałe w poszczególnych prętach kratownicy pod działaniem siły $\Pi = 1$, zaczepionej w węźle 3. Siły te wyznaczamy z warunków równowagi poszczególnych węzłów kratownicy i umieszczamy je w trzeciej rubryce następującej tablicy:

1	2	3	4	5
Pręty	długości l	Z	S	$Z \cdot S$
12	a	0,58	$- 1,16 P$	$+ 0,58 \cdot 1,16 P$
13	a	$+ 0,29$	$+ 0,58 P$	$+ 0,29 \cdot 0,58 P$
24	a	$- 0,58$	$- 0,58 P$	$+ 0,58 \cdot 0,58 P$
23	a	$+ 0,58$	0	0

Wydłużenia Δa otrzymujemy na podstawie sił S , powstałych w prętach kratownicy pod działaniem istotnie zaczepionych sił zewnętrznych P . Siły S w poszczególnych prętach wypisane są w czwartej rubryce tablicy.

Piąta rubryka zawiera iloczyny $Z \cdot S$. Mnożąc te iloczyny przez $\frac{a}{EA}$ i dodając je do siebie dla wszystkich prętów kratownicy, otrzymujemy poszukiwane przesunięcie węzła 3 równe:

$$v_3 = 2,02 \cdot \frac{Pa}{EA}$$

Obliczenie nachylenia pręta 12 wywołanego działaniem siły P , odbywa się w ten sposób, iż zaczepiamy w punkcie 2 siłę $\Pi = 1$, skierowaną prostopadle do 12 i obliczamy siły Z . Po wyzyskaniu równania (653) otrzymujemy przesunięcie węzła w kierunku siły Π . Iloraz otrzymanego przesunięcia przez a da nam wartość poszukiwanego kąta.

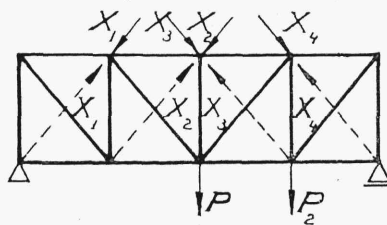
Chcąc znaleźć w podobny sposób nachylenie pręta 23, powinniśmy zaczepić siły Π do węzłów 2 i 3, prostopadle do osi tego pręta. Siły Π możemy dobrać w ten sposób, aby moment obracający pręt 23 w pł-

szczyźnie sił o kąt $\Delta\varphi$ był równy $\Pi \cdot a = 1$, poczem wstawiamy w równanie prac wirtualnych (651), zamiast iloczynu $1 \cdot v_3$ iloczyn $1 \cdot \Delta\varphi$.

6. Kratownice statycznie niewyznaczalne.

O ile w kratownicy geometrycznie niezmienniej liczba prętów $r > 2k - 3$, to różnica $r - (2k - 3)$ wskaże nam liczbę równań, brakujących do wyznaczenia sił we wszystkich prętach. Brakującą liczbę równań statyki uzupełniamy odpowiednią liczbą zależności między odkształceniami kratownicy, przyczem najogólniejszy schemat obliczenia jest następujący:

Przypuśćmy, że chodzi o kratownicę, przedstawioną na rys. 373, posiadającą 4 pręty nadliczbowe. Aby dojść do układu statycznie wyznaczalnego, przecinamy w każdym przedziale kratownicy po jednym krzyżulcu i zastępujemy jego działanie przez dwie siły skierowane ku sobie. Siły te oznaczamy dla poszczególnych krzyżulców przez X_1, X_2, X_3, X_4 i obliczamy zbliżenie się odpowiednich węzłów pod wpływem sił X i zewnętrznych sił P . Zbliżenie węzłów przedstawiamy zapomocą następujących wzorów:



Rys. 373.

$$\begin{aligned} v_1 &= f_1(X_1, X_2, X_3, X_4, P) \\ v_2 &= f_2(X_1, X_2, X_3, X_4, P) \\ v_3 &= f_3(X_1, X_2, X_3, X_4, P) \\ v_4 &= f_4(X_1, X_2, X_3, X_4, P) \end{aligned} \quad (654)$$

Z drugiej strony obliczamy wydłużenia nadliczbowych krzyżulców pod wpływem działających na nie sił:

$$\Delta l_1 = \frac{X_1 l_1}{EA} \quad \Delta l_2 = \frac{X_2 l_2}{EA} \quad \Delta l_3 = \frac{X_3 l_3}{EA} \quad \Delta l_4 = \frac{X_4 l_4}{EA} \quad (655)$$

Przyrównywując do siebie odpowiednie v i Δl , obliczone z równań (654) i (655), otrzymujemy potrzebną liczbę 4 równań, brakujących do wyznaczenia sił w czterech prętach nadliczbowych.

Powyższa metoda ogólna, analogiczna do metod rozwiązywania innych zagadnień statycznie niewyznaczalnych, daje się najlepiej zrealizować przez zastosowanie zasady prac wirtualnych w sposobie Maxwell'a i Mohr'a¹⁾.

¹⁾ S. Timoszenko, „Kurs statyki соору́жений“, 1922, str. 53.

O. Mohr, Technische Mechanik, 1914.