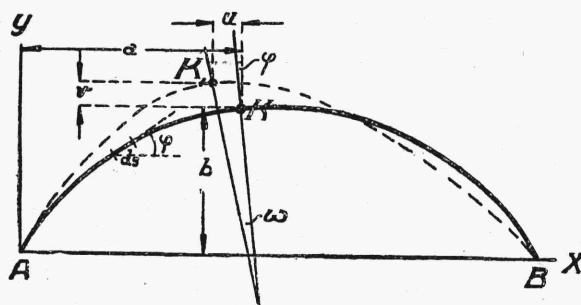


4. Odształcenie skończonego odcinka łuku i łuku, jako całości.

Kiedy już obliczenie łuków metalowych, jako sprężystych, było rzeczą powszechnie przyjętą, stosowanie tego samego sposobu obliczenia do łuków murowanych i betonowych, nasuwało jeszcze szereg wątpliwości. Wątpiono, mianowicie, czy w łuku kamiennym lub betonowym materiał jego jest dostatecznie jednorodny pod względem sprężystym, aby można do niego stosować równania teorii sprężystości. Dopiero doświadczenia nad własnościami sprężystymi kamieni z ostatniego dziesiątka ubiegłego stulecia i doświadczenia nad odształceniami i wytrzymałością łuków, zapoczątkowane przez Związek Inżynierów Austriackich w 1891 r. rozchwiały powyższe obawy.

Do obliczenia odształceń i naprężeń w łukach stosujemy te same wzory, co i dla innych prętów zakrzywionych o zmiennym przekroju poprzecznym. Poza łukami pręty takie znajdują np. zastosowanie, jako haki, jako ramy dźwignic i t. d. W prętach zakrzywionych, stosowanych w budownictwie maszynowym, możemy najczęściej pomijać wpływ sił podłużnych na odształcenie, co natomiast naogół nie może mieć miejsca przy obliczaniu łuków.

W obliczeniach łuków i innych prętów zakrzywionych pomijamy wpływ, jaki może mieć na naprężenia i odształcenia nacisk, wywierany wzajemnie na siebie przez poszczególne włókna podłużne łuku w kierunku poprzecznym. Pozatem w obliczeniach zachowujemy wszystkie założenia poczynione w rozdz. I, 5.

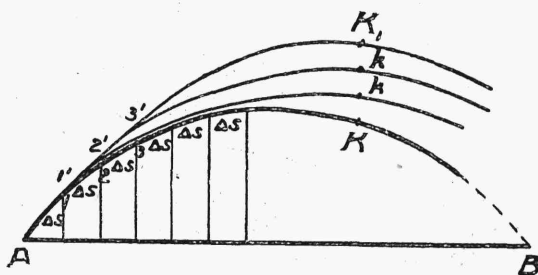


Rys. 297.

Znając odształcenia nieskończenie małych odcinków łuku, możemy obliczyć drogą właściwego ich dodawania odształcenie całego łuku, to znaczy, że możemy wyznaczyć dla pewnego punktu K o współrzędnych a, b (rys. 297) przesunięcie poziome u (równoległe do OX), przesunięcie pionowe v (równoległe do OY) i obrót normalnego przekroju łuku ω .

Krzywa AKB przedstawia nieodkształconą oś łuku, zaś krzywa AK_1B oś odkształconą.

Aby odcinki krzywych AK i AK_1 (rys. 297) pokryły się, potrzeba przedewszystkiem, aby odcinek AK stał się równy, co do długości, odcinkowi AK_1 t.j., aby każda nieskończenie mała część jego ds skróciła się lub wydłużyła o Δds , następnie zaś aby odcinek $1K$ obrócił się względem



Rys. 298.

punktu 1 o pewien kąt $\Delta \varphi$, aby odcinek $2K$ obrócił się w ten sam sposób względem punktu 2, odcinek $3K$ względem punktu 3 i t.d. (rys. 298).

Odcinek krzywej AK może być odcinkiem łuku AKB , lub też samodzielnie utwierdzonym w punkcie A prętem zakrzywionym. W pierwszym wypadku siła N

i moment M (rys. 299) wyrażają oddziaływanie na część łuku AK jego części KB , w drugim zaś siła jest siłą zewnętrzną a moment M momentem zaczepionej do przekroju K pary sił zewnętrznych.

Wydłużenie nieskończenie małego odcinka łuku ds o Δds wywołuje przyrost rzutu odcinka ds na oś OX równy Δdx i odpowiedni przyrost Δdy . Przyrosty te równają się odpowiednio:

$$\Delta dx = - \Delta ds \cos \varphi \quad \Delta dy = - \Delta ds \sin \varphi \quad (523)$$

znak minus wskazuje tu, że pod działaniem siły N , skierowanej według rysunku 299 (ściskającej), przyrosty będą miały kierunek odwrotny do kierunku osi OX i OY .

Dodajemy do siebie przyrosty Δdx i Δdy dla całej długości krzywej AK , otrzymując w ten sposób przesunięcia poziome i pionowe punktu K , wywołane wydłużeniem się łuku:

$$u_1 = - \int_0^s \Delta ds \cos \varphi \quad v_1 = - \int_0^s \Delta ds \sin \varphi \quad (524)$$

gdzie s oznacza długość osi łuku.

Obliczamy teraz przesunięcia poziome i pionowe, wywołane obrotami części łuku DK względem punktu D , za który uważamy kolejno wszystkie punkty krzywej AK (rys. 299). Odpowiada to nasuwaniu krzywej AK na krzywą AK_1 , przedstawionemu na rys. 298.

Dodajemy do siebie przesunięcia Δa i Δb , wywołane kolejnymi obrotami odcinków DK względem wszelkich możliwych położań punktu D .

Otrzymujemy tą drogą następujące składowe przesunięcia punktu K :

$$u_2 = - \int_0^s (b - y) \Delta d\varphi \quad v_2 = \int_0^s (a - x) \Delta d\varphi \quad (527)$$

Przesunięcia punktu K mogą być jeszcze wywołane wydłużeniem części łuku AK wskutek wahań temperatury. Przesunięcia te równe są odpowiednio:

$$u_3 = \pm \int_0^a \alpha t dx \quad v_3 = \pm \int_0^b \alpha t dy \quad (528)$$

We wzorach (528) znak \pm odpowiada podniesieniu się temperatury otoczenia w porównaniu z temperaturą montażu, a znak $-$ odpowiedniemu obniżeniu się tej temperatury; α oznacza tu współczynnik rozszerzalności materiału łuku, a t^0 wahania temperatury.

Aby wreszcie otrzymać obrót przekroju K względem przekroju A , dodajemy do siebie kolejne obroty tego przekroju względem wszystkich punktów D nieskończenie bliskich do siebie, czyli znajdujemy kąt

$$\omega_1 = \int_0^s \Delta d\varphi \quad (529)$$

Co się tyczy przekroju A , to w łuku bezprzegubowym jest on nieruchomy, zaś w razie przegubu w punkcie A , ulega pewnemu skończonemu obrotowi ω_0 . W tym ostatnim wypadku obrót przekroju K będzie wynosił:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 = \omega_0 + \int_0^s \Delta d\varphi \quad (530)$$

Skończone przyrosty współrzędnych punktu K odpowiadające obrotowi ω_0 równają się:

$$u_4 = -\omega_0 \cdot b \quad v_4 = \omega_0 \cdot a \quad (531)$$

co wynika z rozumowania analogicznego do tego, na mocy którego zostały wyprowadzone wzory (527).

Wpływ sił poprzecznych T na przesunięcia punktu K wyrazi się w następujący sposób.

Dwa nieskończenie bliskie przekroje łuku pod działaniem sił przesuną się względem siebie w kierunku promienia łuku o $\frac{\tau}{G} ds = \frac{T}{GA} ds$ (rys. 300), o ile uważać że naprężenia styczne rozkładają się w danym przekroju łuku równomiernie (por. rozdz. VI i VII, 7).

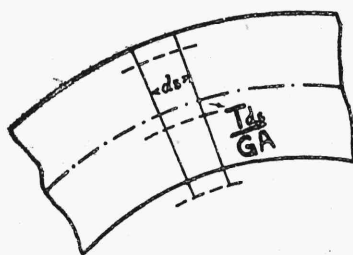
Rzutujemy te przesunięcia na osie współrzędnych, dodajemy je do siebie dla odcinka AK i znajdujemy tą drogą wzory następujące:

$$u_s = \int_0^s \frac{T}{GA} dy \quad v_s = - \int_0^s \frac{T}{GA} dx \quad (532)$$

Dodając do siebie wszystkie obliczone powyżej przyrosty współrzędnych punktu K otrzymujemy dla całkowitych przesunięć tego punktu łuku wielkości następujące:

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \quad (533)$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \quad (534)$$



Rys. 300.

Wielkości u_s i v_s bywają tu jednak najczęściej pomijane, gdyż wpływ ich na odkształcenie łuku jest naogół niewielki.

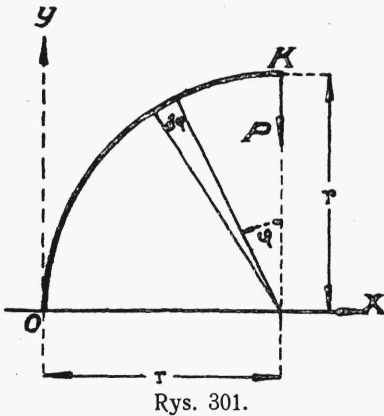
Wstawiamy we wzory (533) i (534) wartości dla u i v , obliczone z równań (523) — (532), i otrzymujemy ostatecznie następujące wzory dla przesunięć punktu K :

$$u = - \int_0^s \Delta ds \cos \varphi - \int_0^s (h - y) \Delta d\varphi \pm \pm \int_0^a x t dx - \omega_0 \cdot b \quad (535)$$

$$v = - \int_0^s \Delta ds \sin \varphi + \int_0^s (a - x) \Delta d\varphi \pm \pm \int_0^b y t dy + \omega_0 \cdot a \quad (536)$$

Wzory te łącznie ze wzorem (530) pozwalają na obliczenie przesunięć dowolnego punktu K łuku lub innego pręta zakrzywionego oraz kąta obrotu przekroju normalnego, przechodzącego przez ten punkt. Są to tak zwane wzory Bresse'a.

Wielkości Δds i $\Delta d\varphi$ we wzorach (535) i (536) powinny być obliczone ze wzorów (516) i (518) względnie (516'), jako funkcje M i N .



Zastosujemy podane tu wzory w wypadku przedstawionym na rys. 301. Mamy więc pręt o kształcie ćwiartki koła i o przekroju jednostajnym, obciążony siłą P zaczepioną w punkcie K . Chodzi o wyznaczenie pionowego przesunięcia v punktu K . Moment zginający i siła podłużna w pewnym przekroju łuku, nachylnym względem osi OX o kąt φ równe są odpowiednio:

$$\begin{aligned} M &= P(r - x) = P[r - r(1 - \sin \varphi)] = Pr \sin \varphi \\ N &= P \sin \varphi \end{aligned} \quad (537)$$

Wzór (536) przybiera tu następującą postać:

$$\begin{aligned} v &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Pr \sin \varphi d\varphi}{EA} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P}{EJ} (r - r + r \sin \varphi)^2 r d\varphi = \\ &= \frac{Pr}{EA} + \frac{Pr^3}{EJ} \cdot \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (538)$$

Wzory (530), (535) i (536) mogą być zastosowane również i do obliczenia odkształceń belek prostych i ram. Obliczymy np. obrót końcowego przekroju belki utwierdzonej w jednym końcu i obciążonej siłą P w drugim. Stosując tu wzór (530) i zakładając $M = P \cdot x$ i $\Delta d\varphi = \frac{M ds}{EJ}$ otrzymujemy, że

$$\varphi = \omega = \int_0^l \frac{Px dx}{EJ} = \frac{Pl^2}{2EJ}$$

co odpowiada wzorowi (215) z rozdz. VII, 5.

Do wyznaczenia odkształceń łuków przegubowych musimy mieć obliczone kąty ω_0 obrotów przekrojów łuku w przegubach.

W szczególności kąt ω_0 w łuku trójpřegubowym równa się nachyleniu prostej, łączącej przegub A z przegubem C (rys. 288). Oznaczając przez a i b współrzędne przegubu C (osie współrzędnych według rys. 297) a przez c długość cięciwy AC , otrzymujemy:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

stąd zależność między przyrostami a , b i c , wywołanymi odkształceniem się łuku, odpowiada równaniu:

$$2a \Delta a + 2b \Delta b = 2c \Delta c \quad (539)$$

W razie symetrycznego obciążenia łuku $\Delta a = 0$, wobec czego Δb otrzymamy bezpośrednio z równania (539). Przyrost Δc otrzymać możemy ze wzoru (535), uważając za oś OX prostą AC . Dla kąta ω_0 otrzymamy wzór następujący:

$$\omega_0 = \frac{\Delta b}{c \cos \beta}$$

gdzie $\beta = \angle CAB$.

Odkształcenie łuku bezprzegubowego lub innego łuku statycznie niewyznaczalnego w pewnym punkcie K może być obliczone dopiero po wyznaczeniu wielkości H , R_A i M_A , poczem odbywa się, jak wyżej, ze wzorów (530), (535) i (536).

5. Wyznaczenie wielkości H , R_A i M_A w łukach bezprzegubowych.

Obliczenie łuków statycznie niewyznaczalnych odbywa się według tych samych metod, co wykonane wyżej obliczenia innych układów statycznie niewyznaczalnych, w szczególności belek i ram.



Rys. 302.

Gdy chodzi o symetryczne łuki bezprzegubowe, to obliczenie wykonujemy według następującego schematu: odrzucamy myślowo utwierdzenie prawej podpory łuku B (rys. 302), obliczamy przesunięcia u , v i obrót ω

w tym punkcie i ustawiamy równania:

$$\omega_B = 0 \quad u_B = 0 \quad v_B = 0 \quad (540)$$