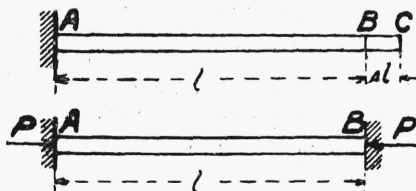


$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \quad (135)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \quad (136)$$

3. Statycznie niewyznaczalne wypadki wyciągania i ściskania.

Bierzemy pręt nieważki utwierdzony w obydwóch końcach (rys. 100). Na pręt ten nie działają żadne siły zewnętrzne. Przypuśćmy, że temperatura środowiska, w którym się pręt znajduje, podniosła się o t^0 . Gdyby



Rys. 100.

pręt był w końcu B swobodny, to doznałby, pod wpływem zmiany temperatury, wydłużenia:

$$\Delta l = l \cdot t \cdot \alpha \quad (137)$$

gdzie α jest to współczynnik rozszerzalności danego materiału t. j. wydłużenie jednostkowe pręta z danego materiału przy podniesieniu się temperatury o 1^0 .

Ponieważ oba końce pręta są zamocowane i wydłużenie jego nie jest możliwe, muszą w punktach A i B powstawać pewne siły ściskające P , wywołujące skrócenie pręta na tę samą wielkość Δl , na jaką się on wydłużył pod wpływem zmiany temperatury. Skrócenie to równa się:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot A} \quad (138)$$

Z porównania wzorów (137) i (138) wynika:

$$l.t.z. = \frac{P.l}{E.A} \quad (139)$$

skąd:

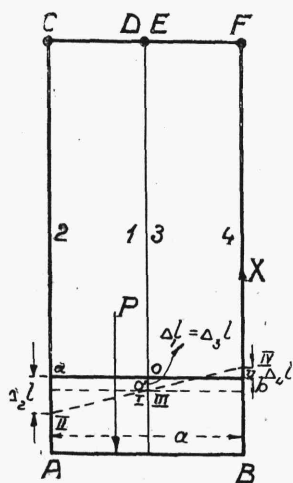
$$P = t.z. . A . E \quad (140)$$

i wreszcie:

$$\sigma = \frac{P}{A} = t.z. . E \quad (140')$$

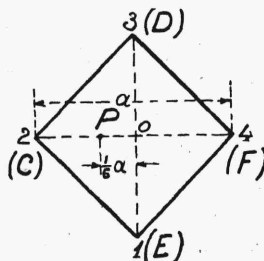
W ten sposób siły, działające na pręt, wyznaczyć mogliśmy w danym wypadku jedynie dzięki wzorom na odkształcenie prętów ścisanych.

Inny przykład układu, dla którego równania, uzupełniające równania statyki, czerpać należy ze wzorów na odkształcenie, podany jest na rys. 101. Mamy tu skrzynkę $AabB$, zawieszoną na czterech prętach. W razie symetrycznego obciążenia skrzynki ciężar rozkłada się równomiernie na wszystkie cztery pręty, o ile tylko mają one jednakową długość i przekrój poprzeczny.



Rys. 101.

Przypuśćmy jednak, iż ciężar zaczepiony jest niesymetrycznie w punkcie P skrzynki (rys. 102) i że mamy do wyznaczenia siły, działające w poszczególnych prętach. Odrzucamy jeden z prętów podtrzymujących skrzynkę (np. pręt 4) i zastępujemy jego działanie przez niewiadomą siłę X wyciągającą pręt 4, a więc skierowaną w stronę od węzła (F), czyli ku górze (por. rozdz. II, 6).



Rys. 102.

Siłę X możemy rozłożyć na trzy kierunki pionowe, przechodzące przez punkty 1, 2, 3. Będziemy wtedy mieli, w myśl reguły dźwigni, w punkcie 2

siłę X skierowaną ku dołowi, zaś w punktach 1 i 3 dwie siły X skierowane ku górze.

Ciężar P , zaczepiony w punkcie położonym w odległości $\frac{1}{3}a$ od punktu O , rozkłada się, po odrzuceniu pręta 4, na siłę $\frac{1}{3}P$, działającą w punkcie 2, i na dwie siły $\frac{1}{3}P$ zaczepione w punktach 1 i 3. Wszystkie te siły działają w kierunku ku dołowi.

W rezultacie otrzymamy, że na pręt 2 działa siła $S_2 = \frac{P}{3} + X$, a na pręty 1 i 3 odpowiednio siły $S_1 = S_3 = \frac{P}{3} - X$.

Na podstawie przedstawionych w ten sposób sił, działających w prętach podtrzymujących skrzynkę, możemy wyznaczyć wydłużenia tych prętów $\Delta_1 l$, $\Delta_2 l$, $\Delta_3 l$ i $\Delta_4 l$.

Równają się one odpowiednio:

$$\begin{aligned} \Delta_1 l &= \Delta_3 l = \frac{S_1 \cdot l}{E \cdot A} \\ \Delta_2 l &= \frac{S_2 \cdot l}{E \cdot A} \quad \Delta_4 l = \frac{X \cdot l}{E \cdot A} \end{aligned} \quad (141)$$

Wobec tych wydłużeń płaszczyzna aob (rys. 101) dozna pewnego nachylenia w ten sposób, iż punkt a znajdzie się w punkcie II , punkt O w punkcie O' , zaś punkt b w punkcie IV .

Na podstawie rysunku 101 można ustalić, iż przesunięcie v punktu zaczepienia siły X równa się:

$$v = \Delta_2 l - \Delta_1 l - \Delta_4 l \quad (142)$$

Ponieważ, w rzeczywistości, pręt 4 nie został przecięty, więc przesunięcie się v punktu 4 musi równać się tej zmianie długości, której doznał pręt pod działaniem siły X . Stąd mamy równanie;

$$v = \Delta_4 l \quad (143)$$

Po wstawieniu wartości wydłużeń ze wzorów (141) we wzór (142) i po wypełnieniu wzoru (143) dochodzimy do równania:

$$2 \cdot \frac{S_1 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{S_2 \cdot l}{E \cdot A} - \frac{X \cdot l}{E \cdot A} \quad (143')$$

wreszcie do równania:

$$2 \left(\frac{P}{3} - X \right) = \frac{P}{3} + X - X$$

Stąd wyznaczamy siły we wszystkich czterech prętach 1, 2, 3, 4:

$$X = \frac{P}{6}, \quad S_1 = S_3 = \frac{P}{6}, \quad S_2 = \frac{P}{2}$$

W razie gdyby ciężar P został zaczepiony do jakiegoś innego punktu płaszczyzny AB , niesymetrycznie względem przekątnej $(C)(F)$, to cały powyższy sposób rozumowania nie uległby zmianie, tylko siły w prętach 1 i 3 nie byłyby wówczas sobie równe.

Poza przykładami w rodzaju omówionych wyżej ze statycznie niewyznaczalnymi przypadkami wyciągania i ściskania prętów prostych spotykamy się jeszcze w obliczeniach statycznie niewyznaczalnych kratownic (rozdz. XIV, 6) i układów ramowo-kratowych (rozdz. XV).
