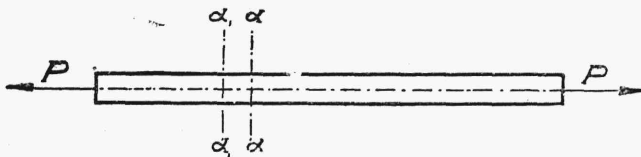


ROZDZIAŁ V.

Napężenia i odkształcenia przy wyciąganiu i ściskaniu.

1. Wyciąganie i ściskanie jednokierunkowe.

Przypuśćmy, że nieważki pręt sprężysty (rys. 90) o kształcie graniastostłupa wyciągany jest przez dwie równe sobie i przeciwne, co do zwrotu,



Rys. 90.

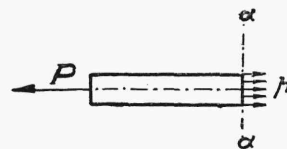
siły P , działające wzdłuż osi graniastostłupa (t. j. wzdłuż prostej łączącej środki ciężkości jego poszczególnych przekrojów poprzecznych).

Pomijamy, w myśl założenia o naprężeniach miejscowych (rozd. I, 5), sposób, w jaki działanie sił P rozchodzi się bezpośrednio w okolicy punktu zaczepienia, i uważamy, że w myśl założenia płaskich przekrojów, pewien przekrój $\alpha\alpha$ pręta po odkształceniu się tego ostatniego zajmie położenie $\alpha_1\alpha_1$, pozostając nadal płaskim, i że wymiary przekroju poprzecznego nie ulegają zmianie.

Po dokonaniu przekroju wyłączamy w myśli lewą (rys. 91) część pręta i zastępujemy oddziaływanie na nią prawej części przez siły p , rozłożone w przekroju w sposób ciągły i działające do tego przekroju prostopadle.

Wobec małych wymiarów poprzecznych pręta, w porównaniu do jego długości, uważamy, że siły wewnętrzne w przekroju $\alpha\alpha$ rozkładają się

równomiernie, to znaczy, że $\sigma = \frac{dp}{dA} = \text{const}$ (por. rozdz. I, 3).



Rys. 91.

Stosunek $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ t. j. stosunek wydłużenia pręta do jego długości nazywamy wydłużeniem jednostkowym.

Zależność między naprężeniem w danym przekroju pręta a jednostkowym wydłużeniem wyraża się doświadczalnym prawem Hooke'a, według którego między naprężeniem a wydłużeniem jednostkowym zachodzi stosunek proporcjonalności. Prawo Hooke'a otrzymuje następujący wyraz matematyczny:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad (113)$$

gdzie E nazywamy współczynnikiem sprężystości przy wyciąganiu (ściskaniu). Współczynnik ten ma wymiar k/cm^2 .

Prawo Hooke'a znajduje zastosowanie tylko do pewnej granicznej wartości naprężenia, które zależy od rodzaju materiału. Granica ta nazywa się granicą proporcjonalności. Wszystkie następne rozumowania rozdziału oparte są na założeniu, że ani granica proporcjonalności ani granica sprężystości w rozpatrywanych zagadnieniach nie zostały przekroczone.

O ile pręt jest nieważki, wszystkie przekroje jego znajdują się w jednakowych warunkach i dlatego naprężenie σ nie ulega zmianie na całej długości pręta. Z tego powodu również i wydłużenia jednostkowe ε , jako związane z naprężeniami prawem Hooke'a, zachowują tę samą wartość dla całego pręta.

Naprężenia σ wyrażają się dla pręta nieważkiego wzorem następującym:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (114)$$

gdzie A jest to pole przekroju poprzecznego prostopadłego do osi pręta.

Jeżeli pręt jest utwierdzony jednym końcem, na drugim zaś ma zaczepioną siłę P , to powyższe rozumowanie nie zmieni się, o ile tylko pręt jest nieważki (rys. 92 str. 81).

O ile pręt (rys. 93 na str. 81) posiada pewien ciężar własny, wówczas na każdy z przekrojów jego działa inna siła i wobec tego wzór (114) należy zastąpić przez wzór:

$$\sigma = \frac{S}{A} \quad (115)$$

gdzie S oznacza siłę, działającą prostopadle do danego przekroju i zmieniającą się wzdłuż długości pręta.

Jeżeli przyjąć, iż naprężenia nie ulegają zmianie w płaszczyźnie danego przekroju pręta nawet w razie, gdy pręt ten nie jest przyzmatyczny, wówczas można określić kształt, jaki powinien mieć pręt, aby we wszystkich jego przekrojach naprężenie było niezmiennie, czyli aby

$$\sigma = \text{const.} = R_w \quad (116)$$

gdzie R_w oznacza największe naprężenie, które w danym wyciąganym pręcie może być dopuszczalne. Pręty, posiadające własność, wyrażoną wzorem (116), nazywamy prętami o równomiernej wytrzymałości na wyciąganie.

Bierzemy przekrój bb' oddalony o x od końca pręta (rys. 93). Na przekrój ten działa naprężenie:

$$\sigma = \frac{s}{A} = \frac{C_x + P}{A} \quad (117)$$

gdzie C_x oznacza ciężar części pręta położonej poniżej przekroju bb' .

Przechodzimy w dalszym ciągu do przekroju aa' położonego o dx wyżej od przekroju bb' . W przekroju tym działa naprężenie:

$$\sigma = \frac{C_x + P + A\gamma dx}{A + dA} \quad (118)$$

gdzie dA oznacza przyrost pola przekroju pręta przy przejściu od przekroju bb' do przekroju aa' , zaś γ ciężar jednostkowy pręta. Odejmując od siebie równania (118) i (117) i mając na uwadze, że $\sigma = \text{const.} = R$, otrzymujemy (znaczek przy R opuszczony dla uproszczenia wzorów):

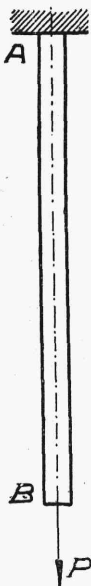
$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{R} \cdot dx \quad (119)$$

skąd wynika, że

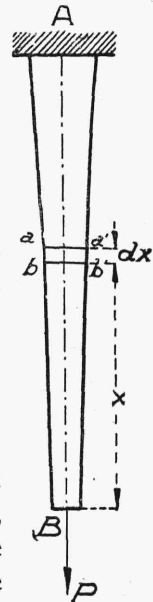
$$\lg A = \frac{\gamma}{R} \cdot x + C$$

otrzymujemy więc równanie:

$$A = e^{\frac{\gamma}{R} x + c} \quad (120)$$



Rys. 92.



Rys. 93.

Jeżeli przy $x = 0$ $A = A_0$, to równanie (120) przybiera postać:

$$A = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma}{R} x} \quad (121)$$

Aby z powyższego wyrażenia dla pola przekroju wyznaczyć kształt pręta, należy np., w razie przekroju kwadratowego, wstawić tu $A = a^2$ (a — bok kwadratu), zaś, w razie przekroju kołowego, $A = \pi \cdot r^2$ (r — promień koła) i t. d. Z równania (121) pozatem wynika, że pole przekroju pręta o równomiernej wytrzymałości na wyciąganie zmniejsza się w kierunku ku dołowi.

Równanie (113) daje bezpośrednio możność obliczenia wydłużeń.

Gdy chodzi o pręt nieważki, wówczas, wstawiając w to równanie $\sigma = \frac{P}{A}$ i $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, otrzymujemy:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot A} \quad (122)$$

W przypadku pręta, posiadającego ciężar własny, wzór (122) komplikuje się z powodu zmienności siły podłużnej.

Bierzemy więc pewien nieskończenie mały odcinek pręta dx odległy o x od końca pręta. Ponieważ naprężenia, działające na końcowy przekrój odcinka dx , przy pominięciu ciężaru samego odcinka i przy tych samych oznaczeniach, co na rys. 93, wyrażają się wzorem:

$$\sigma = \frac{C_x + P}{A} \quad (123)$$

więc wydłużenie odcinka dx , stosownie do wzoru (122), równa się:

$$\Delta dx = \frac{(C_x + P) dx}{E \cdot A} \quad (124)$$

Ponieważ zaś całkowite wydłużenie pręta jest sumą wydłużeń wszystkich nieskończenie małych jego odcinków, mamy więc, że:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{C_x + P}{E \cdot A} \cdot dx \quad (125)$$

gdzie pole A jest znaną funkcją x , a w przypadku pręta o równomiernej wytrzymałości funkcją, wyrażającą się wzorem (121).

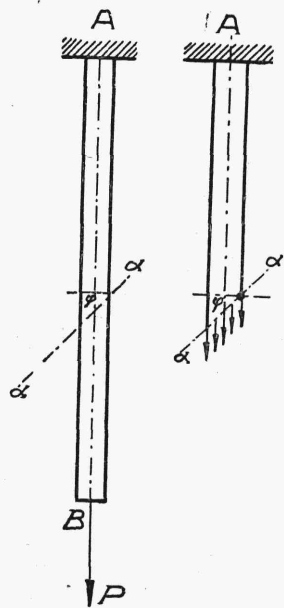
O ile we wszystkich poprzednich przykładach skierujemy siły S i P odwrotnie, będziemy mieli, zamiast wyciągania, zjawisko ściskania. Przesunięcia wywołane ściskaniem będą miały znak ujemny w porównaniu do poprzednich; wydłużenie ujemne często nazywamy skróceniem lub skróttem.

Po obliczeniu naprężeń działających (rzeczywistych) w pręcie wyciąganym (np. w wieszaku) lub ściskanym (np. w słupie) musimy je porównać z naprężeniami, które w danym materiale i w danej budowlu mogą powstawać bez narażenia budowli na niebezpieczeństwo (naprężenia bezpieczne, względnie dopuszczalne; vid. rozdz. IX).

Porównanie naprężeń rzeczywistych (σ) i bezpiecznych (R) odbywa się na podstawie równania (lub nierówności):

$$\sigma \leq R \quad (126)$$

Im bardziej zbliża się σ do R , tem przekrój pręta obliczony na podstawie równań (114) i (121) wypada mniejszy i budowla jest wykonana oszczędniej. W razie gdy przyjmiemy, że $\sigma = R$, wspomniane równania dają bezpośrednią możliwość wyznaczenia potrzebnych pól przekroju. Ze wzoru (126) wynika, że pręt o równomiernej wytrzymałości jest prętem, co do zużycia materiału, najoszczędniejszym.



Rys. 94 i 95.

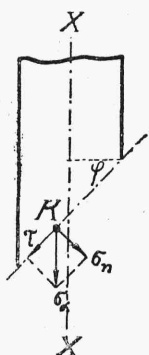
Rozważając warunki równowagi pręta wyciąganego (lub ściskanego), dotąd korzystaliśmy tylko z przekrojów poprzecznych prostopadłych do osi i mówiliśmy jedynie o naprężeniach, działających prostopadle do danego przekroju.

Wyobraźmy sobie teraz przekrój aa ukośny względem osi pręta (rys. 94).

Po odrzuceniu części pręta poniżej przekroju musimy dla równowagi górnej jego części wyobrazić sobie w przekroju aa siły ciągłe, dające równomierne rozłożone naprężenia σ_a skierowane równoległe do osi (rys. 95).

Oznaczamy przez φ kąt nachylenia płaszczyzny aa względem płaszczyzny prostopadłej do osi pręta. Wówczas pole przekroju ukośnego będzie równe:

$$A_1 = \frac{A}{\cos \varphi}$$



Rys. 96.

a naprężenie, działające na ten przekrój równoległe do osi pręta, wyniesie:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{P}{A_1} = \frac{P \cos \varphi}{A} \quad (127)$$

Naprężenie składowe, działające w każdym punkcie K płaszczyzny $\alpha\alpha$ do niej prostopadłe (naprężenie normalne), wyrazi się wzorem (rys. 96):

$$\sigma_n = \sigma_{\alpha} \cdot \cos \varphi \quad (128)$$

Stycznie do płaszczyzny $\alpha\alpha$ działa na nią w każdym punkcie naprężenie styczne:

$$\tau = \sigma_{\alpha} \cdot \sin \varphi \quad (129)$$

Wstawiając we wzory (128) i (129) wartość σ_{α} ze wzoru (127), otrzymujemy:

$$\sigma = \frac{P}{A} \cdot \cos^2 \varphi = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi \quad (130)$$

$$\tau = \frac{P}{A} \cos \varphi \cdot \sin \varphi = \sigma_x \cos \varphi \cdot \sin \varphi \quad (131)$$

gdzie σ_x oznacza naprężenie równoległe do osi pręta, działające na płaszczyznę prostopadłą do tej osi.

Z równań (130) i (131) wynika, że naprężenia prostopadłe do przekroju $\alpha\alpha$ (normalne) mają największe wartości przy $\varphi = 0$ t. j. wtedy, gdy płaszczyzna przekroju jest prostopadła do osi, zaś naprężenia styczne do tego przekroju wtedy, gdy $\varphi = 45^\circ$, ponieważ $\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$.

A więc mamy, że

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \quad \text{i} \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{A}$$

Powyższe wzory nie ulegną zmianie, o ile ciała, których wyciąganie omawialiśmy, będą miały w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku długość nieograniczoną.