

Strzałki na rysunku oznaczają części belki, na których ma miejsce dany moment bezwładności.

Sposób momentów wtórnych można wyzyskać i do bezpośredniego wykreślenia odkształconej. W tym celu dzielimy pole wykresu momentów na pionowe paski i znajdujemy pola tych pasków, uważając je za siły, działające na belkę i mające linie działania, przechodzące przez środki ciężkości pasków. Dla sił tych wykreślamy linię sznurową przy odległości biegunowej  $\delta = EJ$ . Odcinki pionowe między krzywą a jej zamykającą dadzą nam poszukiwane ugięcia belki a więc i jej odkształconą.

Postępujemy tu więc zupełnie tak samo, jak to zostało opisane w rozdz. II w § 3 i § 4.

Chodzi o właściwe ustalenie skali rysunku.

Zarówno pola pasków, na które podzieliliśmy wykres momentów, jak i iloczyn  $EJ$  mają tu jeden i ten sam wymiar  $k \cdot \text{cm}^2$ , przyjmujemy więc dla wieloboku sił skalę:  $1 k \cdot \text{cm}^2 = s \text{ cm}$ .

Wobec tego, że moment zginający  $M_x$  w danym przekroju belki nie może być zależny od odległości biegunowej wieloboku sił, z którego został wyznaczony, iloczyn  $M_x = y_n \delta$  ma dla danej belki i danego obciążenia wielkość stałą. Wynika stąd, że skoro  $\delta$  podzielimy przez  $n$ , to  $y = y_n$  wzrośnie  $n$ -krotnie.

Powyższe pozwala nam na otrzymanie ugięć belki  $y$  dowolnie powiększonych. Aby więc np. 100-krotnie powiększyć na rysunku ugięcia belki, przyjmujemy za odległość biegunową  $\delta$  nie  $EJ$ , lecz  $0,01 EJ$ .

O ile poszczególne części belki mają różne momenty bezwładności, to musimy przed wykreśleniem linii sznurowej doprowadzić wykres momentów od obciążenia rzeczywistego do stanu, przedstawionego na rys. 151, a omówionego w odcinku poprzednim niniejszego paragrafu.

Z równań (246) wynika, że przekształcenie wykresu momentów może być w tym wypadku zastąpione przez stosowanie dla różnych odcinków belki różnych wielkości  $\delta$ , co jednak bardziej naraża na błędy w obliczeniu, niż sposób omówiony wyżej.

## 7. Wpływ sił poprzecznych na wyginanie się belek.

Siły poprzeczne, wywołując przesuwanie się względem siebie przekrojów poprzecznych belki oraz jej warstw poziomych (rys. 132 c i 132 d), wywierają przez to wpływ na jej ostateczne wygięcie.

Wyobraźmy sobie, że odkształcona oś belki, pod działaniem zarówno momentów zginających, jako też i sił poprzecznych, przybiera postać, od

powiadającą równaniu:  $y=f(x)$ . Pionowe przesunięcie  $y$  każdego punktu osi belki składać się musi z pionowego przesunięcia  $y_1=f_1(x)$ , wywołanego działaniem momentów zginających, i z pionowego przesunięcia  $y_2=f_2(x)$ , wywołanego działaniem sił poprzecznych. Mamy więc, że

$$y=y_1+y_2$$

a co za tem idzie, otrzymujemy równanie:

$$y''=y_1''+y_2''$$

wyrażające zależność między krzywiznami odkształconej osi belki, wywołanemi odpowiednio przez momenty zginające i przez siły poprzeczne.

Przy powyższych oznaczeniach różniczka  $dy_2$  będzie przedstawiała pionowe przesunięcie się względem siebie dwóch oddalonych o  $dx$  punktów osi, wobec czego będzie się równała

$$dy_2=-\beta dx$$

gdzie  $\beta$  oznacza, jak wyżej (rozd. VI, 1), przesunięcie jednostkowe, a znak -- (mniej) odpowiada przyjętemu układowi osi współrzędnych (por. § 5 niniejszego rozdziału).

Naprężenia styczne na osi obojętnej, które przedewszystkiem nas obchodzą w obliczeniu dodatkowych przesunięć osi belki pod działaniem sił poprzecznych, wyrażają się dla przekroju prostokątnego wzorem:

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A}$$

który może być zastąpiony przez wzór ogólniejszy:

$$\tau = m \cdot \frac{T}{A}$$

gdzie  $m$  zależy wyłącznie od kształtu przekroju poprzecznego belki (rozd. VII, 4).

Wobec zależności  $\tau = \beta \cdot G$  (por. rozdz. VI, 1) mamy, że

$$\beta = m \cdot \frac{T}{A \cdot G}$$

Otrzymujemy w dalszym ciągu, że

$$-\beta = \frac{dy_2}{dx} \quad \text{i że} \quad -\frac{d\beta}{dx} = \frac{d^2y_2}{dx^2}$$

Wobec tego krzywizna belki  $y_2''$ , wywołana przez naprężenia styczne, może być przedstawiona, przy osiach współrzędnych przyjętych w § 5, za pomocą wzoru:

$$y_2'' = \frac{d^2 y_2}{dx^2} = - \frac{d\beta}{dx} = - \frac{m}{AG} \cdot \frac{dT}{dx} = - \frac{m}{AG} \cdot \frac{a^2 M}{dx^2}$$

Dodając tę krzywiznę do krzywizny  $y_1'' = \frac{d^2 y_1}{dx^2}$ , wywołanej przez moment zginający, dochodzimy do równania następującego:

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = M - m \cdot \frac{EJ}{AG} \cdot \frac{d^2 M}{dx^2}$$

W razie obciążenia ciągłego i równomiernego, wynoszącego  $q$  na m. b., mamy:

$$M = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad \text{i} \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = -q$$

a więc równanie odkształconej przybiera postać następującą:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} + m \cdot \frac{EJ}{AG} \cdot q$$

skąd wynika, że całkowite ugięcie belki w środku będzie równe

$$y = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ} + \frac{mq l^2}{8AG}$$

Wpływ naprężeń stycznych na wygięcie belki nie przekracza naogół 3% dla belek o przekroju prostokątnym, przy stosunku rozpiętości belki ( $l$ ) do jej wysokości ( $h$ ) równym 10, dochodzi jednak do 25% dla krótkich belek dwuteowych.

Ugięcia belki, przy uwzględnieniu naprężeń stycznych, mogą być obliczone również i na podstawie metody momentów wtórnych. W tym celu, rozpatrując, jak wyżej, ugięcie całkowite  $y$ , jako sumę  $y_1 + y_2$ , wyznaczamy  $y_1$  i  $y_2$  odpowiednio ze wzorów:

$$y_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{EJ} \quad y_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{EJ}$$

w których  $\mathfrak{M}_1$  oznacza moment zginający w danym przekroju belki od obciąż-

zenia wtórnego  $\eta_1 = M$ , a  $\mathfrak{M}_2$  moment zginający od obciążenia wynoszącego na metr bieżący belki  $\eta_2 = -m \frac{EJ}{AG} \cdot \frac{d^2 M}{dx^2}$ .

Stosując wzór

$$y = \frac{\mathfrak{M}_1}{EJ} + \frac{\mathfrak{M}_2}{EJ}$$

kolejno do poszczególnych punktów belki i łącząc ze sobą końce odpowiednich rzędnych, otrzymać możemy w ten sposób odkształcenie osi belki, jako rezultat zarówno działania momentów zginających, jak i sił poprzecznych<sup>1)</sup>.

Kąt nachylenia stycznej do osi odkształconej w danym punkcie belki względem osi  $X$ -ów, przy uwzględnieniu wpływu sił stycznych na wyginanie się belki, otrzymać możemy podobnie, jak wówczas, gdyśmy tego wpływu nie uwzględniali, bądź drogą różniczkowania równania odkształconej, bądź też sposobem momentów wtórnych, czyli zapomocą wzoru:

$$\varphi = \frac{\mathfrak{T}_1}{EJ} + \frac{\mathfrak{T}_2}{EJ}$$

gdzie  $\mathfrak{T}_1$  i  $\mathfrak{T}_2$  oznaczają siły poprzeczne w danym przekroju belki pod działaniem obciążeń wtórnych  $\eta_1$  i  $\eta_2$ , omówionych wyżej.

Należy mieć na uwadze, że w danym wypadku kąty, jakie tworzą styczne do odkształconej w końcach belki z osią  $X$ -ów, nie są równoznaczne z kątami nachylenia końcowych przekrojów belki względem osi  $X$ -ów, gdyż, uwzględniając wpływ sił poprzecznych na odkształcenie belki zginanej, nie możemy liczyć się z zachowaniem przekrojów płaskich.

<sup>1)</sup> Por. S. Timoschenko and Lessels „Applied Elasticity“ 1925.