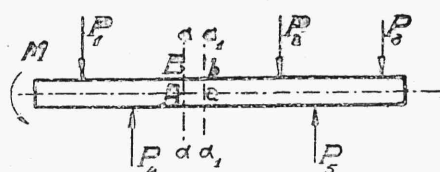


## Napreżenia i odkształcenia przy zginaniu w płaszczyźnie sił.

### 1. Napreżenia normalne do przekroju poprzecznego belki.

Weźmy belkę pryzmatyczną, przedstawioną na rys. 117 i położoną w ten sposób, że płaszczyzna rysunku przecina przekrój poprzeczny belki wzdłuż jego osi symetrii (prostopadłej do osi belki). Płaszczyznę tę będziemy w dalszym ciągu nazywali płaszczyzną symetrii. O ile siły zewnętrzne prostopadłe do osi i momenty zewnętrzne działają w płaszczyźnie symetrii, wówczas i wygięcie belki nastąpi w tej samej płaszczyźnie. Uważamy, iż



Rys. 117.

w rozpatrywanych w dalszym ciągu belkach ich wymiary poprzeczne są małe w porównaniu do ich długości, a ugięcia, czyli przesunięcia poszczególnych punktów osi belek w kierunku prostopadłym do ich osi, małe w porównaniu do wymiarów belek.

Siły i momenty, działające na belkę, wywołują w każdym jej przekroju  $\alpha\alpha$  (rys. 117) moment zginający  $M_\alpha$  i siłę poprzeczną  $T_\alpha$ .

Wpływ sił poprzecznych na zginanie belek będzie omówiony w innym miejscu (§ 4 i 7), narazie zaś zakładamy, że  $T_\alpha = 0$ . Wypadek, gdy istotnie  $T_\alpha = 0$ , nazywa się zginaniem czystym i ma np. miejsce, gdy na belkę w dwóch punktach swobodnie podpartą działają dwa równe sobie momenty, zaczepione na jej końcach i skierowane ku sobie (rozd. IV. § 3).

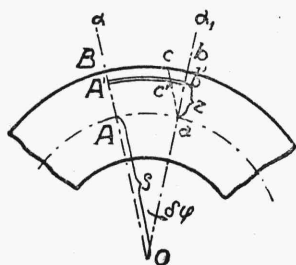
Trzymamy się tu założenia płaskich przekrojów.

Przeprowadzamy w cieple belki powierzchnię cylindryczną, normalną do płaszczyzny symetrii (o kierownicy równoległej do osi belki), posiadającą własność następującą: jeżeli wyobrazimy sobie, iż belka została podzielona na szereg włókien równoległych do osi, to włókna, znajdujące się

między omówioną powierzchnią a jedną z krawędzi belki, doznają przy odkształceniu wydłużenia, podczas gdy włókna, zawarte między tą powierzchnią a drugą krawędzią belki, skracają się. Powierzchnię, o której mowa, nazywamy powierzchnią obojętną, a przecięcie się jej z płaszczyzną przekroju osią obojętną przekroju. Krzywa przecięcia się powierzchni obojętnej z płaszczyzną symetrii belki, jak to będzie dowiedzione niżej, pokrywa się z osią belki.

Zrozumiałem jest, że włókna wydłużone (wyciągane) znajdują się po stronie wypukłej belki, zaś skrócone (ściskane) z jej strony wklęsłej.

Na rysunku 118 przedstawiony został fragment belki po wygięciu, odpowiadający na rys. 117 nieskończenie małemu odcinkowi  $Aa$ . Promień powierzchni obojętnej (odkształconej osi belki), naogół zmienny, oznaczamy przez  $\rho$ . Uważamy, że na małej bardzo przestrzeni  $Aa$  promień  $\rho$  jest wielkością stałą.



Rys. 118.

Prosta  $ac$  jest równoległą do promienia  $AO$ , wobec czego  $b'c'$  oznacza wydłużenie włókna  $A'c'$ , powstałe przy zginaniu belki.

Obliczamy jednostkowe wydłużenie włókien (tu  $A'c' = Aa$ ):

$$\varepsilon = \frac{b'c'}{Aa} \quad (164)$$

Jeżeli oznaczymy mały kąt  $AOa$ , powstały przy zginaniu między przekrojami  $A$  i  $a$ , przez  $\Delta\varphi$ , to będziemy mieli dla wycinków koła  $Aoa$  i  $c'al'$ , że

$$\varepsilon = \frac{b'c'}{Aa} = \frac{z\Delta\varphi}{\rho\Delta\varphi} = \frac{z}{\rho} \quad (165)$$

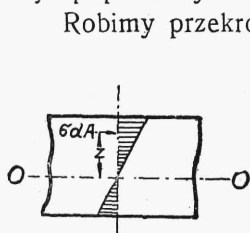
gdzie  $z$  oznacza odległość punktu  $b'$  od powierzchni obojętnej.

Mnożąc obie części równania (165) przez  $E$ , dostaniemy, na podstawie prawa Hooke'a, następujący wzór dla naprężeń, normalnych do przekroju poprzecznego belki:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{z}{\rho} \quad (166)$$

Z równania (166) wynika, że naprężenia normalne w danym przekroju są funkcją liniową odległości poszczególnych punktów od płaszczyzny obojętnej. Naprężenia będą więc miały za wykres linię prostą, nachyloną względem osi. W wykresach tego rodzaju zwykle przyjmujemy za oś

odciętych (w danym razie oś odległości  $z$  od osi obojętnej) samą linię przekroju. Wykres taki przedstawiony jest np. dla fragmentu belki o przekroju poprzecznym niesymetrycznym względem osi obojętnej na rys. 119.



Rys. 119.

Robimy przekrój  $\alpha\alpha$  prostopadły do osi belki (rys. 117) i rzutujemy siły, działające na jej lewą część, na oś  $X$ -ów, pokrywającą się z nieodkształconą osią belki. Ponieważ na belkę żadne zewnętrzne siły poziome (równoległe do osi  $X$ -ów) nie działają, więc w lewą część równania równowagi  $\Sigma X = 0$  wstawiamy tylko siły sprężystości, działające na przekrój  $\alpha\alpha$ .

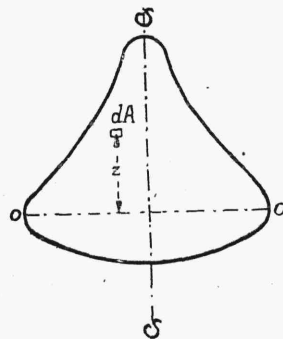
Na każdą cząstkę  $dA$  pola przekroju działa równoległa do osi pręta siła  $\sigma dA$  (rys. 119). Dochodzimy w ten sposób do równania:

$$\Sigma X = \int_A \sigma dA = 0 \quad (167)$$

które w związku z równaniem (166) przybiera następującą postać:

$$\frac{E}{\rho} \int_A z dA = 0 \quad (168)$$

Całka  $\int_A z dA$ , wzięta dla całego pola przekroju poprzecznego belki, oznacza moment statyczny tego przekroju względem osi obojętnej  $OO$  (rys. 120). Z równania (168) wynika (rozdz. II, 1), że oś  $OO$  przechodzi przez środek ciężkości przekroju poprzecznego belki, a więc że przecięcie się powierzchni obojętnej z płaszczyzną symetrii belki i oś podłużna belki (t. j. miejsce geometryczne środków ciężkości jej przekrojów poprzecznych) pokrywają się ze sobą.



Rys. 120.

Zapomocą przekroju  $\alpha\alpha$  odcinamy lewą część belki od prawej. Moment sił wewnętrznych, działających prostopadłe do przekroju  $\alpha\alpha$ , musi w sumie z momentem zginającym  $M_\alpha$ , obliczonym według reguł, podanych w rozdziale IV, czynić zadość równaniu równowagi  $\Sigma M = 0$ .

Mamy więc stąd, że:

$$\frac{E}{\rho} \int_A z^2 dA = M_\alpha \quad (169)$$

Ponieważ  $\int_A z^2 dA = J$  t. j. momentowi bezwładności pola przekroju względem osi obojętnej, więc (znaczek  $\alpha$  opuszczony).

$$\frac{EJ}{\rho} = M \quad (170)$$

Wstawiamy tu  $\frac{E}{\rho}$  z równania (166), poczem otrzymujemy:

$$\frac{J \cdot \sigma}{z} = M, \quad \text{skąd} \quad \frac{M \cdot z}{J} = \sigma. \quad (171)$$

O ile odległości od osi obojętnej punktów najbardziej oddalonych w obydwóch kierunkach oznaczmy przez  $z_1$  (dla strony wypukłej) i  $z_2$  (dla wklęsłej), to otrzymamy następujące naprężenia największe:

$$\text{wyciągające:} \quad \sigma_1 = + \frac{M \cdot z_1}{J} \quad (172)$$

$$\text{ściskające:} \quad \sigma_2 = - \frac{M \cdot z_2}{J}$$

W razie przekroju symetrycznego względem osi obojętnej  $z_1 = z_2 = \frac{h}{2}$ , gdzie  $h$  jest to wysokość przekroju. Mamy wówczas:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M \cdot h}{2J} = \frac{M}{W} \leq R_s \quad (173)$$

gdzie  $R_s$  oznacza bezpieczne (dopuszczalne) naprężenie przy zginaniu.

Iloraz  $W = J : \frac{h}{2}$  nazywamy wskaźnikiem wytrzymałości (lub momentem wytrzymałości) przekroju. Dla przekrojów niesymetrycznych korzystamy z oznaczeń:

$$\frac{J}{z_1} = W_1 \quad \text{i} \quad \frac{J}{z_2} = W_2 \quad (174)$$

Wówczas wzory (172) przybierają postać następującą:

$$\sigma_1 = + \frac{M}{W_1}, \quad \sigma_2 = - \frac{M}{W_2} \quad (175)$$