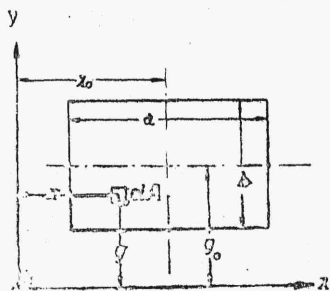


Ogólny sposób obliczania momentów odśrodkowych polega na tem, że dane pole dzielimy prostymi równoległymi do osi współrzędnych na małe prostokąty o polu  $\Delta A$ , poczem wykonywamy sumowanie:

$$J_{xy} = \sum xy \Delta A \quad (34)$$

Dla przykładu podajemy poniżej obliczenie momentu odśrodkowego prostokąta przedstawionego na rys. 52. Całka (33) przybiera tu postać następującą:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_A xy dA = \int_A \int_A xy dx dy = \int_{y_0 - \frac{b}{2}}^{y_0 + \frac{b}{2}} y dy \int_{x_0 - \frac{a}{2}}^{x_0 + \frac{a}{2}} x dx = \\ &= x_0 y_0 ab = x_0 y_0 A. \end{aligned}$$



Rys. 52.

Zarówno biegunowe momenty bezwładności, jak i momenty odśrodkowe, mają ten sam wymiar, co momenty bezwładności, czyli wymiar  $\text{cm}^4$ .

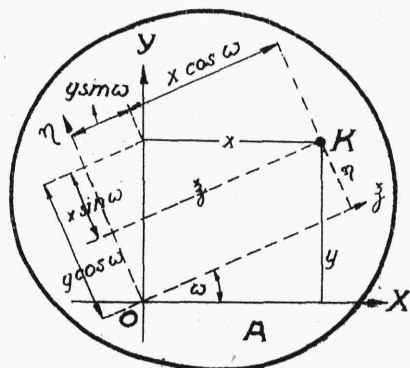
#### 4. Zależność między momentami bezwładności obliczonymi względem osi do siebie nachylonych.

Mamy dla pewnego pola  $A$  (rys. 53) obliczone momenty bezwładności i moment odśrodkowy względem osi prostokątnych  $OX$  i  $OY$  (nie necessarily środków i głównych).

Są to odpowiednio:

$$J_x = \int_A y^2 dA \quad J_y = \int_A x^2 dA$$

$$J_{xy} = \int_A xy dA$$



Rys. 53.

Chodzi o wyznaczenie momentu bezwładności danego pola względem osi  $O\xi$ , przechodzącej przez punkt  $O$  i nachylonej względem osi  $OX$

o kąt  $\omega$ , oraz względem osi  $O\eta$  prostopadłej do osi  $O\xi$ . Nowe momenty bezwładności mają wzory następujące:

$$J_{\xi} = \int_A \eta^2 dA \quad J_{\eta} = \int_A \xi^2 dA \quad (35)$$

Zależność między nowymi a starymi współrzędnymi wyraża się dla pewnego punktu  $K$  zapomocą następujących równań (rys. 53);

$$\begin{aligned} \eta &= y \cos \omega - x \sin \omega \\ \xi &= x \cos \omega + y \sin \omega \end{aligned} \quad (36)$$

Wstawiamy wartość dla  $\eta$  z równania (36) we wzór (35) i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} J_{\xi} &= \int_A (y \cos \omega - x \sin \omega)^2 dA = \\ &= \cos^2 \omega \int_A y^2 dA + \sin^2 \omega \int_A x^2 dA - 2 \sin \omega \cos \omega \int_A x y dA = \\ &= J_x \cos^2 \omega + J_y \sin^2 \omega - J_{xy} \sin 2\omega \end{aligned} \quad (37)$$

W razie, gdyby osie  $OX$  i  $OY$  były osiami głównymi, moment  $J_{xy}$  byłby równy zeru i wzór (37) przybrałby postać:

$$J_{\xi} = J_x^g \cos^2 \omega + J_y^g \sin^2 \omega \quad (38)$$

gdzie symbole  $J_x^g$  i  $J_y^g$  oznaczają momenty bezwładności względem osi głównych.

Dla osi  $O\eta$  otrzymujemy odpowiednio:

$$J_{\eta} = J_y \cos^2 \omega + J_x \sin^2 \omega + J_{xy} \sin 2\omega \quad (37')$$

$$J_{\eta} = J_y^g \cos^2 \omega + J_x^g \sin^2 \omega \quad (38')$$

Moment odśrodkowy względem osi  $O\xi$  i  $O\eta$  obliczamy ze wzoru:

$$J_{\xi\eta} = \int_A \xi \eta dA \quad (39)$$

który wobec zależności, jaka istnieje między współrzędnymi  $\xi$  i  $\eta$  a współrzędnymi  $x$  i  $y$  otrzymuje postać następującą:

$$J_{\xi\eta} = \int_A (y \cos \omega - x \sin \omega) \cdot (x \cos \omega + y \sin \omega) dA =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin \omega \cos \omega \int_A (y^2 - x^2) dA + (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) \int_A x y dA = \\
 &= (J_x - J_y) \frac{\sin 2\omega}{2} + J_{xy} \cos 2\omega \quad (40)
 \end{aligned}$$

Obliczamy kąt  $\omega_g$ , przy którym osie  $O\xi$  i  $O\eta$  byłyby osiami głównymi (przy początku współrzędnych w punkcie  $O$ ). W tym celu ustawiamy równanie:

$$J_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA = 0 \quad (41)$$

Równaniu temu zapomocą wzoru (40) nadajemy następującą postać:

$$\operatorname{tg} 2\omega_g = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x} \quad (42)$$

Ze wzoru (42) wyznaczamy dwie wartości kąta  $\omega_g$ , które będą oznaczać nachylenia głównych osi  $O\xi$  i  $O\eta$  względem osi  $OX$ . Osie główne będziemy przeważnie oznaczali przez  $OX^g$  i  $OY^g$  (o ile w grę będą wchodziły i inne osie). Jeżeli jakieś osie  $O'\xi$  i  $O'\eta$  nie mają wspólnego początku współrzędnych z osiami  $OX$  i  $OY$ , wówczas dla ustalenia zależności między momentami bezwładności względem tych osi  $J'_{\xi}$ ,  $J'_{\eta}$  a momentami bezwładności  $J_x$  i  $J_y$  korzystamy najpierw ze wzorów (37) i (37') dla osi  $OX$  i  $OY$  oraz dla osi  $O\xi$  i  $O\eta$ , równoległych do osi  $O'\xi$  i  $O'\eta$  i przechodzących przez punkt  $O$ , poczem uciekamy się (wzór 25) do zależności między momentami bezwładności, odpowiadającymi osiom do siebie równoległym t. j. osiom  $O'\xi$  i  $O\xi$  oraz  $O'\eta$  i  $O\eta$ .

## 5. Elipsa bezwładności i koło Mohr'a.

Zależność, istniejąca między momentem bezwładności  $J_{\xi}$  danego pola względem osi  $O\xi$ , nachylonej pod kątem  $\omega$  względem osi głównej  $OX^g$ , a momentami bezwładności  $J_x^g$  i  $J_y^g$  tegoż pola względem osi głównych może być przedstawiona zapomocą wykresu, zwanego elipsą bezwładności.

W tym celu wprowadzamy tu pojęcie promienia bezwładności, które określamy wzorem:

$$r_{\xi} = \sqrt{\frac{J_{\xi}}{A}}, \text{ czyli że: } J_{\xi} = r_{\xi}^2 \cdot A \quad (43)$$