

$$q_1 = q \frac{b^4}{a^4 + b^4} \quad q_2 = q \frac{a^4}{a^4 + b^4} \quad (1047)$$

Przyjmując, że momenty rozkładają się w płycie odpowiednio do obciążenia obydwóch rodzajów pasem, mamy dla środka płyty;

$$M_1 = \frac{q_1 \cdot a^2}{8} \quad M_2 = \frac{q_2 \cdot b^2}{8} \quad (1048)$$

Dla płyty utwierdzonej wzdłuż czterech krawędzi odpowiednie wzory wynoszą:

$$\text{u krawędzi} \quad M_1 = \frac{q_1 \cdot a^2}{12} \quad M_1 = \frac{q_2 \cdot b^2}{12} \quad (1049)$$

$$\text{w środku} \quad M_2 = \frac{q \cdot a^2}{24} \quad M_2 = \frac{q \cdot b^2}{24} \quad (1050)$$

Podobny sposób obliczenia został zaproponowany przez Bach'a ¹⁾.

4. Zbiorniki cienkościenne ²⁾.

Zbiorniki do wody, gazu, nafty i t.p. mają przeważnie ściany cienkie w porównaniu do swych pozostałych wymiarów i dlatego, przy wyznaczaniu naprężeń możemy tu założyć, że na całej grubości ścian naprężenia normalne (równoległe do powierzchni ścian) nie ulegają zmianie. Zbiorniki cienkościenne mają najczęściej kształt brył obrotowych. Rysunek 461 przedstawia przekrój południkowy takiego zbiornika.

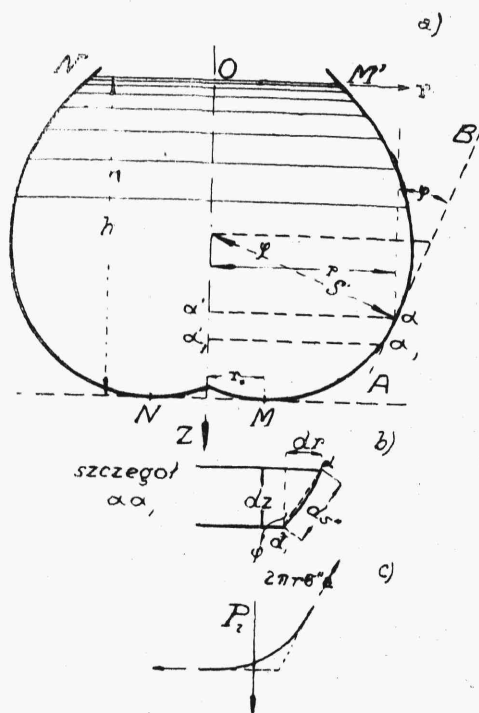
Zapomocą dwóch nieskończenie bliskich płaszczyzn południkowych i dwóch nieskończenie bliskich powierzchni stożkowych wycinamy część *ABCD* ściany zbiornika o wymiarach *ds''* i *ds'* liczonych odpowiednio wzdłuż przekroju południkowego i równoleżnikowego. Uważając, że na całej długości *ds''* i *ds'* krzywizna wycinka ściany nie zmienia się, otrzymujemy (rys. 462):

$$d\varphi' = \frac{ds'}{\rho'} \quad d\varphi'' = \frac{ds''}{\rho''} \quad (1051)$$

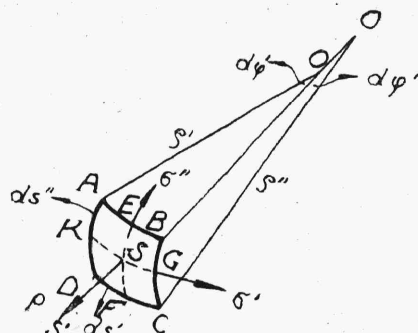
¹⁾ Por. C. Bach u. R. Baumann „Elastizität u. Festigkeit“, 1924, str. 613, oraz np. szwajcarskie przepisy dotyczące budownictwa żelazobetonowego.

²⁾ Por. H. Lorenz, „Technische Elastizitätslehre“, 1913, str. 26.

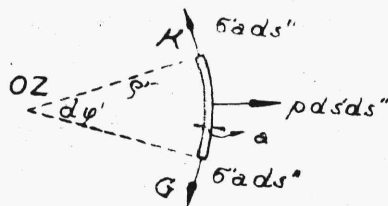
gdzie ρ' i ρ'' oznaczają promienie krzywizny zaś $d\varphi'$ i $d\varphi''$ oznaczają kąty AO_1B i BOC , odpowiadające łukom ds' i ds'' .



Rys. 461.



Rys. 462.



Rys. 463.

Naprężenia, działające na płaszczyzny przekrojów AD i BC oznaczamy przez σ' (naprężenia równoleżnikowe), wobec czego odpowiednie siły równe są $\sigma'ads''$, gdzie a oznacza grubość ściany. Siły te zaczepione są w środku długości AD i BC , a siła $pds'ds''$, oznaczająca parcie wody przypadające na część ściany $ABCD$, zaczepiona jest w punkcie S . W ten sam sposób przez $\sigma''ads'$ oznaczamy siły, działające na płaszczyzny AB i DC i zaczepione w środku długości AB i DC . Naprężenia τ tu pomijamy.

Przeprowadzamy płaszczyznę równoleżnikową przez środki AD i BC i przenosimy na rys. 463 odpowiedni przekrój KG wycinka $ABCD$. Na bryłę $ABCD$ w płaszczyźnie przekroju KG działają więc dwie siły $\sigma'ads''$, które rzutujemy na dwusieczną kąta $d\varphi'$ i na prostą do niej prostopadłą t.j. styczną w środku łuku KG . Te ostatnie składowe wzajemnie się znośzą, dwie pierwsze zaś dają wypadkową:

$$2 \sigma' a ds'' \sin \frac{d\varphi'}{2} = \sigma' a ds'' d\varphi' \quad (1052)$$

Rozumując w ten sam sposób w stosunku do sił, działających na płaszczyzny AB i DC (w przekroju EF bryły $ABCD$), otrzymujemy:

$$2 \sigma'' a ds' \sin \frac{d\varphi''}{2} = \sigma'' a ds' d\varphi'' \quad (1053)$$

gdzie σ'' nazywać będziemy naprężeniem południkowym.

Ponieważ dwusieczne kątów $d\varphi''$ i $d\varphi'$, odpowiadających łukom KG i EF , muszą być skierowane wzdłuż jednej i tej samej prostej SS' (rys. 462), gdzie S jest to środek geometryczny powierzchni $ABDC$, więc możemy przyjąć, że:

$$a (\sigma' ds'' d\varphi' + \sigma'' ds' d\varphi'') = p ds' ds'' \quad (1054)$$

przyczem siła $p ds' ds''$ działa normalnie do powierzchni $ABCD$ i zaczepiona jest w jej środku ciężkości.

Równanie (1054) przekształcamy w następujące:

$$a (\sigma' ds'' \frac{ds'}{\rho'} + \sigma'' ds' \frac{ds''}{\rho''}) = p ds' ds'' \quad (1055)$$

a więc:

$$\frac{\sigma'}{\rho'} + \frac{\sigma''}{\rho''} = \frac{p}{a} \quad (1056)$$

W dalszym ciągu, zapomocą dwóch nieskończenie bliskich płaszczyzn równoleżnikowych $\alpha\alpha$ i $\alpha_1\alpha_1$ (rys. 461) wyłączamy z powierzchni zbiornika pasek o szerokości $\alpha\alpha_1$ i długości $2\pi r$, gdzie r oznacza promień odpowiedniego równoleżnika. Ciśnienie płynu w zbiorniku na ten nieskończenie wąski pasek równa się $2\pi r p \alpha\alpha_1$, a jego rzut na oś zbiornika równa się $2\pi r p \cdot \alpha\alpha_1 \sin \varphi = 2\pi r p dr$, gdzie dr oznacza przyrost promienia r przy przejściu od płaszczyzny $\alpha_1\alpha_1$ do płaszczyzny $\alpha\alpha$ (rys. 461b).

Pionowa składowa ciśnienia płynu na powierzchnię zbiornika między punktami M i a wynosi więc:

$$P_s = 2\pi \int_{r_0}^r p r dr \quad (1057)$$

gdzie r_0 oznacza promień koła styczności powierzchni zbiornika z płaszczyzną MN prostopadłą do jego osi.

Podkreślić należy, że siła P_s zależna jest jedynie od parcia hydrostatycznego i że ciężar naczynia nie jest tu brany pod uwagę.

Zależność między promieniem krzywizny ρ' a promieniem obrotu r dla danego punktu powierzchni zbiornika wyraża się zapomocą wzoru następującego:

$$\rho' \cos \varphi = r \quad (1058)$$

Nową zależność między ciśnieniem cieczy zbiornika a naprężeniem południkowym w jego ścianie otrzymujemy, przyrównując siłę P_s , pionową składową parcia cieczy na powierzchnię $M\alpha$, do pionowej składowej sił wewnętrznych, działających w płaszczyźnie $\alpha\alpha$ na pole przekroju $2\pi r\alpha$ ściany (punkt α na rys. 461), inaczej mówiąc, rzutując na oś Z —ów siły działające na część naczynia $\alpha NM\alpha$ (rys. 461c). Mamy więc:

$$2\pi r \sigma'' \alpha \cos \varphi = 2\pi \int_{r_0}^r p r dr \quad (1059)$$

$$\sigma'' = \frac{1}{\alpha \cos \varphi} \int_{r_0}^r p r dr \quad (1060)$$

Na podstawie równań (1056) i (1060) możemy wyznaczyć σ' w przekroju $\alpha\alpha$. W tym celu z rysunku 461 ustawiamy zależności:

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{dr}{dz} \quad (1061)$$

$$\cos \varphi = \frac{dz}{ds''} \quad (1062)$$

Prócz tego na podstawie wzorów (1051) mamy, że:

$$\rho'' = \frac{ds''}{d\varphi''} \quad (1063)$$

We wzorach (1061)—(1063) znaki tłumacza się tem, że przyjąwszy za początek Z -ów poziom wody w zbiorniku, mamy przy s wzrastającym r lub φ

ubywające, co wynika z rysunku 461. Mnożąc równanie (1062) przez równanie (1063), otrzymujemy, że:

$$\rho'' \cos \varphi = \frac{dz}{d\varphi} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{\rho'' \cos \varphi} = \frac{d\varphi}{dz} \quad (1064)$$

Różniczkujemy wzór (1061) względem z :

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dz} = - \frac{d^2 r}{dz^2} \quad (1064')$$

skąd, na podstawie wzoru (1064), otrzymujemy, że:

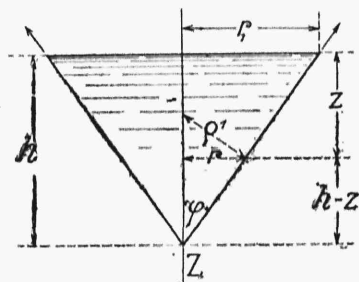
$$\frac{1}{\rho''} = - \frac{d^2 r}{dz^2} \cdot \cos^3 \varphi \quad (1065)$$

Wreszcie zapomocą wzorów (1058), (1060), (1065) oraz równania (1056) dochodzimy do następującego wzoru dla naprężenia σ' w przekroju $\alpha\alpha$:

$$\sigma' = \frac{r}{a \cos \varphi} \left(p + \frac{d^2 r}{dz^2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{r} \int_{r_0}^r p r dr \right) \quad (1066)$$

W szczególnym wypadku naczynia stożkowatego i przy ciężarze właściwym płynu γ powyższe wzory przybierają postać następującą (rys. 464):

$$\begin{aligned} \rho'' &= \infty & \rho' &= \frac{h - z}{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \varphi \\ \frac{\sigma'}{\rho'} + \frac{\sigma''}{\infty} &= \frac{z \cdot \gamma}{a} \\ \sigma' &= \rho' \cdot z \cdot \frac{\gamma}{a} = z(h - z) \cdot \frac{\gamma}{a} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \end{aligned}$$



Rys. 464.

Tu przy $z = 0$, $\sigma' = 0$ i przy $z = h$, $\sigma' = 0$.

$$\begin{aligned} \sigma'' &= \frac{\gamma}{a \cos \varphi} \cdot \frac{1}{r_1} \cdot \int_0^{r_1} r(h - r \operatorname{ctg} \varphi) dr = \\ &= \frac{\gamma}{a \cos \varphi} \cdot r_1 \left(\frac{h}{2} - \frac{r_1}{3} \operatorname{ctg} \varphi \right) \end{aligned}$$

Zastosujemy wreszcie wzory wyprowadzone na początku paragrafu do obliczenia zbiornika cylindrycznego o dnie parabolicznem (rys. 465, przekrój południkowy).

Licząc się z układem osi współrzędnych OZ i OR mamy dla przekroju południkowego parabolicznej części zbiornika równanie następujące:

$$z = \frac{h}{R^2} \cdot r^2 \quad (1067)$$

Odległość punktu K od poziomu cieczy w zbiorniku równa się:

$$z' = H + h - z = H + h - \frac{h}{R^2} r^2 \quad (1068)$$

Różniczkując dwukrotnie wzór (1067) względem z , otrzymujemy:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{R^2}{2rh} \quad (1069)$$

$$\frac{d^2r}{dz^2} = - \frac{R^4}{4h^2r^3} \quad (1070)$$

Wobec tego na podstawie wzoru (1061) mamy:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^4}{4h^2r^2}}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{4h^4}}} \quad (1071)$$

Napężenia σ' i σ'' równają się (vid. wzory 1060 i 1066):

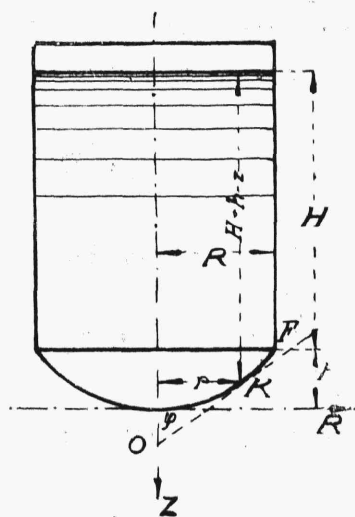
$$\sigma'' = \frac{\gamma}{2a} \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{4h^2}} \left(H + h - \frac{h}{2R^2} r^2 \right) \quad (1072)$$

$$\sigma' = \frac{\gamma}{a} \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{4h^2}} \left[z' - \frac{R^4 \left(H + h - \frac{h}{2R^2} r^2 \right)}{8h^2 \left(r^2 + \frac{R^4}{4h^4} \right)} \right] \quad (1073)$$

gdzie γ oznacza ciężar gatunkowy cieczy. Wzory (1072) i (1073) dotyczą

tylko parabolicznej części zbiornika. Dla części cylindrycznej otrzymujemy w miejscu połączenia jej z częścią paraboliczną ze wzoru (1056), że:

$$\sigma' = \frac{rp}{a} = \frac{r\gamma H}{a} \quad (1074)$$



Rys. 465.

Z porównania wzorów (1074) i (1073) widzimy, że około miejsca, gdzie część cylindryczna zbiornika przechodzi w paraboliczną, w obydwóch częściach otrzymujemy różne naprężenia. Z równania (1056) wynika, że przy $\rho'' = 0$ t. j. w miejscu załamania się przekroju południkowego $\sigma' = \infty$ czyli, że w punktach *F* (na rys. 465) otrzymujemy naprężenia równoleżnikowe bardzo wielkie i z tego powodu musimy wzdłuż obwodu zbiornika w tym miejscu ustawić specjalny pierścień wzmacniający.

5. Zbiorniki grubościennie z dnem nieodkształcalnem.

Gdy chodzi o niewielkie zbiorniki murowane, betonowe i żelazobetonowe, to dno ich, ze względu na fundamentowanie, musi być przeważnie tak znacznych wymiarów, że parcie cieczy na ściany zbiornika nie wywołuje naogół odkształcenia dna, możemy więc uważać, że dolne przekroje końcowe ścian nie mogą się obracać. Zbiorniki tego rodzaju mają zwykle kształt cylindryczny (rys. 466). Obliczenie ich opiera się na następujących założeniach ¹⁾.

1°. Przyjmujemy, że w każdym przekroju wycinka południkowego *ABCD* wypadkowa poziomych sił wewnętrznych przechodzi przez jego środek *S* (na rys 466b). Założenie to jest równoznaczne z założeniem, że naprężenia równoleżnikowe w ścianach rozłożone są wewnątrz ścian równomiernie na ich grubości w każdym przekroju, co ściśle ma miejsce tylko w ścianach nieskończenie cienkich. Naprężenia w grubościennych walcach zostały obliczone przez Lamé'go w wypadku walca nieograniczonego poprzecznie, co w danym wypadku nie ma jednak miejsca. Porównanie rezultatów obliczenia walca cienkościennego z rozwiązaniem Lamé'go, ²⁾ dla

¹⁾ Por. T. Pöschl u. K. Terzaghi, „Berechnung von Behältern“, 1913.

²⁾ M. G. Lamé. „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides“, 1866, str. 188.